

Среда Кельвина и ферромагнетизм¹

Введение

Первые работы, посвященные полярным средам, относятся к концу XIX — началу XX в. (Дюгем, 1894; Э. и Ф. Коссера, 1909). Коссера ввели в рассмотрение упругий континуум, тела-точки которого представляют собой малые абсолютно твердые тела, способные совершать независимые повороты и перемещения [59]. Теория среды построена исходя из постулируемого вариационного принципа. В среде Коссера свободное вращение частиц не допускается. Лорд Кельвин выдвинул концепцию среды, состоящей из гиростатов, которая сопротивлялась бы только угловым деформациям. “Кельвин представил себе модель квазижесткого эфира, построенную из гиростатов. Эта проблема очень сложна. Дело сводилось к отысканию системы, оказывающей сопротивление только деформациям, которые связаны с вращениями. . .” [137]. Математически эта идея Кельвиным не была реализована.

В дальнейшем на многие годы теория полярных сред была забыта. Ее новое рождение началось со статьи К. Трусделла и Дж. Эриксона [188], посвященной 50-летию работы Э. и Ф. Коссера. После этого интерес к полярным средам вновь возрос, и появилось множество работ, посвященных различным вариантам линейной моментной теории упругости [162, 189–205]. В работе [189] построена теория линейной полярной упругой среды и рассмотрено распространение волн в случае изотропии. В работе [162] построена линейная моментная теория термоупругости.

¹ Приложение написано Е. Ф. Грековой и Е. А. Ивановой. Материал приложения основан на статье Е. Ф. Грековой, П. А. Жилина [187] “Уравнения нелинейных упругих полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики” (Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спец. вып. по проблемам нелинейной упругости. — 2000. — С. 25–41). (Примеч. ред.)

Некоторые авторы (см., например, [192, 196]) рассматривали псевдоконтинуум Коссера, тела-точки которого не могут совершать независимые повороты; при этом микровращения моделировались при помощи ротора перемещений.

Существует множество работ, посвященных одномерным и двумерным средам Коссера, при помощи которых моделируются стержни и оболочки, [188, 202, 206]. П. А. Жилиным разработана нелинейная теория двумерной полярной среды [67, 68, 92, 145] — теория неклассических простых оболочек². Предложенный в работах П. А. Жилина метод получения основных уравнений опирается на фундаментальные принципы механики, при этом важную роль играет уравнение баланса энергии, посредством которого определяется вид тензоров деформации. Этот подход применим и при построении трехмерной теории полярной среды.

В природе существуют различные примеры сред, запасующих энергию путем вращения. Так, в работах [207, 208] исследуются парафины, в которых с ростом температуры цепочки атомов начинают вращаться все с большей скоростью. Сначала повороты носят колебательный характер, а затем, начиная с определенной температуры, угловая скорость собственного вращения не меняет знака и возрастает по величине. При этом для наблюдателя, живущего в относительно “медленном” времени, цепочки кажутся осесимметричными.

В магнитных материалах намагниченность связана через гирромагнитное соотношение с кинетическим моментом материального объема среды. Магнитная индукция создает объемный момент, действующий на материальный объем. Таким образом, магнитный материал является полярной средой с немалым кинетическим моментом. Это дает возможность установить аналогию между нелинейной средой Коссера, частицы которой обладают большой скоростью собственного вращения, и упругими ферромагнетиками в состоянии магнитного насыщения. Идея рассмотрения сред с большой угловой скоростью вращения частиц выдвигалась еще в начале века, однако математический аппарат не позволял ее формализовать. В настоящее время теории таких сред построены и применяются для описания магнетиков. Феноменологическая теория деформируемых ферромагнетиков была предложена Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем [209] и развита в работах [210–213] и др. Обзор развития теории можно найти в [214]. Из работ, изданных в последние годы, можно упомянуть [215, 216].

Примером среды с частицами, обладающими динамическим спином, может служить нелинейная упругая среда, состоящая из вращающихся частиц с

² О теории неклассических простых оболочек П. А. Жилина см. Приложение J.

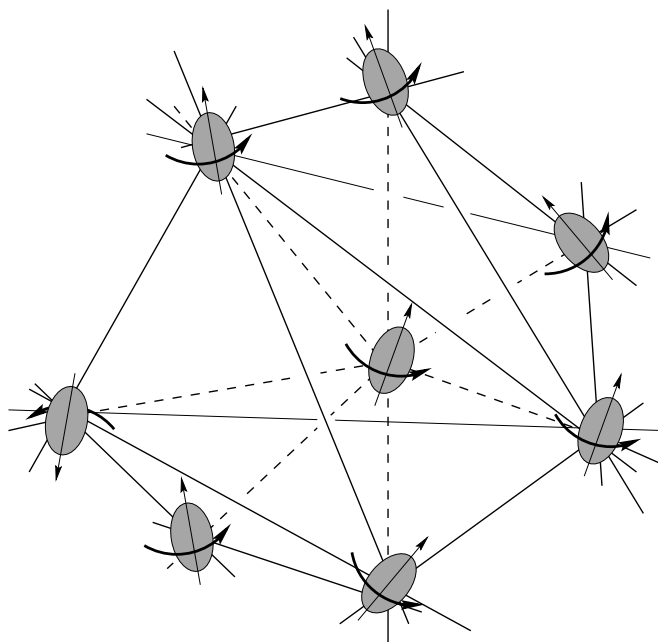


Рис. I.1. Обобщенная среда Кельвина

осевой симметрией (рис. I.1). Тела-точки рассматриваемой среды, в отличие от частиц традиционно рассматриваемой среды Коссера, могут вращаться вокруг собственной оси с большой угловой скоростью. При этом остальные перемещения и повороты будут конечными. Назовем такую среду обобщенной средой Кельвина, поскольку, в отличие от среды Кельвина, она обладает трансляционными степенями свободы и сопротивляется трансляционным деформациям. Уравнения обобщенной среды Кельвина для случая малых перемещений и малых углов нутации, но при условии большой скорости собственного вращения частиц были получены в работах [138,217]. В работе [217] проведено исследование движения среды определенного типа симметрии при условии тождественного равенства нулю трансляционных перемещений. Показано влияние гироскопического члена в сравнении с волновыми процессами в безграничной линейной среде Коссера, исследованными в [189]. Гироскопия приводит к “раздвоению” дисперсионной ветви угловых колебаний, так как вносит в систему асимметрию, в результате чего появляются две различные частоты отсечки.

В данной работе ставится задача рассмотреть ферромагнетики с позиций механики, используя фундаментальные законы. Разумеется, при этом необходимо учитывать природу рассматриваемых взаимодействий. Однако феноменологический подход обладает тем преимуществом, что при его использовании делается минимум предположений о том, каков конкретный вид этих

взаимодействий. Материал рассматривается как “черный ящик”, и его уравнения строятся исходя из нескольких фундаментальных принципов и соображений симметрии. Такой подход обладает, как представляется, максимальной общностью.

Далее демонстрируется аналогия между ферромагнетиками и обобщенной средой Кельвина. Существование этой аналогии позволяет применить метод построения определяющих уравнений полярной среды к ферромагнетикам и получить более общую теорию, чем в [214]. В дальнейшем показано, что уравнения динамики и определяющие уравнения обобщенной среды Кельвина аналогичны уравнениям динамики и определяющим уравнениям упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии насыщения и приближении квазимагнитостатики (см. [214]). Взаимное влияние трансляционных и угловых деформаций учитывается в наиболее общей форме, что позволяет описать эффекты, аналогичные магнитоакустическому резонансу в ферромагнетиках, который представляет собой явление возбуждения волн трансляционных перемещений при помощи спиновых волн, и наоборот [218, 219].

I.1. Основные уравнения обобщенной среды Кельвина

I.1.1. Кинематика обобщенной среды Кельвина

Рассмотрим обобщенную среду Кельвина — упругую деформируемую среду, состоящую из вращающихся частиц с осевой симметрией, имеющих и трансляционные, и угловые степени свободы (см. рис. I.1). Тела-точки среды взаимодействуют между собой. Примем, что их взаимодействие определяется лишь геометрической конфигурацией системы в данный момент времени. Учитывая осесимметричность тел-точек, делаем вывод: любое из тел-точек системы может свободно поворачиваться вокруг своей оси симметрии, не испытывая сопротивления со стороны других тел. Напротив, любое изменение ориентации одного из тел-точек, связанное с изменением пространственного положения его оси симметрии, приводит к появлению реактивных усилий и моментов в системе. Руководствуясь таким мысленным представлением, построим теорию обобщенной среды Кельвина с позиций механики сплошных сред.

Обозначим \mathbf{q}^s — материальные (лагранжевы) координаты точки среды, $\mathbf{r}(\mathbf{q}^s)$ и $\mathbf{R}(\mathbf{q}^s)$ — радиус-векторы, определяющие положение тела-точки в от-

счетной и актуальной конфигурациях, соответственно. Обозначим

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{r}, \quad \mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{R} \quad (\text{I.1})$$

базисы в отсчетной и актуальной конфигурациях, соответственно. Выберем \mathbf{r}_i ортонормированным. Набла-операторы в отсчетной и актуальной конфигурациях определяются формулами $\nabla = \mathbf{r}^i \partial_i$ и $\dot{\nabla} = \mathbf{R}^i \partial_i$, где \mathbf{r}^i и \mathbf{R}^i — соответствующие взаимные базисы. Введем следующие обозначения: $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ — трансляционное перемещение тела-точки; $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ — трансляционная скорость тела-точки.

Свяжем с каждым телом-точкой среды ортонормированный векторный базис $\mathbf{D}_k(\mathbf{q}^s)$, “вмороженный” в тело-точку, где $\mathbf{D}_3 \equiv \mathbf{m}$ — единичный вектор, направленный по оси тела-точки. Пусть в отсчетной конфигурации $\mathbf{D}_k = \mathbf{d}_k$, $\mathbf{d}_3 \equiv \mathbf{m}_0$. Взаимный базис \mathbf{D}^k ($\mathbf{D}^k \cdot \mathbf{D}_i = \delta_i^k$) совпадает с \mathbf{D}_k .

Введем в рассмотрение тензор поворота $\mathbf{P} = \mathbf{D}^k \otimes \mathbf{d}_k$, определяющий поворот тела-точки. Очевидно, что $\mathbf{D}_k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_k$ и

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad (\text{I.2})$$

где \mathbf{E} — единичный тензор. Тензор поворота тела-точки можно представить, применяя углы Эйлера [31]

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}_3(\psi \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{P}_2(\theta \mathbf{l}_0) \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0). \quad (\text{I.3})$$

Здесь \mathbf{l}_0 и \mathbf{m}_0 — взаимно ортогональные векторы, $|\mathbf{l}_0| = |\mathbf{m}_0| = 1$, ψ , θ , φ — углы прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно. Заметим, что разложение (I.3) сопоставляет каждому тензору поворота три угла Эйлера. Это разложение справедливо для каждого момента времени. Оно означает, что в положении, соответствующем данному моменту времени \mathbf{t} , тело могло оказаться, повернувшись вокруг вектора \mathbf{m}_0 на угол $\varphi(\mathbf{t})$, затем, отклонив свою ось от вектора \mathbf{m}_0 на угол $\theta(\mathbf{t})$ и вновь повернувшись вокруг \mathbf{m}_0 , уже не совпадающего с осью тела, на угол $\psi(\mathbf{t})$. Реальное движение при этом может происходить совершенно иначе.

Вектор угловой скорости тела-точки $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, \mathbf{t})$ есть по определению вектор, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \quad (\text{I.4})$$

Если тензор поворота представлен посредством углов Эйлера (I.3), вектор угловой скорости вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{m}_0 + \dot{\theta} \mathbf{l} + \dot{\varphi} \mathbf{m}, \quad (\text{I.5})$$

где использованы обозначения

$$\mathbf{l} = \mathbf{P}_3(\psi \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{l}_0, \quad \mathbf{m} = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{m}_0, \quad \mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{l}_0 \cdot \mathbf{m}_0 = 0.$$

I.1.2. Меры деформации полярной среды

Аналог уравнения Пуассона (I.4) для пространственной координаты q^i записывается следующим образом:

$$\partial_i \mathbf{P} = \Phi_i \times \mathbf{P}. \quad (\text{I.6})$$

Очевидно, что Φ_i характеризуют изменение ориентации тел-точек по пространственным координатам. Это векторы, аналогичные вектору угловой скорости, где вместо времени выступают координаты. В терминах углов Эйлера

$$\Phi_i = (\partial_i \psi) \mathbf{m}_0 + (\partial_i \theta) \mathbf{l} + (\partial_i \varphi) \mathbf{m}. \quad (\text{I.7})$$

Введем *меры деформации* полярной среды общего вида

$$\mathbf{A} = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{r}^i \otimes \Phi_i \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{I.8})$$

Тензор \mathbf{A} отвечает и за перемещения, и за повороты, тензор \mathbf{K} зависит только от угловой деформации. В дальнейшем будет показано, что эти тензоры естественно возникают при формулировке уравнения баланса энергии. Легко доказать, что

$$\mathbf{K} = -(\nabla \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T) \cdot \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{P})/2. \quad (\text{I.9})$$

Другое представление для \mathbf{K} можно получить, используя (I.7),

$$\mathbf{K} = (\nabla \psi \mathbf{m}_0 + \nabla \theta \mathbf{l} + \nabla \varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{I.10})$$

Тела-точки обобщенной среды Кельвина обладают осевой симметрией. В связи с этим, в отличие от упругой полярной среды общего вида, обобщенная среда Кельвина не должна реагировать ни на поворот тела-точки вокруг своей оси, ни на разность углов собственного вращения соседних тел-точек. Следовательно, меры деформации обобщенной среды Кельвина не должны зависеть ни от угла φ , ни от его градиента. Меры деформации обобщенной среды Кельвина, удовлетворяющие этим условиям, будут приведены далее.

1.1.3. Динамические характеристики полярной среды

Пусть $\rho_0(\mathbf{R}, t)$ — объемная плотность массы в отсчетной конфигурации. Тогда объемная плотность массы в актуальной конфигурации имеет вид

$$\rho(\mathbf{R}, t) = (\det \nabla \mathbf{R})^{-1} \rho_0(\mathbf{R}, t). \quad (\text{I.11})$$

Массовая плотность кинетической энергии определяется формулой

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (\text{I.12})$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{P}^T$ — массовая плотность тензора инерции в актуальной конфигурации; \mathbf{J}_0 — массовая плотность тензора инерции в отсчетной конфигурации. Поскольку тела-точки обладают осевой симметрией, то \mathbf{J} — трансверсально-изотропный тензор,

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}). \quad (\text{I.13})$$

Здесь λ и μ — массовые плотности осевого и экваториального моментов инерции, соответственно.

Массовая плотность количества движения определяется выражением

$$\mathcal{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{V}} = \mathbf{V}. \quad (\text{I.14})$$

Массовая плотность кинетического момента, вычисленного относительно начала инерциальной системы отсчета, определяется следующим образом:

$$\mathcal{K}_2 = \mathbf{R} \times \mathcal{K}_1 + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{I.15})$$

Первое слагаемое в формуле (I.15) называется плотностью момента количества движения, второе — плотностью собственного кинетического момента.

1.1.4. Тензоры напряжений. Законы динамики Эйлера

Введем следующие обозначения:

$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{R}, t)$ — тензор силовых напряжений Коши; $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$ — вектор напряжения, действующий на элементарной площадке поверхности; \mathbf{n} — нормаль к этой поверхности;

$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{R}, t)$ — тензор моментных напряжений, введенный аналогично тензору силовых напряжений; $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}$, где $\boldsymbol{\mu}_{(\mathbf{n})}$ — вектор моментного напряжения, действующий на элементарную поверхность с нормалью \mathbf{n} ;

$\mathbf{Q}(\mathbf{R}, t)$ — массовая плотность внешней силы;

$\mathbf{L}(\mathbf{R}, t)$ — массовая плотность внешнего момента.

Первый закон динамики Эйлера (уравнение баланса количества движения) для объема V , ограниченного гладкой поверхностью Σ , выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_1 dV = \int_{(V)} \rho \mathbf{Q} dV + \int_{\Sigma} \boldsymbol{\tau}_{(n)} d\Sigma. \quad (\text{I.16})$$

С помощью традиционных рассуждений уравнение (I.16) приводится к локальной форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{Q} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (\text{I.17})$$

Второй закон динамики Эйлера (уравнение баланса кинетического момента) для объема V , ограниченного поверхностью Σ , имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathcal{K}_2 dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{L} + \mathbf{R} \times \mathbf{Q}) dV + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\mu}_{(n)} + \mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}_{(n)}) d\Sigma. \quad (\text{I.18})$$

С помощью традиционных рассуждений уравнение (I.18) приводится к локальной форме

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{L} = \rho (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})'. \quad (\text{I.19})$$

Далее будет рассматриваться случай, когда плотности моментов инерции λ и $\boldsymbol{\mu}$ малы, угловая скорость собственного вращения $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ велика, так что плотность собственного кинетического момента $\lambda \dot{\boldsymbol{\phi}}$ конечна, а все остальные составляющие вектора собственного кинетического момента много меньше, чем $\lambda \dot{\boldsymbol{\phi}}$. С учетом сделанных предположений, уравнение (I.19) можно переписать в виде

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{L} = \rho (\lambda \dot{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{m} + \boldsymbol{\omega} \times \lambda \dot{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{m}). \quad (\text{I.20})$$

В дальнейшем будет принято еще одно предположение, а именно: среда не должна реагировать на поворот тела-точки вокруг своей оси и на разность углов собственного вращения соседних тел-точек. Будет показано, что следствием указанных предположений является так называемое “шестое уравнение равновесия”, которое может быть представлено в форме

$$(\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times}) \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (\text{I.21})$$

Кроме того, предполагается, что проекция внешнего момента $\rho \mathbf{L}$ на вектор \mathbf{m} равна нулю. Нетрудно видеть, что в этом случае $\ddot{\phi} = 0$ и уравнение (I.20) принимает вид

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{L} = \boldsymbol{\omega} \times \rho \lambda \dot{\phi} \mathbf{m}. \quad (\text{I.22})$$

Разумеется, уравнение (I.22) представляет собой приближенную форму уравнения баланса кинетического момента.

I.1.5. Нелинейные определяющие уравнения полярной среды

Пусть $\mathcal{U}(\mathbf{R}, \mathbf{t})$ — массовая плотность энергии деформации (внутренней энергии). Будем рассматривать только адиабатические процессы. В этом случае уравнение баланса энергии выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho (\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\tau}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \boldsymbol{\mu}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma. \quad (\text{I.23})$$

Воспользовавшись теоремой о дивергенции и законами динамики Эйлера (I.17), (I.19), получим локальную форму уравнения баланса энергии (I.23)

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V} - \boldsymbol{\tau}_{\times} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{I.24})$$

Уравнение (I.24) можно преобразовать к виду

$$\rho \dot{\mathcal{U}} = \boldsymbol{\tau}_*^T \cdot \dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\mu}_*^T \cdot \dot{\mathbf{K}}, \quad (\text{I.25})$$

где введены в рассмотрение энергетические тензоры силовых и моментных напряжений

$$\boldsymbol{\tau}_* = \nabla \mathbf{R}^{-T} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}, \quad \boldsymbol{\mu}_* = \nabla \mathbf{R}^{-T} \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{P}. \quad (\text{I.26})$$

Согласно уравнению (I.25), введенные ранее (см. формулы (I.8)) меры деформаций \mathbf{A} и \mathbf{K} естественны для описания деформации среды, так как на этих мерах деформации совершают работу энергетические тензоры напряжений.

Мы рассматриваем упругую среду, т. е. такую среду, плотность внутренней энергии которой зависит лишь от мер деформации в данный момент времени и в данной точке: $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{A}, \mathbf{K})$. Формулы (I.25), (I.26) позволяют получить корректные определяющие уравнения [67, 92] нелинейной упругой полярной среды

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \nabla \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^T, \quad (\text{I.27})$$

$$\boldsymbol{\mu} = \rho \nabla \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{K}} \cdot \mathbf{P}^T. \quad (\text{I.28})$$

Таким образом, задав внутреннюю энергию \mathcal{U} как функцию мер деформации \mathbf{A} и \mathbf{K} , можно получить конкретный вид определяющих уравнений.

I.1.6. Нелинейные определяющие уравнения обобщенной среды Кельвина

Поскольку тела-точки обобщенной среды Кельвина обладают осевой симметрией, эта среда не должна реагировать на поворот тела-точки вокруг своей оси и на разность углов собственного вращения соседних тел-точек. Таким образом, энергия деформации обобщенной среды Кельвина не является функцией общего вида от \mathbf{A} и \mathbf{K} , а подчиняется ограничениям

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \nabla \varphi} = \mathbf{0}. \quad (\text{I.29})$$

Можно найти *приведенные тензоры деформации*, такие, что, если \mathcal{U} зависит лишь от них, ограничения (I.29) удовлетворяются автоматически. Метод, используемый для нахождения приведенных тензоров деформации, был предложен в теории неклассических упругих оболочек [67]. Суть этого метода заключается в следующем.

На первом этапе находятся приведенные тензоры деформации, такие, что, если \mathcal{U} зависит лишь от них, первое уравнение системы (I.29) выполняется автоматически. Для этого первое уравнение (I.29) переписывается в виде

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{m}_0) + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{K}} \right)^T \cdot \cdot (\mathbf{K} \times \mathbf{m}_0) = 0. \quad (\text{I.30})$$

При переходе от (I.29) к (I.30) использовалась формула сложного дифференцирования и учитывалось, что $\partial_\varphi \mathbf{A} = \mathbf{A} \times \mathbf{m}_0$, $\partial_\varphi \mathbf{K} = \mathbf{K} \times \mathbf{m}_0$.

Характеристической системой для (I.30) будет

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \mathbf{A} \times \mathbf{m}_0, \quad \frac{d\mathbf{K}}{ds} = \mathbf{K} \times \mathbf{m}_0. \quad (\text{I.31})$$

Первые интегралы³ системы обыкновенных дифференциальных уравнений (I.31) суть решения уравнения в частных производных (I.30), и наоборот [70]. Таким образом, плотность энергии деформации \mathcal{U} есть функция первых интегралов (I.31). Это система обыкновенных дифференциальных урав-

³ Первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений по определению есть функция, производная которой, вычисленная с учетом системы, равна нулю.

нений 18-го порядка, имеющая 17 независимых скалярных первых интегралов [70]. Найдя эти интегралы, мы получим 17 независимых, не зависящих от φ функций от мер деформации \mathbf{A} и \mathbf{K} .

На втором этапе из системы приведенных тензоров деформации, найденных на первом этапе⁴, следует исключить меры деформации, зависящие от $\nabla\varphi$. В результате получится система приведенных тензоров деформации, таких, что, если \mathcal{U} зависит лишь от них, не только первое, но и второе уравнение системы (I.29) выполняется автоматически. Поскольку $\nabla\varphi$ — векторная величина, содержащая три независимые скалярные функции, исключая меры деформации, зависящие от $\nabla\varphi$, мы исключаем три скалярные функции от мер деформации \mathbf{A} и \mathbf{K} . Таким образом, система приведенных тензоров деформации должна содержать 14 независимых скалярных функций.

Далее приведены две из возможных систем приведенных тензоров деформации и соответствующих им нелинейных определяющих уравнений обобщенной среды Кельвина.

Вариант 1. Система тензоров деформации \mathfrak{A} :

$$\mathfrak{G} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{E})/2 = (\nabla\mathbf{R} \cdot \nabla\mathbf{R}^T - \mathbf{E})/2,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{A}^T = (\nabla\psi \otimes \mathbf{m}_0 + \nabla\theta \otimes \mathbf{l}) \cdot \mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \nabla\mathbf{R}^T, \quad (\text{I.32})$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_0 = \nabla\mathbf{R} \cdot \mathbf{m}.$$

В соотношениях (I.32) в качестве $\tilde{\mathbf{a}}$ можно выбрать как $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0$, так и $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{E} \times \mathbf{m}_0$. При этом соответствующие системы тензоров деформации обозначаются \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 . В тех случаях, когда имеется в виду любая из систем \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 , будем говорить о системе \mathfrak{A} .

Определяющие уравнения, которые получаются при использовании системы тензоров деформации \mathfrak{A} , имеют вид

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \nabla\mathbf{R}^T \cdot \left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathfrak{G}} \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\boldsymbol{\gamma}} \otimes \mathbf{m}_0 + \left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{F}} \right)^T \cdot \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \right) \cdot \mathbf{P}^T, \quad (\text{I.33})$$

$$\boldsymbol{\mu} = \rho \nabla\mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\mathbf{F}} \cdot \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{a}}^T \cdot \mathbf{P}^T, \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{G}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}).$$

⁴ При нахождении первых интегралов (I.31) считается, что $\nabla\varphi$ и φ являются независимыми в фиксированной точке континуума.

Вариант 2. Система тензоров деформации \mathfrak{B} :

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T - \mathbf{E})/2 = (\nabla \mathbf{R} \cdot \nabla \mathbf{R}^T - \mathbf{E})/2, \\ \Phi &= \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{K}^T = \sin^2 \theta \nabla \psi \otimes \nabla \psi + \nabla \theta \otimes \nabla \theta, \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_0 = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}, \quad \alpha = \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{m}_0,\end{aligned}\tag{I.34}$$

В соотношениях (I.34) $\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0$. Обратим внимание на то, что α представляет собой “перекрестный” вид деформации, определяемый произведением градиента поворота и градиента перемещений, тогда как остальные тензоры деформаций зависят либо от градиентов перемещений, либо от градиентов поворотов.

Определяющие уравнения, которые получаются при использовании системы тензоров деформации \mathfrak{B} , выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= \rho \nabla \mathbf{R}^T \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}} \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \otimes \mathbf{m}_0 + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{P}^T, \\ \boldsymbol{\mu} &= \rho \nabla \mathbf{R}^T \cdot \left(2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Phi} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{P}^T,\end{aligned}\tag{I.35}$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{G}, \Phi, \boldsymbol{\gamma}, \alpha).$$

Чтобы убедиться в том, что системы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} содержат все независимые интегралы (I.31), следует учесть тот факт, что число независимых интегралов есть ранг матрицы Якоби [70], состоящей из частных производных от компонент приведенных тензоров деформации по компонентам тензоров \mathbf{A} и \mathbf{K} . Вычисление показало, что в обоих случаях ранг матрицы Якоби равен 14, т. е. системы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} действительно содержат все независимые интегралы (I.31).

I.1.7. Ограничения на тензоры напряжений в обобщенной среде Кельвина

Плотность энергии деформации в обобщенной среде Кельвина должна удовлетворять ограничениям (I.29). Ранее эти ограничения записаны в терминах внутренней энергии и тензоров деформации. Получим формулировку данных ограничений в терминах тензоров напряжений.

Условие, что внутренние напряжения в обобщенной среде Кельвина не могут возникнуть вследствие наличия градиента угла собственного вращения частиц, может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \nabla \varphi} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (\text{I.36})$$

Предположение, что внутренняя энергия не зависит от угла φ , позволяет получить уравнение, аналогичное *шестому уравнению равновесия* в теории оболочек [92]:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = \boldsymbol{\mu}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{m}. \quad (\text{I.37})$$

Нетрудно показать, что следствием ограничений (I.36), (I.37) является уравнение (I.21), которое использовалось при выводе уравнения баланса кинетического момента (I.22).

Заметим, что если $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{G}, \Phi, \gamma)$, т. е. \mathcal{U} не зависит от α (см. формулы (I.34)), то

$$\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0, \quad \boldsymbol{\mu}^\top \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{m} = 0. \quad (\text{I.38})$$

В общем случае $\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} \neq 0$. Предполагая $\partial_\alpha \mathcal{U} = 0$, мы теряем зависимость внутренней энергии от одного из видов деформации. Такая зависимость может присутствовать в реальности, поскольку не запрещена фундаментальными принципами механики.

I.1.8. Линейная теория обобщенной среды Кельвина

Примем гипотезу натурального состояния, т. е. предположим, что в отсчетной конфигурации напряжения равны нулю.

Пусть углы нутации и перемещения малы

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), \quad \mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}. \quad (\text{I.39})$$

Получим линейную теорию из нелинейной. Будем использовать обозначение $[\cdot]_n$ для члена порядка малости n по \mathbf{u} , $\boldsymbol{\theta}$ в разложении какой-либо функции.

Согласно (I.8)

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_0 &= \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), & [\mathbf{K}]_0 &= \mathbf{0}, \\ [\mathbf{A}]_1 &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), & [\mathbf{K}]_1 &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

где введены в рассмотрение тензоры малых деформаций

$$\mathbf{g} = \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{f} = \nabla \boldsymbol{\theta}. \quad (\text{I.41})$$

Разложим в ряд по малым \mathbf{u} , $\boldsymbol{\theta}$ определяющие уравнения (I.33), полагая $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$,

$$[\boldsymbol{\tau}]_0 = \rho_0 \left(\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}} \right]_0 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_0 \otimes \mathbf{m}_0 \right), \quad [\boldsymbol{\mu}]_0 = \rho_0 \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_0 \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{I.42})$$

Принимая во внимание гипотезу натурального состояния и гипотезу независимости напряжений от скорости собственного вращения частиц, необходимо исходить из того, что

$$[\boldsymbol{\tau}]_0 = \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{\mu}]_0 = \mathbf{0}.$$

Отсюда можно заключить, что

$$\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}} \right]_0 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_0 \otimes \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}, \quad \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (\text{I.43})$$

Продолжим разложение в ряд (I.33), учитывая (I.41), (I.43),

$$[\boldsymbol{\tau}]_1 = \rho_0 \left(\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}} \right]_1 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathfrak{G}} \right]_0 \cdot \mathbf{g} + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_1 \otimes \mathbf{m}_0 + \left[\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\top} \right]_0 \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{a} \right), \quad (\text{I.44})$$

$$[\boldsymbol{\mu}]_1 = \rho_0 \left(\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_1 + \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_0 \cdot \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{a}.$$

Положив $\mathcal{U}(\mathfrak{G}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma})$ достаточно гладкой в окрестности отсчетной конфигурации и проделав соответствующие выкладки, получим линейные определяющие уравнения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= (\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{Y} \cdot \cdot \mathbf{f})^{\top}, \\ \boldsymbol{\mu} &= (\mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \cdot \cdot \mathbf{f})^{\top}. \end{aligned} \quad (\text{I.45})$$

Здесь $\mathbf{X} = X^{mnlk} \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_l$, $\mathbf{Y} = Y^{mnl\alpha} \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_l$ и $\mathbf{Z} = Z^{\alpha m \beta l} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_\beta \otimes \mathbf{r}_l$ — тензоры упругих постоянных:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathcal{G}^2} \right]_0 + \mathbf{m}_0 \otimes \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \mathcal{G} \partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_0 + \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{G}} \otimes \mathbf{m}_0 \right) \right]_0 + \\
&+ \mathbf{m}_0 \otimes \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \otimes \mathbf{m}_0 \right) \right]_0 + \mathbf{e}_0 \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{m}_0, \\
\mathbf{Y} &= \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{mn} \partial F_{k\alpha}} \right]_0 \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_k + \\
&+ \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \gamma_s \partial F_{k\alpha}} \right]_0 \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{r}_s \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{f}_0, \\
\mathbf{Z} &= \left[\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial F_{m\alpha} \partial F_{k\beta}} \right]_0 \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_\beta \otimes \mathbf{r}_k,
\end{aligned} \tag{I.46}$$

где \mathbf{e}_0 , \mathbf{f}_0 определяются соотношениями

$$\left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right]_0 = -\mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0, \quad \left[\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \right]_0 = \mathbf{f}_0 \otimes \mathbf{m}_0.$$

Последние соотношения могут быть получены из (I.43) с учетом симметричности тензора деформации Коши–Грина \mathcal{G} .

Линейное приближение для аналога *шестого уравнения равновесия* (I.37) совпадает с линейным вариантом (I.38), поскольку, по нашему предположению, в отсчетной конфигурации $\nabla \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$ и правая часть нелинейного варианта аналога *шестого уравнения равновесия* (I.37) равна нулю в линейном приближении. Итак, мы видим, что линеаризованные ограничения (I.37), (I.36) выглядят как

$$[\boldsymbol{\tau}_\times]_1 \cdot \mathbf{m}_0 = 0, \quad [\boldsymbol{\mu}]_1 \cdot \mathbf{m}_0 = 0. \tag{I.47}$$

Ограничения на тензоры упругих модулей, следующие из (I.47),

$$\mathbf{m}_0 \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \cdot \cdot \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{m}_0 \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{E}) \cdot \cdot \mathbf{Y} = 0. \tag{I.48}$$

Согласно (I.46) $\mathbf{X} = X^{mnkl} \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_l$, $\mathbf{Y} = Y^{mna\alpha} \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_l$, $\mathbf{Z} = Z^{\alpha m \beta l} \mathbf{r}_\alpha \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_\beta \otimes \mathbf{r}_l$ удовлетворяют (I.48), в \mathbf{X} и \mathbf{Z} первая и последняя пара индексов перестановочны, и нет каких-либо других ограничений на вид этих тензоров.

Приведенные ранее линейные определяющие уравнения можно записать иначе:

$$[\boldsymbol{\tau}]_1 = \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{g}}, \quad [\boldsymbol{\mu}]_1 = \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{f}}, \quad (\text{I.49})$$

где выражение для внутренней энергии в линейной теории имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{Y} \cdot \cdot \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{f} \cdot \cdot \mathbf{Z} \cdot \cdot \mathbf{f} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}^S \cdot \cdot \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{g}^S + \mathbf{g}^A \cdot \cdot \mathbf{U} \cdot \cdot \mathbf{g}^A) + \\ &+ \mathbf{g}^S \cdot \cdot \mathbf{W} \cdot \cdot \mathbf{g}^A + \mathbf{g}^S \cdot \cdot \mathbf{H} \cdot \cdot \mathbf{f} + \mathbf{g}^A \cdot \cdot \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{f} \cdot \cdot \mathbf{Z} \cdot \cdot \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

Здесь \mathbf{T} , \mathbf{U} , \mathbf{W} , \mathbf{H} , \mathbf{N} — тензоры упругих модулей, удобные для использования. Тензоры $\mathbf{Y} = \mathbf{H} + \mathbf{N}$, \mathbf{U} и \mathbf{W} ответственны за взаимосвязь между угловыми и трансляционными перемещениями.

Выражения (I.47)–(I.50) можно найти в [217], где предложена линейная теория среды Кельвина.

На первый взгляд может показаться удивительным, что в тензорах \mathbf{g} и \mathbf{f} в сумме 15 независимых компонент, в то время как в нелинейной теории существует лишь 14 независимых скалярных мер деформации, от которых может зависеть внутренняя энергия. Дело в том, что в силу ограничений (I.48) не все компоненты \mathbf{g} входят в выражение для \mathcal{U} , а именно не играет роли величина $\mathbf{g}_x \cdot \mathbf{m}_0$: в выражении (I.50) она умножается на нули. Можно было бы вместо \mathbf{g} использовать, допустим, \mathbf{g}^S и $\mathbf{g}^A \cdot \mathbf{m}_0$ и не ставить ограничений типа (I.48) на тензоры упругих модулей.

С формальной точки зрения можно использовать для получения линейных определяющих уравнений систему (I.35) точно так же, как и (I.33) или какие-либо другие нелинейные определяющие уравнения, полученные описанным методом для различных систем мер деформации. Однако процедуру линеаризации гораздо проще провести для (I.33), потому что линейные члены в разложении тензоров деформации \mathfrak{A} не равны нулю и можно совершить переход от (I.44) к (I.45), (I.46). Действительно, \mathcal{U} , вообще говоря, не обязана быть достаточно гладкой функцией своих аргументов. Так как линейные по \mathbf{u} , $\boldsymbol{\theta}$ члены разложения \mathfrak{G} , \mathbf{F} , $\boldsymbol{\gamma}$ не равны нулю, предположение о существовании второй производной $\mathcal{U}(\mathfrak{G}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma})$ по своим аргументам в окрестности отсчетной конфигурации равносильно предположению о том, что линейная теория имеет право на существование. Если использовать систему (I.35), то аналогичное предположение о гладкости $\mathcal{U}(\mathfrak{G}, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha})$ не даст возможности

получить линейную теорию общего вида, так как $[\Phi]_1 = \mathbf{0}$. Использование вместо Φ тензора $\sqrt{\Phi}$ также ничего не даст, поскольку последний не линеаризуем по θ : для малых θ можно записать $\sqrt{\Phi} \approx \sqrt{\nabla\theta \cdot \nabla\theta^T}$. Таким образом, для получения линейной теории при использовании системы (I.35) нельзя предполагать, что $\mathcal{U}(\mathcal{G}, \Phi, \gamma, \alpha)$ является достаточно гладкой функцией. В связи с этим теоретически получить линейную теорию из нелинейной можно при использовании любой независимой системы тензоров деформации, однако практически осуществить это удобно, используя систему (I.33) или иную систему тензоров деформации, линейные члены которых по \mathbf{u} , θ существуют и не равны нулю. Еще раз отметим, что в реальности линейная теория может быть несправедливой и предположения о гладкости \mathcal{U} по каким-либо аргументам, вообще говоря, обосновать невозможно.

Уравнение баланса количества движения в линейной теории выглядит так же, как (I.17). Чтобы записать уравнение баланса кинетического момента, необходимо линеаризовать правую часть уравнения (I.22). Тензоры силовых и моментных напряжений $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\mu}$ в левых частях уравнений динамики определяются формулами (I.45).

Линейные уравнения динамики обобщенной среды Кельвина в перемещениях выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{Y} \cdot \cdot \mathbf{f})^T + \rho \mathbf{Q} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{g} \cdot \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \cdot \cdot \mathbf{f})^T - (\mathbf{X} \cdot \cdot \mathbf{g} + \mathbf{Y} \cdot \cdot \mathbf{f})_{\times} + \rho \mathbf{L} &= \rho \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \lambda \dot{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{m}_0. \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

I.2. Ферромагнетики и обобщенная среда Кельвина

I.2.1. Некоторые сведения об упругих непроводящих ферромагнетиках в состоянии магнитного насыщения

Рассмотрим упругие непроводящие ферромагнетики в состоянии магнитного насыщения. Приведем некоторые факты, которые можно найти в [214–216].

Часто ферромагнитную сплошную среду условно разделяют на два взаимодействующие между собой континуума: континуум решетки — носитель деформации и спиновый континуум, описывающий распределение поля намагниченности. С каждой точкой материальной среды однозначно связан вектор намагниченности или спина, так что спиновый континуум неподвижен относительно континуума решетки. Спиновый континуум чувствителен только к моментным воздействиям, которые могут быть оказаны со стороны решет-

ки (спин-решеточное взаимодействие) или посредством внешнего магнитного поля.

Далее все фундаментальные законы записываются сразу для материального объема объединенного континуума. При этом используется приближение квазимагнитостатики.

Пусть в каждой точке ферромагнетика заданы перемещение \mathbf{u} и вектор массовой плотности *магнитного момента*⁵ \mathbf{S} . Состояние магнитного насыщения — это состояние ферромагнетика, в котором $\mathbf{S} = |\mathbf{S}|$ не меняется в пространстве и времени. *Намагниченность*⁶ представляет собой объемную плотность магнитного момента $\mathbf{M} = \rho\mathbf{S}$.

Объемная плотность собственного кинетического момента ферромагнетика равна

$$\rho\mathbf{S}/\gamma,$$

где γ — *гиромагнитное отношение*⁷ (постоянная величина).

Внешняя магнитная индукция в непроводящем ферромагнетике может создавать как массовую силу, так и массовый момент. Массовая плотность внешней силы, вызванной внешней магнитной индукцией \mathbf{B}^e , определяется формулой⁸ [213]

$$\mathbf{Q}^{\text{em}} = \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e. \quad (\text{I.52})$$

⁵ Магнитный момент (магнитный дипольный момент) — основная величина, характеризующая магнитные свойства вещества. В соответствии с классической теорией электромагнитных явлений, источниками магнетизма являются электрические макро- и микротокки. Элементарным источником магнетизма считается ток в замкнутом контуре. Магнитным моментом обладают элементарные частицы, атомные ядра, а также электронные оболочки атомов и молекул. Магнитный момент элементарных частиц, согласно представлениям квантовой механики, обусловлен существованием у них спина — собственного кинетического момента.

⁶ Намагниченность — векторная физическая величина, характеризующая магнитное состояние макроскопического физического тела. Определяется как магнитный момент, приходящийся на единицу объема вещества. Намагниченность вещества зависит от величины внешнего магнитного поля, свойств вещества и температуры.

⁷ Гиромагнитное отношение (магнитомеханическое отношение) — отношение дипольного магнитного момента элементарной частицы (или системы элементарных частиц) к ее кинетическому моменту. В классической теории гиромагнитное отношение является коэффициентом пропорциональности между угловой скоростью прецессии магнитного момента, помещенного во внешнее магнитное поле, и вектором магнитной индукции.

⁸ В настоящее время нет общепринятой точки зрения относительно того, как должна выглядеть формула для плотности внешней силы \mathbf{Q}^{em} . Некоторые авторы (см., например, [214, 220]) используют формулу $\mathbf{Q}^{\text{em}} = (\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e) \cdot \mathbf{S}$. По нашему мнению, формула (I.52) более достоверна.

Массовая плотность внешнего момента, вызванного магнитной индукцией \mathbf{B}^e , вычисляется по формуле [213]

$$\mathbf{L} = \mathbf{S} \times \mathbf{B}^e. \quad (\text{I.53})$$

*Обменное взаимодействие*⁹ (взаимодействие между спинами, зависящее от их относительного поворота) приводит к близкодействующему моментному взаимодействию. Поверхностная плотность момента, действующего на элементарную поверхность с нормалью \mathbf{n} ,

$$\mathbf{M}_{(\mathbf{n})}^{\text{exc}} = \mathbf{S} \times \mathbf{\Gamma}_{(\mathbf{n})}, \quad (\text{I.54})$$

где $\mathbf{\Gamma}_{(\mathbf{n})}$ — так называемая “контактная обменная сила”¹⁰. Введем в рассмотрение тензор обменных взаимодействий $\mathbf{\Gamma}$, определяемый уравнением

$$\mathbf{S} \times (\rho \mathbf{\Gamma}_{(\mathbf{n})} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Gamma}) = \mathbf{0}. \quad (\text{I.55})$$

Кроме момента, вызванного обменным взаимодействием, в ферромагнетике действуют силы упругости и *спин-решеточный момент*. Последний зависит от направления магнитного момента в данной точке относительно решетки.

⁹ Обменное взаимодействие в магнетизме считается специфически квантовомеханическим эффектом, который проявляется как связь между носителями магнетизма в атомных ядрах, атомах, молекулах, газах и конденсированных средах. Считается, что обменное взаимодействие имеет электростатическое происхождение. Обычно энергия электрического взаимодействия микрочастиц существенно больше энергии магнитного взаимодействия. В классической физике все магнитные свойства микро- и макросистем определяются только магнитными взаимодействиями микрочастиц. В то же время точки Кюри многих ферромагнетиков (т. е. температура, выше которой ферромагнетизм исчезает) порядка 10^2 – 10^3 К, а соответствующие этим температурам энергии в десятки или сотни раз больше любой возможной энергии чисто магнитной связи. Кроме того, опыты Я. Г. Дорфмана (1927) по определению отклонения β -частиц в спонтанно намагниченном ферромагнетике показали, что внутри ферромагнетика нет никакого эффективного поля магнитного происхождения. Эти факты позволили предположить, что ферромагнетизм по своему происхождению не является чисто магнитным эффектом, а обусловлен электрическими силами связи атомных носителей магнетизма в твердом теле.

¹⁰ Обменная сила — это сила межатомного взаимодействия, которая впервые была описана Вернером Гейзенбергом. Она обусловлена тем, что два соседних атома могут обмениваться внешними электронами и эти электроны начинают принадлежать одновременно обоим атомам. Считается, что обменная сила связывает атомы в кристаллической решетке металла и делает их магнитные поля сонаправленными. Упорядоченные магнитные поля соседних атомов взаимно усиливаются, в результате чего образуются магнитные домены.

Уравнение баланса количества движения для элементарного объема V непроводящего ферромагнетика, ограниченного поверхностью Σ , выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \mathbf{V} dV = \int_{(V)} \rho (\mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e + \mathbf{Q}^*) dV + \int_{\Sigma} \boldsymbol{\tau}_{(n)} d\Sigma, \quad (\text{I.56})$$

где \mathbf{Q}^* — сила механического происхождения. Локальная форма уравнения баланса количества движения имеет вид

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e + \rho \mathbf{Q}^* = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (\text{I.57})$$

Уравнение баланса кинетического момента выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho (\gamma^{-1} \mathbf{S} + \mathbf{R} \times \mathbf{V}) dV = \\ = \int_{(V)} \rho (\mathbf{S} \times \mathbf{B}^e + \mathbf{R} \times (\mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e) + \mathbf{R} \times \mathbf{Q}^*) dV + \\ + \int_{\Sigma} (\rho \mathbf{S} \times \boldsymbol{\Gamma}_{(n)} + \mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}_{(n)}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (\text{I.58})$$

С учетом соотношений (I.54), (I.55), локальная форма уравнения баланса кинетического момента принимает вид

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot (-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}) + \boldsymbol{\tau}_{\times} + \rho \mathbf{S} \times \mathbf{B}^e = \rho \gamma^{-1} \dot{\mathbf{S}}. \quad (\text{I.59})$$

Первый закон термодинамики (уравнение баланса энергии) для объединенного континуума в случае адиабатических процессов [214] имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + u^* \right) dV = \\ = \int_{(V)} \rho (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{B}}^e) dV + \int_{\Sigma} (\boldsymbol{\tau}_{(n)} \cdot \mathbf{V} + \rho \boldsymbol{\Gamma}_{(n)} \cdot \dot{\mathbf{S}}) d\Sigma, \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

где u^* — внутренняя энергия трансляционных деформаций.

Внутренняя энергия u определяется как

$$u = u^* + \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}^e. \quad (\text{I.61})$$

Внешняя сила \mathbf{Q} включает в себя как $\mathbf{Q}^{\text{em}} = \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{B}^e$, так и \mathbf{Q}^* .

1.2.2. Кинематические соотношения

Поскольку $\mathbf{S} = \text{const}$, для производной вектора \mathbf{S} можно использовать формулу

$$\dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}, \quad (\text{I.62})$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения вектора \mathbf{S} . Соответственно можно представить вектор \mathbf{S} в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}_0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}(\psi \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{P}_2(\theta \mathbf{l}_0) \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0), \quad (\text{I.63})$$

где \mathbf{m}_0 и \mathbf{l}_0 — единичные векторы, причем направление \mathbf{m}_0 совпадает с направлением вектора \mathbf{S}_0 и $\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{l}_0 = 0$. Очевидно, что направление вектора \mathbf{S} определяет тензор поворота \mathbf{P} с точностью до поворота \mathbf{P}_1 , так как \mathbf{S}_0 — неподвижный вектор тензора \mathbf{P}_1 , поэтому вектор угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{m}_0 + \dot{\theta} \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{l}_0 + \dot{\varphi} \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{m}_0, \quad (\text{I.64})$$

определяется с точностью до проекции на вектор \mathbf{m} .

1.2.3. Законы динамики для ферромагнетиков.

Сравнение с обобщенной средой Кельвина

Первый закон динамики Эйлера для упругих непроводящих ферромагнетиков (I.57) совпадает с соответствующим законом для обобщенной среды Кельвина (I.17). Необходимо лишь помнить, что внешняя массовая сила \mathbf{Q} включает в себя силы любого происхождения, в том числе электромагнитного.

Левая часть второго закона динамики Эйлера для упругих непроводящих ферромагнетиков (I.59), с точностью до замены $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$ на $\boldsymbol{\mu}$, совпадает с левой частью второго закона динамики Эйлера для обобщенной среды Кельвина (I.19) и его приближенного варианта (I.22). Замена $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$ на $\boldsymbol{\mu}$ оправдана в силу ограничения (I.36). Вектор внешнего момента \mathbf{L} для ферромагнетика связан с внешней магнитной индукцией соотношением (I.53).

Правые части уравнений (I.59) и (I.19), вообще говоря, различны. Однако мы рассматриваем частный случай обобщенной среды Кельвина, для которого можно установить аналогию.

Пусть плотности моментов инерции тел-точек обобщенной среды Кельвина λ , μ весьма малы, скорость собственного вращения $\dot{\varphi}$ велика, и внешний массовый момент не имеет проекции на ось тела-точки. В этом случае плотность кинетического момента с точностью до малой величины равна $\lambda \dot{\varphi} \mathbf{m}$, а

его производная по времени (правая часть уравнения баланса моментов) равна $\boldsymbol{\omega} \times \lambda \dot{\mathbf{m}}$, т. е. модуль кинетического момента постоянен с точностью до малой величины. В этом случае второй закон динамики Эйлера для обобщенной среды Кельвина, с точностью до малой величины, записывается в форме (I.22). Плотность кинетического момента в насыщенном ферромагнетике равна $\gamma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{m}$, и в правой части уравнения баланса моментов стоит $\gamma^{-1} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} \mathbf{m}$. Видно, что правые части уравнений (I.59) и (I.22) совпадают с точностью до замены $\lambda \dot{\phi}$ на \mathbf{S}/γ .

Таким образом, в среде Кельвина все, что связано с трансляционными перемещениями и симметричной частью тензора напряжений, отвечает за решеточный континуум, а все, что связано с динамическими слагаемыми в уравнении баланса кинетического момента, тензором моментных напряжений и несимметричной частью тензора напряжений, которая будет обсуждаться в дальнейшем, отвечает за спиновый континуум.

I.2.4. Аналогия уравнения баланса энергии для ферромагнетиков и обобщенной среды Кельвина

Преобразуем уравнение баланса энергии. Начнем с преобразования выражения для мощности контактной обменной силы $\rho \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})} \cdot \dot{\mathbf{S}}$. Воспользовавшись соотношениями (I.55), (I.62), получим

$$\rho \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})} \cdot \dot{\mathbf{S}} = \rho \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}) = (\rho \mathbf{S} \times \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{I.65})$$

Далее, продифференцировав выражение (I.61), выразим производную энергии трансляционных деформаций \mathcal{U}^* через производную внутренней энергии \mathcal{U}

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}}^* &= \dot{\mathcal{U}} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}) \cdot \mathcal{B}^e - \mathbf{S} \cdot \dot{\mathcal{B}}^e = \\ &= \dot{\mathcal{U}} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{S} \times \mathcal{B}^e) - \mathbf{S} \cdot \dot{\mathcal{B}}^e = \dot{\mathcal{U}} - \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} - \mathbf{S} \cdot \dot{\mathcal{B}}^e. \end{aligned} \quad (\text{I.66})$$

С учетом (I.65), (I.66), уравнение баланса энергии (I.60) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{U} \right) dV &= \int_{(V)} \rho (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV + \\ &+ \int_{\Sigma} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{n} \cdot (-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (\text{I.67})$$

Отсюда стандартным методом, учитывая уравнения баланса количества движения и кинетического момента (I.57), (I.59) и условие насыщения (I.62),

получаем локальную форму уравнения баланса энергии для упругого непроводящего ферромагнетика

$$\rho \dot{u} = \boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{V} - \boldsymbol{\tau}_x \cdot \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S})^T \cdot \cdot \overset{\circ}{\nabla} \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{I.68})$$

Сравнив (I.24) с (I.68), видим, что уравнение баланса энергии для полярной среды совпадает с уравнением баланса энергии для упругого ферромагнетика в состоянии магнитного насыщения с точностью до замены тензора моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ на $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$. Заметим, что $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$ и есть тензор моментных напряжений в ферромагнетике. Действительно,

$$\mathbf{M}^{\text{exc}} = \mathbf{S} \times \boldsymbol{\Gamma}_{(\mathbf{n})} = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}. \quad (\text{I.69})$$

В то же время тензор моментных напряжений в обобщенной среде Кельвина можно представить как $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$, поскольку независимость внутренней энергии от градиента угла собственного вращения тел-точек приводит к ограничению $\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}$ (см. (I.36)). Если \mathbf{m} — единичный вектор, сонаправленный с \mathbf{S} , это ограничение позволяет представить $\boldsymbol{\mu}$ в виде $-\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}$, например, если взять

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{m} / S. \quad (\text{I.70})$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ в обобщенной среде Кельвина трактуется как угловая скорость вращения тела-точки, а в ферромагнетике — как угловая скорость вращения вектора \mathbf{S} . Ферромагнетик “не замечает” поворот вектора намагниченности \mathbf{S} вокруг своей оси, так же как обобщенная среда Кельвина “не замечает” поворот тела-точки вокруг оси симметрии. В связи с этим для ферромагнетика, так же как и для обобщенной среды Кельвина, необходима независимость внутренней энергии от φ и $\nabla \varphi$.

Применив для ферромагнетика ту же процедуру, что и для обобщенной среды Кельвина, получим определяющие уравнения, которые в точности совпадают с определяющими уравнениями для обобщенной среды Кельвина. Так, в качестве системы мер деформации можно использовать систему \mathfrak{A} (см. формулы (I.32)), систему \mathfrak{B} (см. формулы (I.34)) или любую полную систему функций этих тензоров. Соответствующие определяющие уравнения приведены в подразделе I.1.6. Если более удобным представляется описывать ферромагнетик в терминах тензора обменных взаимодействий $\boldsymbol{\Gamma}$, то, зная тензор моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$, тензор $\boldsymbol{\Gamma}$ можно найти по формуле (I.70).

I.2.5. Меры деформации и определяющие уравнения ферромагнетиков. Сравнение с обобщенной средой Кельвина

Система мер деформации \mathfrak{A}

Сравним систему мер деформации (I.32) и соответствующие ей определяющие уравнения (I.33) с результатами работы [214]. При помощи принципа материальной объективности Ж. Можен устанавливает, что внутренняя энергия упругого непроводящего насыщенного ферромагнетика (при исключении эффектов, связанных с температурой) может зависеть лишь от тензоров

$$\mathfrak{g}, \quad \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T, \quad \nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T.$$

Заметим, что $\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T = \mathbf{S} \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}$, т. е. этот вектор совпадает с вектором $\mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}$ из системы (I.32). Тензор $\nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T$ совпадает с $\mathbf{S}\mathbf{F}$ из системы (I.32) при выборе $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \times \mathbf{m}_0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T &= \mathbf{S} \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{R}^T = \mathbf{S}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^T \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^T = \\ &= \mathbf{S}\mathbf{K} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{S}\mathbf{F}. \end{aligned}$$

Итак, данная система тензоров деформации совпадает с \mathfrak{A}_2 с точностью до постоянного множителя \mathbf{S} . Соответствующие ей определяющие уравнения (I.33) согласуются с приведенными в монографии [214], если принять ограничение

$$\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0,$$

как это делает Ж. Можен, предполагая, что спин-решеточное взаимодействие обеспечивается при помощи *локальной магнитной индукции*¹¹ \mathfrak{B}^L :

$$\boldsymbol{\tau}_\times = -\mathfrak{M}\mathfrak{B}^L \times \mathbf{m}, \quad \mathfrak{M} = |\mathfrak{M}|.$$

Заметим, однако, что данное ограничение не является следствием каких-либо фундаментальных законов. Для упругого непроводящего ферромагне-

¹¹ В настоящее время в литературе нет четкого и однозначного определения понятия локальной магнитной индукции. Многие авторы используют термин “локальная магнитная индукция” применительно к вектору магнитной индукции $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^e + \mathfrak{B}^L$, который складывается из внешней магнитной индукции и дополнительной магнитной индукции \mathfrak{B}^L , создаваемой магнитными доменами. При этом слово “локальная” просто подчеркивает, что речь идет о векторе магнитной индукции в данной точке сплошной среды и этот вектор магнитной индукции меняется при переходе от точки к точке. Мы, следуя работе [213], локальной магнитной индукцией будем называть вектор \mathfrak{B}^L , т. е. ту часть магнитной индукции, которая создается самой средой, т. е. континуумом решетки.

тика, как и для обобщенной среды Кельвина, должно выполняться ограничение (I.37) — аналог *шестого уравнения равновесия*. Однако обе части равенства не обязательно должны быть приравнены нулю, как это принимается в теории Можена.

В общем случае, согласно (I.33), векторный инвариант тензора напряжений вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\tau}_{\times} = \rho \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} \right) \times \mathbf{m} - \rho \left(\mathbf{P} \cdot \tilde{\mathbf{a}}^{\top} \cdot \mathbf{K}^{\top} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \nabla \mathbf{R} \right)_{\times}. \quad (\text{I.71})$$

Первое слагаемое в правой части (I.71) совпадает с $\boldsymbol{\tau}_{\times}$ в теории Можена. Соответствующее ему определяющее уравнение для локальной магнитной индукции выглядит следующим образом:

$$\mathbf{B}^{\text{L}} = -\mathcal{S}^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R}. \quad (\text{I.72})$$

Выражение (I.72) получено с учетом соотношения $\mathcal{M} = \rho \mathcal{S}$. Второе слагаемое в правой части (I.71) имеет в общем случае как ненулевую проекцию на \mathbf{m} , так и составляющую, ортогональную \mathbf{m} . Таким образом, выражение (I.72) для \mathbf{B}^{L} необходимо уточнить:

$$\mathbf{B}^{\text{L}} = -\mathcal{S}^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} + \mathbf{m} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}^{\top} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right). \quad (\text{I.73})$$

Воспользовавшись формулами (I.71), (I.73), получим следующее выражение для векторного инварианта тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}_{\times} = -\mathcal{M} \mathbf{B}^{\text{L}} \times \mathbf{m} - \rho \mathbf{m} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{A} \right) \cdot \cdot \mathbf{K}^{\top}. \quad (\text{I.74})$$

Добавочное, по сравнению с теорией Можена, слагаемое появляется, когда спиновые перемещения сложным образом перевязаны с упругими.

Вместо вектора локальной магнитной индукции \mathbf{B}^{L} , можно ввести в рассмотрение вектор эффективного действия среды на магнитный момент тела точки $\mathbf{B}_{*}^{\text{L}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{*}^{\text{L}} = & -\mathcal{S}^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \mathbf{m} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{K}^{\top} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right) + \\ & + \mathcal{S}^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{A} \right) \cdot \cdot \mathbf{K}^{\top} \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (\text{I.75})$$

Вектор \mathbf{B}_*^L , согласно установившимся в физике традициям, мы не можем назвать вектором локальной магнитной индукции, так как в нем присутствует составляющая, параллельная магнитному моменту тела-точки. Данная составляющая присутствует, если энергия среды зависит от перекрестного вида деформации α . Видимо, эту составляющую можно трактовать как момент, связанный с обменными силами, которые изменились в результате трансляционной деформации континуума решетки и в результате поворота магнитного момента тела-точки относительно континуума решетки. Упоминания об этой составляющей в литературе нам неизвестны. Однако она должна присутствовать в некоторых реальных магнитных материалах. Например, анализ энергии геликоидальных магнитных материалов, предложенной Дзялошинским [221], позволяет заключить, что эта энергия зависит от смешанного вида деформации α . Следовательно, параллельная магнитному моменту тела-точки \mathbf{S} составляющая в векторном инварианте тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}_\times$ не равна нулю.

Воспользовавшись формулами (I.71), (I.75), получим

$$\boldsymbol{\tau}_\times = -\mathcal{M}\mathbf{B}_*^L \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}). \quad (\text{I.76})$$

Согласно формуле (I.76) вектор \mathbf{B}_*^L полностью определяет векторный инвариант тензора напряжений, подобно тому как в теории Можена векторный инвариант тензора напряжений полностью определяется вектором локальной магнитной индукции \mathbf{B}^L .

Воспользовавшись выражением (I.70) и определяющим уравнением для тензора моментных напряжений (I.33), получим выражение для тензора обменных взаимодействий

$$\boldsymbol{\Gamma} = \rho S^{-1} \nabla \mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{F}} \cdot \nabla \mathbf{R} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}). \quad (\text{I.77})$$

Это выражение отличается от полученного в [214] множителем $\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$. Однако проекция тензора $\boldsymbol{\Gamma}$ на вектор \mathbf{m} справа остается неопределенной. Уравнение (I.77) соответствует выбору $\boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}$, как это принято и в [214].

Напомним, что в этом подразделе все соотношения получены для системы \mathfrak{A}_2 , однако, безусловно, можно написать и определяющие уравнения для \mathfrak{A}_1 . При этом выражения (I.73)–(I.77) несколько изменят вид.

Система мер деформации \mathfrak{B}

В монографии [214] в качестве основного варианта используется система тензоров деформации

$$\mathfrak{S}, \quad \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^\top, \quad \nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{S}^\top.$$

Сравним эту систему с системой (I.34). Как было показано ранее, вектор $\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{R}^T$ отличается от вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на постоянный множитель S . Последний тензор деформаций связан с Φ соотношением $\nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{S}^T = S^2 \Phi$. Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{S}^T &= S^2 \nabla \mathbf{m} \cdot \nabla \mathbf{m}^T = S^2 (\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^T \times \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^T \times \mathbf{m})^T = \\ &= -S^2 \mathbf{K} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{K}^T = \\ &= -S^2 \mathbf{K} \cdot (\mathbf{m}_0 \times \mathbf{a} \times \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{K}^T = S^2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{K}^T = S^2 \Phi. \end{aligned}$$

Таким образом, система тензоров деформации, предлагаемая в [214], — это система \mathfrak{G} , $S\boldsymbol{\gamma}$, $S^2\Phi$, отличающаяся от (I.34) тем, что в ней отсутствует вид деформации α .

Как и для обобщенной среды Кельвина, для упругих непроводящих ферромагнетиков можно использовать систему мер деформации \mathfrak{B} . При этом соответствующие определяющие уравнения задаются соотношениями (I.35). Исходя из этих соотношений нетрудно написать выражение для векторного инварианта тензора напряжений

$$\boldsymbol{\tau}_\times = \rho \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}^3 \Phi_3 \right) \times \mathbf{m} + \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} (\mathbf{R}^3 \times \Phi_3) \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \quad (\text{I.78})$$

Воспользовавшись (I.78), получим выражение для локальной магнитной индукции

$$\mathfrak{B}^L = -S^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \nabla \mathbf{R} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{m} \cdot \mathbf{R}^3 \Phi_3 \right). \quad (\text{I.79})$$

В соответствии с (I.78), (I.79) векторный инвариант тензора напряжений можно представить в виде

$$\boldsymbol{\tau}_\times = -\mathcal{M} \mathfrak{B}^L \times \mathbf{m} + \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} (\mathbf{R}^3 \times \Phi_3) \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \quad (\text{I.80})$$

Вектор эффективного действия среды на магнитный момент тела-точки \mathfrak{B}_*^L имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_*^L &= -S^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}^3) \Phi_3 \right) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - \\ &\quad - S^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} (\mathbf{R}^3 \times \Phi_3) \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (\text{I.81})$$

Векторный инвариант тензора напряжений связан с вектором \mathfrak{B}_*^L соотношением (I.76).

Воспользовавшись соотношениями (I.35), (I.70), получим формулу для вычисления тензора обменных взаимодействий

$$\Gamma = \rho S^{-1} \left(2 \nabla \mathbf{R}^T \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \Phi} \cdot \nabla \mathbf{m} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \alpha} \mathbf{R}^3 \otimes \mathbf{R}_3 \times \mathbf{m} \right). \quad (\text{I.82})$$

Определяющие уравнения, полученные в [214], следуют из (I.35), (I.79), (I.80), (I.82) при условии, что рассматривается частный случай $\partial_\alpha \mathcal{U} = 0$. Это условие равносильно предположению $\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0$, которое и принимается в [214]. Предположение $\partial_\alpha \mathcal{U} = 0$ исключает из рассмотрения возможную зависимость \mathcal{U} от некоего “перекрестного” вида деформации α , определяемого произведением градиента поворота и градиента перемещений. В реальных материалах зависимость внутренней энергии от α может иметь место. Представляется, что учет такой зависимости может оказаться важным при рассмотрении магнитоакустических явлений.

Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц [220] указывают, что для материалов с геликоидальной магнитной структурой представление для \mathcal{U} может включать член

$$\mathbf{m} \cdot (\overset{\circ}{\nabla} \times \mathbf{m}) = \text{tr} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{-1}).$$

Учитывать подобный член во внутренней энергии предложил И. Е. Дзялошинский [221]. Чтобы обеспечить $\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0$ (как требует Ж. Можен), необходимо положить $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{G}, \Phi, \gamma)$. В связи с этим в материале, энергия которого зависит не только от $\mathcal{G}, \Phi, \gamma$, но и от $\text{tr} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^{-1})$, условие $\boldsymbol{\tau}_\times \cdot \mathbf{m} = 0$, вообще говоря, не должно выполняться.

В работе [222] также указывается, что для определенного класса легкоосных ферромагнетиков в энергии содержатся члены, линейные по пространственной производной намагниченности. Они могут, например, иметь вид

$$c \mathcal{M}^2 (\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{m} \overset{\circ}{\nabla} \cdot (\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{a} \cdot \overset{\circ}{\nabla} (\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{m})).$$

Наличие членов подобного вида приводит к возможности существования устойчивых магнитных вихрей в материале. Таким образом, в материалах с ненулевым градиентом вектора намагниченности в натуральном состоянии \mathcal{U} может зависеть от “перекрестного” вида деформации.

1.2.6. Уравнения квазимагнитостатики

Для того чтобы полученная ранее система уравнений стала замкнутой, ее следует дополнить уравнениями квазимагнитостатики

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= 0, & \overset{\circ}{\nabla} \times \mathcal{H} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathcal{H} + \mathcal{M}), & \overset{\circ}{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon} &= -\dot{\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (\text{I.83})$$

Здесь \mathbf{B} — вектор магнитной индукции, \mathcal{H} — вектор напряженности магнитного поля, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор напряженности электрического поля, μ_0 — магнитная постоянная.

Вектор магнитной индукции \mathbf{B} включает в себя внешнюю магнитную индукцию \mathbf{B}^e и дополнительную магнитную индукцию, создаваемую магнитными доменами. Согласно работе [213],

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^e + \mathbf{B}^L.$$

Построенная теория справедлива для непроводящих ферромагнетиков. Существенным ограничением является требование отсутствия внешних электрических полей. Иными словами, в данной теории допустимы только электрические поля, индуцированные магнитными; внешнего потенциала быть не должно. Это связано с тем, что при наличии внешнего электрического поля необходимо учитывать намагниченность, возникающую в результате поляризации. В случае, когда электрическое поле индуцировано магнитным, намагниченность, индуцированная поляризацией или током, мала по сравнению с намагниченностью, возникшей в результате воздействия магнитных полей.

1.2.7. Линейная теория ферромагнетиков

Как было показано ранее, получать линейные уравнения удобнее из системы \mathfrak{A} , чем из \mathfrak{B} , поскольку для малых $\boldsymbol{\theta}$ тензор Φ является малой величиной второго порядка:

$$\Phi \approx \nabla \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla \boldsymbol{\theta}^T.$$

Ж. Можен следует иным путем, и его результаты отличаются от (I.45). Поскольку в [214] используется система \mathfrak{B} (с исключенным $\boldsymbol{\alpha}$), то в выражении для энергии члены более высокого порядка малости, чем квадратичные, сохраняются, чтобы учесть перевязанность спиновых и упругих перемещений

(магнитострикционную и обменно-стрикционную энергию¹²). Это представляется не вполне корректным. При таком подходе тензор \mathbf{Y} неявно полагается равным нулю, а тензор \mathbf{Z} , отвечающий за обменную энергию, имеет весьма специальный вид.

Для различных реальных материалов, вероятно, может быть справедлив как тот, так и иной подход, поскольку предположение о справедливости линейной теории нельзя обосновать. Однако будем исходить из этого предположения.

Соотношения линейной теории обобщенной среды Кельвина приведены в подразделе I.1.8. Они дают возможность в наиболее общей для линейной теории форме учесть взаимосвязь магнитной и упругой подсистем. Вектор $\boldsymbol{\theta}$ соответствует малому вектору поворота спина, \mathbf{u} — малое трансляционное перемещение.

Смысл тензоров постоянных материала в выражении (I.50) для ферромагнетиков может быть интерпретирован следующим образом: \mathbf{T} — гуковский тензор упругости; \mathbf{U} связан с константами магнитной восприимчивости¹³ (отвечает за магнитокристаллическое взаимодействие); \mathbf{W} — тензор пьезомагнитных постоянных¹⁴; \mathbf{H} — тензор обменно-стрикционных постоянных; \mathbf{N} отвечает за слагаемое, входящее в обменную энергию, которое можно было бы назвать обменно-магнитокристаллической энергией; наконец, \mathbf{Z} — тензор ферромагнитных обменных постоянных материала. В теории Може-

¹² Магнитострикция — изменение формы и размеров тела при его намагничивании. Это явление было открыто Дж. Джоулем в 1842 г. В ферро- и ферримагнетиках (Fe, Ni, Co и др.) магнитострикция достигает значительной величины. В антиферро-, пара- и диамагнетиках магнитострикция, как правило, очень мала. Обратное явление — изменение намагниченности ферромагнетика при деформации — называется магнитоупругим эффектом. В теории магнетизма магнитострикцию рассматривают как результат проявления двух основных типов взаимодействий в ферромагнетиках: электрического обменного взаимодействия и магнитного взаимодействия.

¹³ Магнитная восприимчивость определяется как отношение намагниченности единицы объема вещества к напряженности намагничивающего магнитного поля. Реальные объекты могут обладать как положительными, так и отрицательными магнитными восприимчивостями. Примером веществ с отрицательной восприимчивостью могут служить диамагнетики. Положительной восприимчивостью обладают, например, парамагнетики и ферромагнетики.

¹⁴ Пьезомагнитный эффект — это возникновение в веществе намагниченности под действием внешнего давления. Пьезомагнитный эффект может существовать только в веществах, обладающих антиферромагнитной магнитной структурой. Этот эффект принципиально невозможен в пара- и диамагнетиках. Пьезомагнитный эффект возникает тогда, когда под действием приложенного давления магнитная симметрия антиферромагнитного кристалла изменяется таким образом, что в нем появляется слабый ферромагнетизм.

на обменно-магнитокристаллическая и обменно-стрикционная энергия имеют третий порядок малости, а тензор обменных постоянных имеет специальный вид $\mathbf{Z} = z^{mn}(\mathbf{r}_1 \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_1 \otimes \mathbf{r}_n + \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_m \otimes \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_n)$. Заметим, что тензоры \mathbf{H} , \mathbf{N} , \mathbf{U} , \mathbf{W} ответственны за взаимосвязь трансляционных и спиновых волн. Предлагаемый подход позволяет учесть эту взаимосвязь более полно в линейной теории.

Линейные уравнения динамики совпадают с (I.51). Рассмотрим случай, когда внешняя магнитная индукция \mathbf{B}^e может быть представлена в виде $\mathbf{B}^e = \mathcal{B}_0 \mathbf{m}_0 + \tilde{\mathbf{B}}$, где $\tilde{\mathbf{B}}$ — малая величина; $\tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{m}_0 = 0$. Тогда внешний момент \mathbf{L} может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{S} \mathbf{m} \times \mathbf{B}^e = \mathbf{S}(\mathbf{m}_0 + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{m}_0) \times (\mathcal{B}_0 \mathbf{m}_0 + \tilde{\mathbf{B}}) + O(\boldsymbol{\theta} \cdot \tilde{\mathbf{B}}) = \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{m}_0 \times \tilde{\mathbf{B}} - \mathcal{B}_0 \boldsymbol{\theta}) + O(\boldsymbol{\theta} \cdot \tilde{\mathbf{B}}). \end{aligned} \quad (\text{I.84})$$

Уравнения динамики (I.51) с учетом (I.41), (I.84), принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{X} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) + \mathbf{Y} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T + \rho \mathbf{Q} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ \nabla \cdot ((\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})^T - \\ - (\mathbf{X} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) + \mathbf{Y} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\theta})_{\times} + \\ + \mathcal{M} \mathbf{m}_0 \times \tilde{\mathbf{B}} - \mathcal{M} \mathcal{B}_0 \boldsymbol{\theta} &= \gamma^{-1} \mathcal{M} \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}_0. \end{aligned} \quad (\text{I.85})$$

В данном случае \mathcal{B}_0 играет роль “часовой пружины”. Если внешняя магнитная индукция не изменяется по пространственным координатам, то она не дает вклада во внешнюю массовую силу \mathbf{Q} .

Отметим, что корректное описание взаимосвязи спиновой и упругой подсистем очень важно для описания магнитоакустического резонанса. Предлагаемая теория позволяет учесть эту взаимосвязь наиболее общим образом, что дает возможность предсказать больше принципиальных возможностей существования магнитоакустического резонанса в материалах с низкой симметрией [219].

Заключение

Построена нелинейная теория обобщенной среды Кельвина. Получены различные варианты полных систем мер деформации, от которых может зависеть плотность внутренней энергии среды. Любая из этих систем содержит

14 независимых функций. Получены соответствующие нелинейные определяющие уравнения и уравнения динамики среды. Особо рассмотрен случай быстрого собственного вращения частиц.

Установлена точная аналогия между основными уравнениями упругих непроводящих ферромагнетиков в состоянии магнитного насыщения и уравнениями рассматриваемой среды для случая быстрого собственного вращения частиц. Показано, что в этом случае математическая форма законов динамики и определяющих уравнений обобщенной среды Кельвина и упругих ферромагнетиков в состоянии магнитного насыщения совпадают. При этом все угловые характеристики соответствуют магнитной подсистеме, а трансляционные — упругой подсистеме. Взаимосвязь угловых и трансляционных перемещений в обобщенной среде Кельвина соответствует магнитоакустическим явлениям в ферромагнетиках.

Существует следующее соответствие характеристик обобщенной среды Кельвина и упругой непроводящей ферромагнитной сплошной среды в состоянии магнитного насыщения.

Единичный вектор \mathbf{m} , направленный по оси симметрии тела-точки в актуальной конфигурации, соответствует единичному вектору, направленному по оси магнитного момента \mathbf{S} в ферромагнетике.

Кинетический момент тела-точки связан с магнитным моментом соотношением

$$\rho\lambda\dot{\phi}\mathbf{m} \longleftrightarrow \rho\mathbf{S}/\gamma,$$

где λ — плотность аксиального момента инерции; $\dot{\phi}$ — угловая скорость собственного вращения тела-точки; \mathbf{S} — магнитный момент; γ — гиромагнитное отношение; $\mathbf{S} = |\mathbf{S}|$ — константа материала в состоянии насыщения.

Плотность внешнего массового момента \mathbf{L} связана в ферромагнетике с внешней магнитной индукцией \mathbf{B}^e

$$\mathbf{L} \longleftrightarrow \mathbf{B}^e \times \mathbf{S}.$$

Тензор моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ в обобщенной среде Кельвина, зависящий от относительного поворота тел-точек, связан с тензором обменных взаимодействий $\boldsymbol{\Gamma}$ в ферромагнетике

$$\boldsymbol{\mu} \longleftrightarrow -\boldsymbol{\Gamma} \times \mathbf{S}.$$

Спин-решеточное взаимодействие в ферромагнетике соответствует в обобщенной среде Кельвина моменту, зависящему только от ориентации рассматриваемой частицы (как если бы все остальные тела-точки были материальными точками), т. е. оно связано с векторным инвариантом тензора силовых

напряжений $\boldsymbol{\tau}_\times$. При выборе системы тензоров деформации \mathfrak{B} в частном случае, когда \mathcal{U} не зависит от $\boldsymbol{\alpha}$, можно представить

$$\boldsymbol{\tau}_\times = -\mathcal{M}\mathfrak{B}^L \times \mathbf{m},$$

где \mathfrak{B}^L — локальная магнитная индукция в ферромагнетике, определяемая формулой (I.79).

Используемый способ построения определяющих уравнений позволяет в наиболее общей форме учесть взаимодействие магнитной и упругой подсистем как в общем нелинейном случае, так и для малых углов нутации. Для нелинейного случая необходимо учитывать зависимость внутренней энергии от меры деформации, определяемой и градиентом поворота, и градиентом перемещений. Для линейного (по углу нутации и перемещениям) случая необходимо учитывать “перекрестный” член в энергии деформации, зависящий от произведения двух разных мер деформации — градиента поворота и градиента перемещений.