

УДК 539.3

## Изгиб трехслойной пластинки с близкой к нулю жесткостью на поперечный сдвиг

Х. Альтенбах<sup>1</sup>, В.А. Еремеев<sup>1,2</sup>, Е.А. Иванова<sup>3,4</sup>, Н.Ф. Морозов<sup>4,5</sup><sup>1</sup> Университет Отто фон Герике Магдебург, Магдебург, 39106, Германия<sup>2</sup> Южный научный центр РАН, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 344090, Россия<sup>3</sup> Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург, 195251, Россия<sup>4</sup> Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 199178, Россия<sup>5</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 198904, Россия

Рассматривается изгиб микро- и наноразмерных пластинок, образованных двумя упругими слоями, между которыми находится тонкий слой жидкости. Известно, что на микро- и наномасштабах реология жидкости может существенно меняться, проявляя неньютоновские свойства, в том числе и свойства твердого тела. Поэтому данная структура моделируется трехслойной пластиной, внешние слои которой упругие, а внутренний слой представляет собой вязкоупругое тело. В рамках теории пластинок при учете поперечного сдвига получены и проанализированы уравнения состояния для тензоров усилий и моментов в случае, когда жесткость на поперечный сдвиг близка к нулю. Предложена модифицированная формула для эффективной жесткости на поперечный сдвиг, учитывающая поверхностную энергию краев пластинки. Показано, что тангенциальная и изгибная жесткость пластины определяются в основном внешними слоями, а жесткость на поперечный сдвиг зависит в основном от свойств внутреннего слоя и формы пластинки.

*Ключевые слова:* тонкостенные конструкции, реологические модели, наноструктуры

## Bending of a three-layer plate with a near-zero transverse shear stiffness

H. Altenbach<sup>1</sup>, V.A. Eremeyev<sup>1,2</sup>, E.A. Ivanova<sup>3,4</sup>, and N.F. Morozov<sup>4,5</sup><sup>1</sup> Otto-von-Guericke University Magdeburg, Magdeburg, 39106, Germany<sup>2</sup> Southern Scientific Center RAS, Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia<sup>3</sup> St. Petersburg State Polytechnic University, St. Petersburg, 195251, Russia<sup>4</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, 199178, Russia<sup>5</sup> St. Petersburg State University, St. Petersburg, 198904, Russia

In the work, we study bending of micro- and nano-sized plates formed by two elastic layers with a thin liquid layer in between. Because a liquid can greatly change its rheology on micro- and nanoscales, displaying non-Newtonian properties (including properties of a solid), the structure is modeled by a three-layer plate in which the outer layers are elastic and the inner layer is viscoelastic. Equations of state for stress resultant and couple stress tensors with a near-zero transverse shear stiffness are derived and analyzed using the theory of plates. A modified formula for effective transverse shear stiffness is proposed taking into account the surface energy of the plate edges. It is shown that the tangential and bending stiffnesses of the plate depend mainly on the properties of its outer layers, whereas the transverse shear stiffness of the plate is governed by the properties of its inner layer and by the plate shape.

*Keywords:* thin-wall structures, rheological models, nanostructures

### 1. Введение

В последнее время в связи с развитием нанотрибологии существенно возрос интерес к описанию поведения тонких пленок жидкости и их взаимодействия с твердым телом [1, 2]. Известно, что на микро- и наномасштабах реология жидкости может существенно ме-

няться, проявляя неньютоновские свойства, в том числе и свойства твердого тела. Это делает важным разработку моделей элементов микро- и наноэлектромеханических систем, используемых в жидкой среде, либо имеющих упругие элементы, содержащие жидкость. К числу таких элементов относятся нанотрубки, заполненные жид-

костью, искусственные мембраны, образованные двумя эластичными слоями с внутренним «жидким» слоем.

В данной работе рассматривается изгиб микро- и наноразмерных пластин, образованных двумя упругими слоями, между которыми находится тонкий слой жидкости (ядро). Целью является определение эффективных характеристик такой тонкой трехслойной структуры, рассматриваемой как двухмерное тело, т.е. с позиций теории пластин и оболочек. Естественно, что классические методы редукции трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин (интегрирование по толщине, асимптотические методы, метод гипотез и др.) непосредственно в данном случае неприменимы. В частности, это связано с тем, что жидкость обладает нулевой жесткостью на сдвиг. В случае же микро- или наноструктуры жесткость такой трехслойной структуры на сдвиг обеспечивается поверхностным натяжением, действующим по боковой поверхности, неньютоновскими свойствами жидкости, а также силами взаимодействия между внешними слоями, которые существенны на микро- и наноразмерах (капиллярные, Ван-дер-Ваальса, Казимира и др.). Для микро-размерных пластин существенным является также характер взаимодействия жидкости с упругими слоями, т.е. является ли жидкость смачивающей (гидрофильной) или несмачивающей (гидрофобной) поверхность.

Для получения эффективных жесткостных характеристик трехслойной пластинки воспользуемся линейной теорией вязкоупругих пластин типа Тимошенко–Рейсснера–Миндлина при учете конечной жесткости на поперечный сдвиг, представленной, например, в [3, 4]. Рассматривая жидкость как линейное вязкоупругое тело, можно получить эффективные характеристики пластины, поскольку в этом случае вырождение сдвиговой жесткости происходит только в предельном случае.

## 2. Основные уравнения теории пластин

Уравнения равновесия в теории пластин с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига имеют вид [5–8]:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_x + \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{M}$  — тензоры усилий и моментов;  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{m}$  — внешние поверхностные силы и моменты;  $\nabla \equiv \mathbf{i}_1 \partial / \partial x + \mathbf{i}_2 \partial / \partial y$  — набла-оператор в плоскости  $x, y$ ;  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  — векторы декартового базиса, ортогональные к вектору нормали к пластинке  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{i}_3$ .

Уравнения состояния для тензоров усилий и моментов вязкоупругой пластинки имеют вид:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \int_{-\infty}^t \mathbf{C}(t - \tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\tau, \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \int_{-\infty}^t \mathbf{\Gamma}(t - \tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} d\tau,$$

$$\mathbf{M} = \int_{-\infty}^t \mathbf{D}(t - \tau) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}} d\tau.$$

Здесь

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2(\nabla \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla \boldsymbol{\omega})^T),$$

$$\boldsymbol{\kappa} = 1/2(\nabla \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla \boldsymbol{\vartheta})^T)$$

есть двумерные тензоры деформации растяжения-сдвига и изгиба-кручения;  $\boldsymbol{\gamma} = \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\vartheta}$  — вектор деформации поперечного сдвига;  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор перемещений;  $\boldsymbol{\vartheta}$  — вектор поворота, который предполагается кинематически независимым от  $\boldsymbol{\omega}$ ;  $\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2$  — единичный тензор в плоскости пластинки;  $\mathbf{C}(t)$  и  $\mathbf{D}(t)$  — тензоры четвертого ранга и  $\mathbf{\Gamma}(t)$  — тензор второго ранга, описывающие вязкоупругие свойства пластинки. Для изотропной пластинки симметричного по толщине строения эти тензоры имеют следующую структуру [7]:

$$\mathbf{C} = C_{11} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + C_{22} (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_4),$$

$$\mathbf{D} = D_{22} (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_4) + D_{33} \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{A},$$

где  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2$ ,  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{a}_4 = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1$ . Значения функций релаксации  $C_{11}, C_{22}, D_{22}, D_{33}$  и  $\mathbf{\Gamma}$  для неоднородной по толщине вязкоупругой пластинки могут быть найдены аналогично случаю упругих пластин с использованием принципа соответствия [9], применяемого в теории линейной вязкоупругости. Для образов по Лапласу от  $C_{11}, C_{22}, D_{22}, D_{33}$  и  $\mathbf{\Gamma}$  выполняются формулы [3, 4]:

$$\bar{C}_{11} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}} \right\rangle, \quad (2)$$

$$\bar{C}_{22} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\bar{E}}{1 + \bar{\nu}} \right\rangle = \langle \bar{\mu} \rangle,$$

$$\bar{D}_{33} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}} z^2 \right\rangle, \quad (3)$$

$$\bar{D}_{22} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\bar{E}}{1 + \bar{\nu}} z^2 \right\rangle = \langle \bar{\mu} z^2 \rangle,$$

$$\bar{\Gamma} = \lambda^2 \bar{D}_{22}, \quad (4)$$

где  $\lambda$  является наименьшим положительным собственным значением задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d}{dz} \left( \bar{\mu} \frac{dZ}{dz} \right) + \lambda^2 \bar{\mu} Z = 0, \quad \frac{dZ}{dz} \Big|_{|z|=h/2} = 0. \quad (5)$$

Здесь через  $\langle \dots \rangle$  обозначена операция взятия преобразования Лапласа;  $E = E(z, t)$ ,  $\mu = \mu(z, t)$ ,  $\nu = \nu(z, t)$  — функции релаксации материала пластинки, аналогичные модулям Юнга, сдвига и коэффициенту Пуассона упругого материала, зависящие в общем случае от координаты в направлении нормали  $z$ ;  $\langle \dots \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} (\dots) dz$ ,  $h$  — толщина пластинки. В дальнейшем будем считать, что  $\nu$  не зависит от времени.

### 3. Трехслойная пластинка

Рассмотрим случай трехслойной пластинки с внутренним жидким слоем. Жидкость будем рассматривать в рамках модели несжимаемого стандартного вязкоупругого тела, которое включает в себя в том числе и жидкость Максвелла с нулевым длительным модулем на сдвиг. Соответственно, жидкость описывается одной функцией релаксации  $\mu_c(t)$ , поскольку условие несжимаемости означает, что  $\nu_c = 1/2$ . С учетом этого имеем формулу  $E_c(t) = 3\mu_c(t)$ . В рамках модели стандартного вязкоупругого тела

$$\mu_c = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right),$$

где  $\mu_0$  и  $\mu_\infty$  — соответственно мгновенный и длительный модули;  $\eta$  — время релаксации. Для жидкости Максвелла  $\mu_\infty = 0$ . Внешние слои пластинки будем считать упругими и имеющими модули  $E_f, \mu_f$  и  $\nu_f$ ,  $E_f = 2\mu_f(1 + \nu_f)$ . Толщины слоев обозначим через  $h_f$  и  $h_c$  соответственно, так что общая толщина равна  $h = h_c + 2h_f$ .

Формулы (2), (3) для трехслойной пластины принимают вид:

$$C_{11} = \frac{1}{2} \left( \frac{2E_f h_f}{1 - \nu_f} + \frac{E_c h_c}{1 - \nu_c} \right),$$

$$C_{22} = \frac{1}{2} \left( \frac{2E_f h_f}{1 + \nu_f} + \frac{E_c h_c}{1 + \nu_c} \right),$$

$$D_{22} = \frac{1}{24} \left( \frac{E_f (h^3 - h_c^3)}{1 + \nu_f} + \frac{E_c h_c^3}{1 + \nu_c} \right),$$

$$D_{33} = \frac{1}{24} \left( \frac{E_f (h^3 - h_c^3)}{1 - \nu_f} + \frac{E_c h_c^3}{1 - \nu_c} \right),$$

где в силу условия несжимаемости  $\nu_c$  следует положить равным  $1/2$ .

Тангенциальная и изгибные жесткости пластинки принимают вид:

$$C = C_{11} + C_{22} = \frac{2E_f h_f}{1 - \nu_f^2} + \frac{E h_c}{1 - \nu_c^2}, \quad (6)$$

$$D = D_{22} + D_{33} = \frac{1}{12} \left( \frac{E_f (h^3 - h_c^3)}{1 - \nu_f^2} + \frac{E_c h_c^3}{1 - \nu_c^2} \right). \quad (7)$$

Поскольку для внутреннего слоя функция релаксации существенно меньше жесткости внешних слоев, вместо (6) и (7) можно использовать упрощенные формулы

$$C = \frac{2E_f h_f}{1 - \nu_f^2}, \quad D = \frac{1}{12} \frac{E_f (h^3 - h_c^3)}{1 - \nu_f^2}. \quad (8)$$

Из (8) видно, что свойства жидкого слоя мало влияют на эффективные характеристики  $C$  и  $D$ , но они существенно проявляются в функции релаксации  $\Gamma$ . Действительно,  $\Gamma$  восстанавливается из уравнения (4), при этом для трехслойной пластинки спектральная задача (5) для  $\lambda$  решается аналитически [7]:  $\lambda$  является наименьшим

положительным корнем уравнения

$$l \cos\left(\lambda \frac{h_f}{2}\right) \cos\left(\lambda \frac{h_c}{2}\right) - \sin\left(\lambda \frac{h_f}{2}\right) \sin\left(\lambda \frac{h_c}{2}\right) = 0, \quad (9)$$

$$l = \frac{\bar{\mu}_c}{\mu_f}.$$

Примем для простоты, что  $h_f = h_c$ . Тогда решение (9) имеет вид:  $\lambda = 2/h_c \arctg \sqrt{l}$ . Считая, что  $\mu_c \ll \mu_f$ , можно воспользоваться приближенной формулой  $\arctg \sqrt{l} \approx \sqrt{l}$ . В результате получаем, что

$$\Gamma = \frac{26}{9} \mu_c h. \quad (10)$$

Из (10) видно, что  $\Gamma$  определяется свойствами жидкого слоя. Отметим, что это выражение для поперечной жесткости отличается коэффициентом от обычно используемых выражений в теории пластин при учете поперечного сдвига. Например, для трехслойных пластин с мягким ядром Э. Рейсснером предложено значение  $\Gamma = \mu_c h$  [5, 10], полученное в предположении, что толщина внешних слоев мала по сравнению с толщиной ядра ( $h_f \ll h_c$ ) и малости модуля сдвига ядра  $\mu_c \ll \mu_f$ . В связи с анализом жесткости тонкостенных структур, содержащих слои с малой сдвиговой жесткостью, отметим также работу [11], в которой в рамках гипотез Кирхгофа–Лява рассматривался случай  $h_c \rightarrow 0$  и, кроме того, допускался разрыв у поля перемещений.

### 4. Изгиб трехслойной пластинки

В качестве примера рассмотрим изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластинки (длиной  $a$ , шириной  $b$ ), нагруженной синусоидальной поперечной нагрузкой. Здесь уравнения (1) сводятся к одному уравнению для преобразования по Лапласу от прогиба  $w = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  [3, 4]:

$$D \Delta \Delta \bar{w} = \bar{q}_n - \frac{D}{s \Gamma} \Delta \bar{q}_n, \quad (11)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $s$  — параметр преобразования Лапласа;  $q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  — поперечная нагрузка. Примем  $q_n$  в форме

$$q_n = Q(t) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

Соответственно,  $\bar{q}_n = \bar{Q}(s) \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ . В этом случае решение (11) имеет элементарный вид:

$$\bar{w} = \bar{W}(s) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad (12)$$

$$\bar{W}(s) = \bar{Q}(s) \frac{1 + D/(s \Gamma) \eta^2}{D \eta^4}, \quad \eta^2 = \pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Чтобы проанализировать влияние малых  $\Gamma$  на прогибы, вместо обращения (12) воспользуемся теоремами о предельных значениях функции и ее образа по Лапласу [9, 12]:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{f}(s), \quad f(\infty) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{f}(s).$$

Тогда начальный (при  $t = 0$ ) и предельный (при  $t \rightarrow \infty$ ) прогибы в середине пластины описываются формулами

$$W(0) = Q(0) \left( \frac{1}{D\eta^4} + \frac{1}{\Gamma(0)\eta^2} \right),$$

$$W(\infty) = Q(\infty) \left( \frac{1}{D\eta^4} + \frac{1}{\Gamma(\infty)\eta^2} \right).$$

Здесь  $W(t) = \max_{(x,y)} w(x, y, t)$ . Последняя формула показывает, что предположение  $\Gamma(\infty) = 0$  приводит к физически бессмысленным результатам, выходящим за рамки модели: величина прогиба стремится к бесконечности.

Отметим, что полученные здесь результаты коррелируют с [11], где другими методами показано, что при наличии нежесткого контакта слоев прогибы существенно возрастают. Отличия состоят в том, что здесь не используется предположение малости толщины внутреннего слоя, а также в [11] используется модель внутреннего слоя как упругой или упругопластической среды, реагирующей на разрыв касательных перемещений. Естественно, что в предельном случае жесткого контакта изгибная жесткость, полученная в [11], совпадает со вторым уравнением в (8) при  $h_c \rightarrow 0$  с точностью до разницы между изгибной жесткостью балки и пластины.

### 5. Жесткости пластинки при учете гидрофильности жидкого слоя

Как уже отмечалось во введении, на микро- и наноуровнях могут сказываться свойства жидкости, связанные с поверхностными эффектами. Несмотря на то что на наноуровне жидкость приобретает свойства вязкоупругого тела, можно предположить, что различия между гидрофобной и гидрофильной жидкостями будут проявляться и в этом случае. Из макроскопической теории известно, что энергия взаимодействия гидрофильной жидкости с твердым телом меньше, чем энергия взаимодействия жидкости с воздухом, а для гидрофобной жидкости ситуация обратная. Вследствие этого угол контакта гидрофильной жидкости с твердым телом меньше  $90^\circ$ , а для гидрофобной — больше, отличаются давления внутри жидкости, форма мениска, см., например, [13]. Кроме того, гидрофобная жидкость меньше прилипает к поверхности.

Предполагается, что жидкость со сложной реологией обладает поверхностными свойствами, качественно совпадающими с поверхностными свойствами обычной жидкости, т.е. что на свободном краю пластины образуется мениск, форма которого зависит от того, является жидкость гидрофильной или гидрофобной. В рамках развиваемого подхода различие между гидрофильной и гидрофобной жидкостями предлагается учесть путем использования двух реологических моде-

лей, отличающихся только вблизи свободного края пластины (рис. 1). Внутри слоя каждая жидкость описывается реологической моделью Максвелла, а мениск — моделью стандартного вязкоупругого тела. Кроме того, для гидрофильной жидкости вводятся дополнительные жесткости, связанные со сдвигом упругих слоев относительно друг друга и соответствующей деформацией формы мениска (горизонтальные пружины на рис. 1). Вообще говоря, при изгибе пластины форма мениска также деформируется, что может быть учтено добавлением к модели спиральных пружин, реагирующих на повороты пластин. Таким образом, учет поверхностных эффектов приводит к модели трехслойной пластины с подкрепленным краем, причем характер подкрепления зависит от типа жидкости. Отметим, что такого рода дискретные модели достаточно широко представлены в механике, см., например, [14].

Для анализа влияния подкрепления для пластинок произвольной формы воспользуемся концепцией эффективных модулей, используемых в механике композиционных материалов. Изгибу пластинки с подкрепленным краем соответствует функционал энергии

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \iint_S (\Gamma \gamma \cdot \gamma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{k}) dS + \int_{\partial S} (\Gamma_S \gamma \cdot \gamma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{k}) dS.$$

Здесь  $\Gamma_S$  — жесткость подкрепления на сдвиг, для гидрофобной жидкости  $\Gamma_S$  существенно меньше, чем для гидрофильной, упругие слои могут скользить относительно друг друга. На рис. 1 это различие показано присутствием горизонтальных пружин для гидрофильной жидкости. Тензор четвертого ранга  $\mathbf{D}_S$  описывает жесткость подкрепления на изгиб и кручение. Введем однородную пластинку без подкрепления с эффективными («размазанными по площади») свойствами, так чтобы энергии подкрепленной и эффективной пластинки совпадали:

$$\varepsilon_* = \frac{1}{2} \iint_S (\Gamma_* \gamma \cdot \gamma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}_* \cdot \mathbf{k}) dS.$$

Здесь  $\Gamma_*$  — эффективная жесткость на поперечный

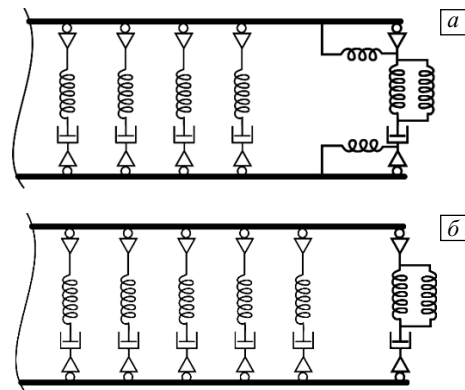


Рис. 1. Реологические модели пластины с промежуточным слоем гидрофильной (а) и гидрофобной жидкости (б)

сдвиг, а  $\mathbf{D}_*$  — тензор изгибной жесткости. Приравнявая  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_*$  в случае однородных деформаций, получим

$$(\Gamma S + \Gamma_S L) \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\kappa} \cdot (\mathbf{SD} + \mathbf{LD}_S) \cdot \boldsymbol{\kappa} = (\Gamma_* \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{D}_* \cdot \boldsymbol{\kappa}) S. \quad (13)$$

Здесь  $S$  и  $L$  — соответственно площадь и длина контура пластинки. Из (13) следуют формулы

$$\Gamma_* = \Gamma + \frac{L}{S} \Gamma_S, \quad \mathbf{D}_* = \mathbf{D} + \frac{L}{S} \mathbf{D}_S. \quad (14)$$

Отметим, что в (14) влияние поверхностных эффектов проявляется по-разному. Поскольку  $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ , в выражении для изгибной жесткости ими можно пренебречь. Для жесткости на поперечный сдвиг величина  $\Gamma$  близка к нулю и влиянием поверхностного натяжения, вообще говоря, пренебречь нельзя. В рамках предложенной реологической модели различия между гидрофобной и гидрофильной жидкостями сводятся к различиям в величине  $\Gamma_*$ : для гидрофильной жидкости  $\Gamma_*$  больше, чем для гидрофобной.

Первую формулу в (14) можно записать следующим образом:

$$\Gamma_* = k \mu_c h + \alpha h, \quad (15)$$

где  $k$  — коэффициент жесткости на поперечный сдвиг, вычисляемый при помощи (5), а  $\alpha = Lh/S\Gamma_S$  — поправочный коэффициент. Вводя коэффициент поверхностного натяжения жидкости  $\sigma$  на боковой поверхности жидкого слоя, выразим  $\alpha$  через  $\sigma$ . Принимая, что  $\Gamma_S = 2\sigma h_c$ , находим

$$\alpha = 2\sigma L h_c / (Sh).$$

Нетрудно видеть, что полученная формула соответствует закону, предложенному в [15] для описания размерного эффекта, присущего наноматериалам. Действительно, имеем формулу

$$\Gamma_*/\Gamma = 1 + 2\sigma L h_c / (kSh \mu_c),$$

по структуре аналогичную [15]. Кроме того, видно, что влияние члена с  $\alpha$  в уравнении (15) существенно проявляется не только при малых модулях сдвига  $\mu_c$ , но и для пластинок с извилистым краем, т.е. учитывает геометрию пластинки «в среднем». Таким образом, уравнение (15) представляет собой феноменологическую формулу для жесткости на поперечный сдвиг для наноразмерных пластинок с жидким слоем внутри.

## 6. Заключение

В рамках теории пластин при учете поперечного сдвига получены и проанализированы уравнения состояния для тензоров усилий и моментов в случае, когда жесткость на поперечный сдвиг близка нулю. Предложена модифицированная формула для эффективной

жесткости на поперечный сдвиг (15), учитывающая поверхностную энергию краев пластинки. Показано, что тангенциальная и изгибная жесткость пластины определяются в основном внешними слоями. В то же время жесткость на поперечный сдвиг зависит в основном от свойств внутреннего слоя и формы пластинки. Полученные результаты представляют интерес для задач микро- и наномеханики тонкостенных объектов, образованных тонкими слоями упругого материала, разделенного тонким слоем жидкости. В частности, экспериментальные измерения  $\Gamma_*$  позволяют оценивать свойства внутреннего жидкого слоя пластинки, включая поверхностные эффекты и характер взаимодействия на микро- и наномасштабе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 12-01-00038 и 12-01-00815-а) и DFG (грант № AL 341/33-1).

## Литература

1. *Nanotribology and Nanomechanics. An Introduction* / Ed. by B. Bhushan. – Berlin: Springer-Verlag, 2005. – 1516 p.
2. *Springer Handbook of Nanotechnology* / Ed. by B. Bhushan. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 1917 p.
3. Altenbach H., Eremeyev V.A. Analysis of the viscoelastic behavior of plates made of functionally graded materials // ZAMM. – 2008. – V. 88. – No. 5. – P. 332–341.
4. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the bending of viscoelastic plates made of polymer foams // Acta Mechanica. – 2009. – V. 204. – No. 3–4. – P. 137–154.
5. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемых твердых тел. Т. 5. – М.: ВИНТИ, 1973. – 273 с.
6. Альтенбах Х., Жилин П.А. Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. – 1988. – Т. 11. – № 4. – С. 107–148.
7. Жилин П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 167 с.
8. Lebedev L.P., Cloud M.J., Eremeyev V.A. Tensor Analysis with Applications in Mechanics. – New Jersey: World Scientific, 2010. – 350 p.
9. Кристенсен П.М. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 228 с.
10. Reissner E. On bending of elastic plates // Q. Appl. Math. – 1947. – V. 5. – P. 55–68.
11. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Изгиб двухслойной балки с нежестким контактом между слоями // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т. 75. – № 1. – С. 112–121.
12. Tschoegl N.W. The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. An Introduction. – Berlin: Springer, 1989. – 769 p.
13. Финн Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
14. Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. Дискретные и гибридные модели механики разрушения. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1995. – 160 с.
15. Wang J., Duan H.L., Huang Z.P., Karimloo B.L. A scaling law for properties of nano-structured materials // Proc. Roy. Soc. London. A. – 2006. – V. 462. – No. 2069. – P. 1355–1363.

Поступила в редакцию  
14.05.2012 г.

## Сведения об авторах

Альтенбах Хольм, д.ф.-м.н., проф. Университета Отто фон Герике Магдебург, Германия, holm.altenbach@ovgu.de  
Еремеев Виктор Анатольевич, д.ф.-м.н., проф. ЮФУ, eremeyev.victor@gmail.com  
Иванова Елена Александровна, д.ф.-м.н., проф. СПбГПУ, elenaivanova239@post.ru  
Морозов Никита Федорович, д.ф.-м.н., академик РАН, зав. каф. СПбГУ, morozov@NM1016.spb.edu