

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ В ТРЕХМЕРНЫХ СРЕДАХ И ОБОЛОЧКАХ ПОСРЕДСТВОМ СРЕДЫ КОССЕРА С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Иванова Е. А.

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, <http://www.spbstu.ru>

195251 Санкт-Петербург, Российская Федерация

Институт проблем машиноведения, Российская академия наук

199178 Санкт-Петербург, Российская Федерация

Поступила 08.04.2013

Представлена действительным членом РАЕН В.И. Ерофеевым 12.04.2013

В механике сплошных сред температура считается величиной, измеряемой термометром, и какая-либо механическая интерпретация температуры отсутствует. В кинетической теории и статистической физике температура считается средней кинетической энергией хаотического движения молекул. Концепция теплового движения не противоречит континуальной механике. Однако, эту механическую модель крайне проблематично использовать для вывода уравнений механики сплошных сред, так как хаотическое движение молекул в механике сплошных сред не учитывается, а температура связывается с внутренней энергией. Наша цель заключается в том, чтобы предложить механическую интерпретацию температуры, которая могла бы стать основой для описания тепловых процессов в рамках механики сплошных сред и посредством методов механики сплошных сред. Основная идея состоит в том, чтобы ввести в рассмотрение континуум Коссера с внутренней структурой и дополнительными вращательными степенями свободы. Мы полагаем, что характеристики вращательных движений внутренней структуры и моментных взаимодействий, связанных с внутренней структурой, можно рассматривать как аналоги температуры и других термодинамических величин, при условии что математическое описание предложенной модели сводится к известным уравнениям термоупругости.

Ключевые слова: механика сплошных сред, теория оболочек, континуум Коссера, среды с микроструктурой, термоупругость

PACS: 46.05.+B, 46.25.CC, 46.25.HF, 46.70.-P, 46.70.DE, 65.40.BA, 65.40.DE, 65.40.G-, 65.40.GR, 65.40.GD

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ (98)
 2. РАЗЛИЧНЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА ПРИРОДУ ТЕПЛОТЫ: КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР (100)
 3. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ПРЕДЛАГАЕМОГО ПОДХОДА (101)
 4. КОНТИНУУМ КОССЕРА КАК МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ (101)
 5. КОНТИНУУМ ОДНОРОТНЫХ ГИРОСТАТОВ И МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ (102)
 6. СТРУКТУРА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕНЗОРОВ (104)
 7. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ (105)
 8. КОНТИНУУМ ДВУХРОТНЫХ ГИРОСТАТОВ И ТЕОРИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК 12-ГО ПОРЯДКА (105)
 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ (107)
- ЛИТЕРАТУРА (107)

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время термодинамика охватывает широчайший круг вопросов, включая газовую динамику, термоупругость, термовязкоупругость, термоэлектрические и термомагнитные эффекты, фазовые переходы и химические реакции. Вместе с тем, она представляет собой совокупность не связанных между собой областей науки, различающихся как трактовкой основных понятий, так и применяемыми математическими методами. Говоря о математических методах нельзя не упомянуть теорию термодинамических потенциалов,

лежащую в основе химической и электрохимической термодинамики, механику сплошной среды, в рамках которой разработаны модели термоупругих и термовязкоупругих тел, методы динамики кристаллической решетки, на которых базируется описание явлений переноса в твердых телах, классическую и квантовую статистику.

В неравновесной термодинамике, как и в механике сплошных сред, для описания тепловых процессов используется чисто феноменологический подход. Подробное описание методов неравновесной термодинамики и возможностей ее использования применительно к решению различных задач можно найти в работах создателей этой науки И. Пригожина [1, 2] и С. Р. Де Грота [3]. Здесь мы ограничимся цитатой из работы [3] (с. 13), которая хорошо отражает суть данной науки: “За последние десять лет макроскопическая теория необратимых процессов превратилась в законченную теорию. Она базируется на двух основаниях, которые были установлены раньше, чем была сформулирована сама теория. Во-первых, введение неравновесных термодинамических функций дало возможность установить понятия потока энтропии и возникновения энтропии, а затем на основании этих понятий составить уравнение баланса энтропии. Во-вторых, термодинамика необратимых процессов базируется

на соотношениях взаимности Онзагера, т.е. на макроскопических равенствах, которые являются следствием микроскопической обратимости.” Следует отметить, что утверждение о законченности относится исключительно к линейной теории. Что касается нелинейной неравновесной термодинамики (см., например, [1, 2, 4, 5]), то ее никак нельзя назвать законченной теорией. Отдельного упоминания заслуживает работа [6], в которой сочетаются макроскопический и статистический подходы, – это явление достаточно редкое. Следует отметить также работу [7], посвященную так называемой расширенной неравновесной термодинамике, в основе которой лежит обобщенный закон Фурье, содержащий производную по времени от теплового потока. Методы неравновесной термодинамики и методы механики сплошной среды имеют много общего. Однако исторически сложилось так, что эти две науки развивались независимо друг от друга. В рамках механики сплошной среды существуют различные подходы к описанию термодинамических процессов. Как правило, используется метод Трусделла [8, 9], основанный на совместном использовании первого и второго законов термодинамики. Суть этого метода заключается в следующем. Второй закон термодинамики записывается в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема. С помощью уравнения баланса энергии из неравенства Клаузиуса–Дюгема исключается часть тепловых слагаемых, а именно скорость подвода тепла непосредственно в объем среды и дивергенция вектора теплового потока. В результате получается так называемое приведенное неравенство диссипации, которое должно выполняться при всех мыслимых процессах, протекающих в среде. Так как в приведенное неравенство диссипации не входят ни внешние механические воздействия, ни подвод тепла от внешнего источника, это неравенство налагает ограничения на определяющие уравнения среды. Применение метода Трусделла при построении различных термомеханических моделей можно найти, например, в работах [10, 11, 12, 13]. Существенное развитие метод Трусделла получил в работах П. А. Жилина [14, 15, 16], который в итоге полностью отказался от использования неравенства Клаузиуса–Дюгема и предложил принципиально новый метод [17, 18, 19]. Более близкими к неравновесной термодинамике являются подходы, развиваемые в работах [20, 21, 22, 23]. Подход, основанный на сочетании неравновесной термодинамики и метода Трусделла развивается в работах И. Мюллера [см. 24, 25], а также в работах П. Жермена [см., например, 26]. Обсуждение основных понятий и фундаментальных принципов термодинамики можно найти в работах [27, 28]. Задача описания термомеханики оболочек является более сложной по сравнению с задачей описания термомеханики трехмерных тел. Оболочка может

быть поверхностью раздела двух сред, обладающих разными температурами. Поэтому при описании термомеханики оболочек важно учесть изменение температуры по толщине оболочки. Поскольку математическая модель оболочки представляет собой поверхность, т.е. двумерный объект, для того чтобы учесть изменение температуры по толщине, в каждой точке оболочки необходимо ввести по крайней мере две температуры [16, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Именно в этом заключается сложность описания тепловых эффектов в оболочках по сравнению с трехмерными средами, где достаточно одного температурного поля.

Следует отметить, что в отличие от кинетической теории и статистической физики, где температура считается средней кинетической энергией хаотического движения молекул, а энтропии приписывается вероятностный характер, в неравновесной термодинамике и механике сплошных сред отсутствует какое-либо истолкование природы и смысла термодинамических величин. Концепция температуры как теплового движения молекул и вероятностная трактовка энтропии не противоречат неравновесной термодинамике и континуальной механике, однако подобные представления весьма проблематично использовать при выводе уравнений баланса и практически невозможно использовать при выводе уравнений, описывающих процессы переноса. Отсутствие какой-либо механической интерпретации термодинамических величин существенно уменьшает возможность использования интуитивных представлений. Это почти не влияет на линейные постановки задач, однако затрудняет развитие нелинейных теорий. Оценивая по достоинству достижения статистической физики в области термодинамики газов и кристаллических тел, нельзя не отметить, что исследование тепловых явлений в жидкостях и аморфных телах, а также решение связанных задач термоупругости и термовязкоупругости на сегодняшний день все еще остается за пределами возможностей этой науки. Кроме того, трактовки, принятые в кинетической теории и статистической физике, в ряде случаев вызывают вопросы. Один вопрос – как с точки зрения кинетической теории объяснить тепловое излучение, которое распространяется в вакууме на огромные расстояния? Принято считать, что тепловое излучение – это электромагнитное излучение, которое, воздействуя на тело, приводит его атомы или молекулы в тепловое движение. Но почему, независимо от размеров атомов, жесткостей межатомных связей и структуры вещества, это происходит при частотах, лежащих в инфракрасном диапазоне, и не происходит при других частотах? Другой вопрос – как с точки зрения кинетической теории определить температуру нанобъектов? Если объект состоит из нескольких десятков атомов, как можно разделить “механические” и “тепловые” движения?

Перечисленные выше трудности, связанные с использованием общепринятой трактовки

термодинамических величин, приводят нас к вопросу: что такое температура как средняя кинетическая энергия? Это отражение физической реальности или просто математическая модель? Прежде всего, уместно процитировать замечание Дж. Максвелла, сделанное в отношении созданной им кинетической теории (см. [36], с. 187): "... Если окажется, что свойства подобной системы тел соответствуют свойствам газов, то этим будет создана важная физическая аналогия, которая может привести к более правильному познанию свойств материи. Если опыты над газами не находятся в согласии с гипотезой, лежащей в основе этих теорем, тогда наша теория, хотя она и находится в согласии с самой собой, должна быть признана неспособной объяснить явления в газах. В обоих случаях необходимо рассмотреть те следствия, которые вытекают из этой гипотезы." То же самое можно сказать и в отношении любой другой теории. Только оценка вытекающих из данной теории следствий на предмет их соответствия экспериментальным данным позволяет судить о том, имеет ли она право на существование. Далее, для ответа на вопрос, является ли представление о температуре как о средней кинетической энергии отражением физической реальности, следует обратиться к экспериментальным данным. Прежде всего заметим, что температуру невозможно измерить непосредственно. Для того чтобы измерить температуру, мы должны выбрать физическую величину, изменение которой является признаком изменения температуры, и измерить эту физическую величину. Затем, используя формулу, связывающую изменение выбранной физической величины с изменением температуры, и имея в виду реперные точки температурной шкалы, мы должны вычислить температуру. Таким образом, когда мы измеряем температуру, мы не измеряем среднюю кинетическую энергию хаотического движения молекул. Следовательно, интерпретация температуры, принятая в кинетической теории, – это математическая модель и ничего более. Поэтому любая альтернативная модель тепловых процессов, математическое описание которой сводится к известным уравнениям, имеет право на существование.

Наша цель заключается в том, чтобы предложить механическую интерпретацию температуры и других термодинамических величин, которая могла бы стать основой для описания тепловых процессов в рамках механики сплошных сред и посредством методов механики сплошных сред. Предлагаемая модель базируется на континууме Коссера с внутренней структурой и дополнительными вращательными степенями свободы.

2. РАЗЛИЧНЫЕ ВЗГЛЯДЫ НА ПРИРОДУ ТЕПЛОТЫ: КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Со времен античности существовали разные точки зрения на природу теплоты [37, 38, 39, 40]. В соответствии с одной точкой зрения, теплота – это состояние тела. Именно так рассматривали

тепло Роджер Бэкон (1214–1292) и Иоганн Кеплер (1571–1630). В соответствии с другой точкой зрения, теплота – это субстанция. Галилео Галилей (1564–1642) сформулировал гипотезу о существовании отвечающего за теплоту невесомого флюида, рассеянного по всей материи и способного проникать в тела. Впоследствии этот флюид получил название “теплород” или “калорическая жидкость”. Считалось, что теплород, соединяясь с твердыми телами может превращать их в жидкие, а соединяясь с жидкими телами, может превращать их в газообразные. Теорию теплорода поддерживали Антуан Лоран де Лавуазье (1743–1794), Пьер Симон де Лаплас (1749–1827) и Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830). Успех и популярность теории теплорода в XVII–XVIII веках был обусловлен тем, что предсказания этой теории подтверждались проводимыми в то время экспериментами. Теория теплорода была признана ошибочной только в XIX веке, когда благодаря работам Майера, Джоуля, Гельмгольца, Кельвина, Клаузиуса и Гиббса окончательно утвердился принцип эквивалентности теплоты и энергии и господствовавший ранее закон сохранения теплоты был заменен уравнением баланса энергии (первым началом термодинамики).

Роберт Бойль (1627–1691) предположил, что теплота связана с движением молекул. Фактически, его предположение явилось началом кинетической теории, которая получила дальнейшее развитие в работах Рудольфа Клаузиуса (1822–1888) и Джеймса Клерка Максвелла (1831–1879). В 1857 году Клаузиус вывел основную формулу кинетической теории газов, согласно которой давление газа равно двум третям средней кинетической энергии всех молекул в единице объема. Сопоставление этой формулы для давления с уравнением состояния идеального газа привело к идее отождествления температуры со средней кинетической энергией поступательного движения. В 1859 году Максвелл предложил формулу для распределения молекул газа по скоростям, названную впоследствии его именем. В 1866 году Людвиг Больцман (1844–1906) обобщил распределение Максвелла на случай, когда на частицы газа действуют внешние силы. Предложенная им формула впоследствии получила название распределения Максвелла-Больцмана. Началом нового этапа в развитии статистической термодинамики послужили работы Джозайи Уилларда Гиббса (1839–1903). В отличие от Максвелла и Больцмана, взявших за исходный пункт пространство скоростей частиц, Гиббс построил статистическую механику исходя из концепции ансамблей. С математической точки зрения использование вероятностного подхода было существенным продвижением вперед. Казалось бы, кинетическая теория теплоты должна была полностью заметить собой теорию теплорода. Однако, несмотря на бурное развитие кинетической теории в XIX–XX веках, этого не произошло. В

классической термодинамике на смену теории теплорода пришло полное отсутствие какого бы то ни было истолкования природы теплоты.

Кроме теории теплорода и кинетической теории газа выдающимися учеными прошлого были предложены и другие механические модели тепловых процессов. Некоторые из них имеют отношение к предмету нашего исследования, и мы кратко их обсудим. Леонард Эйлер (1707–1783) связывал термические процессы с вращательным движением частиц, составляющих внутреннюю структуру вещества [41, 42, 43]. Он предполагал, что частицы горючей материи содержат внутри своих оболочек быстро вращающиеся и очень упругую материну и, если по какой-то причине оболочка разрушается, то высвобождается содержащийся внутри нее запас движения. М. В. Ломоносов (1711–1765) придерживался подобных взглядов [44]. Он был уверен, что тепло состоит во вращательном движении частиц, составляющих материну. Бенджамин Томпсон (1753–1814) и Гемфри Дэви (1778–1829) также полагали, что тепловые эффекты связаны с вращательным движением [37]. Они рассуждали следующим образом. При нагревании тело расширяется, т.е. частицы материи отталкиваются. Весьма вероятно, что частицы материи постоянно находятся в движении. Пока температура остается постоянной, частицы не меняют своих положений. Следовательно движение частиц вращательное. Томас Юнг (1773–1829) считал, что тепло представляет собой колебания частиц, которые распространяются сквозь пустое пространство в виде волн [37]. Он полагал, что единственное различие между светом и теплом заключается в том, что тепловые колебания медленнее световых. Огюстен Луи Коши (1789–1857) создал несколько теорий оптики кристаллов, которые содержали не только поперечные, но и продольные колебания. Он считал, что существование этих колебаний будет подтверждено опытным путем, и высказывал предположение о том, что они имеют тепловую природу.

3. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ПРЕДЛАГАЕМОГО ПОДХОДА

Наш подход к моделированию тепловых процессов сочетает в себе идею Эйлера о вращательном характере движений, вызывающих тепловые эффекты, и идею Коши о связи тепловых процессов с продольными колебаниями эфира. Иными словами, мы предполагаем, что тепловые эффекты связаны с крутильными колебаниями внутренней структуры вещества, которые по сути представляют собой продольные колебания по вращательным степеням свободы. Наш подход состоит в следующем. Для моделирования классических термоупругих сред мы используем континуум Коссера с внутренними вращательными степенями свободы. В случае трехмерной теории – это континуум, каждая частица которого представляет собой однороторный гиростат, т.е. твердую частицу, содержащую внутренний ротор. В случае оболочек, где вводятся в рассмотрение

два температурных поля, – это континуум, каждая частица которого представляет собой двухроторный гиростат. В нашей модели движения и взаимодействия внутренних роторов отвечают за тепловые процессы, при этом характеристики взаимодействия и движения роторов являются аналогами температуры и энтропии. В рамках предлагаемой модели дается оригинальная трактовка механизма теплопроводности, суть которой заключается в следующем. Рассматриваемый континуум считается упругим, однако предполагается, что частицы континуума погружены в некоторую безграничную среду (также упругую). Эта среда моделирует “физический вакуум”, “поле”, “эфир” или что-то подобное этому. Внутренние роторы частиц, составляющих материну, взаимодействуют с безграничной средой посредством упругих крутящих моментов. Движение роторов вызывает появление волн в этой среде, в результате чего определенная часть энергии частиц материи передается соседним частицам материи, а некоторая часть энергии рассеивается (уносится волнами на бесконечность). Мы полагаем, что механизм теплопроводности реализуется именно благодаря описанному выше процессу взаимодействия частиц материи с окружающей их безграничной средой.

Представленное ниже исследование является продолжением и развитием работ [45, 46, 47, 48]. В работе [45] предложен оригинальный метод описания вращательных молекулярных спектров, лежащих в инфракрасной области (т.е. связанных с тепловым излучением). Метод основан на использовании континуальной механической модели с вращательными степенями свободы. В работе [46] содержится подробный вывод уравнений динамики трехмерного континуума, состоящего из однороторных гиростатов; данный континуум рассматривается как модель классической среды, обладающей термоупругими свойствами; в рамках предложенной модели вводятся понятия температуры, энтропии и теплового потока. Метод, предложенный в [46], развивается в работах [47, 48]. В этих работах, в частности, решается ряд модельных задач, на примере которых изучается влияние безграничной упругой среды на движение погруженной в нее частицы. Одна из особенностей предлагаемой модели тепловых процессов заключается в том, что температура и энтропия оказываются аксиальными скалярами, тогда как в соответствии классическим представлениям они являются полярными. Ниже подробно обсуждаются следствия, к которым приводит указанная особенность нашей модели.

4. КОНТИНУУМ КОССЕРА КАК МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ

Идея использования континуумов с вращательными степенями свободы как механических моделей различных физических процессов не нова. Во второй половине XIX столетия такие модели были предложены Джеймсом Клерком Максвеллом (1831–1879), Джорджем Фрэнсисом Фитцджеральдом (1851–1901) и Уильямом Томсоном (1824–1907). Модель Максвелла 1862 года

основана на представлении о магнетизме как о явлении вращательного характера [38]. Под влиянием идей Майкла Фарадея (1791–1867), Максвелл предположил, что эфир представляет собой среду, вращающуюся вокруг магнитных силовых линий, причем каждую единичную силовую трубку можно представить как изолированный вихрь. Обсуждаемая модель Максвелла – это, фактически, двухкомпонентная среда. В этой модели “магнитная среда” разделена на ячейки, причем стенки ячеек состоят из отдельного слоя сферических частиц, которые являются “электричеством”. Исходя из своей модели Максвелл предложил математическое описание электродинамики в виде системы уравнений, которая сейчас носит его имя. Модель, похожую на модель Максвелла, в 1885 году предложил Фитцджеральд [38]. Эта модель основана на механизме, состоящем из нескольких колес, которые свободно вращаются на осях, закрепленных на плоской доске так, что их направления перпендикулярны доске. Каждое колесо связано с каждым из четырех соседних колес резиновым ремнем. В 1889 году Уильям Томсон (лорд Кельвин) предложил несколько механических моделей, обладающих вращательной упругостью [38]. В отличие от моделей Максвелла и Фитцджеральда, модели Кельвина были пространственными. В результате Кельвин создал модель среды состоящей из осесимметричных частиц, которые могут свободно вращаться вокруг собственной оси, тогда как остальные перемещения и повороты встречают сопротивление. Сейчас данная модель известна как “среда Кельвина”. Это первая в истории науки модель, в которой перемещения и повороты введены как независимые степени свободы. Следует отметить, что Кельвин создал модель среды с вращательными степенями свободы на описательно-инженерном уровне. Модели, основанные на вращательных степенях свободы, в то время не получили развития. Причина заключается в том, что во второй половине XIX века уровень развития механики сплошных сред не позволял решать подобные задачи. Возможность создавать математические модели подобных сред появилась существенно позже, когда в 1909 году братья Эжен и Франсуа Коссера разработали методы описания трехмерных сред с вращательными степенями свободы [49]. Долгое время подход Коссера к построению математических моделей сред с вращательными степенями свободы не находил последователей. Однако, начиная с работ К. Трусделла и Дж. Эриксона, написанных уже во второй половине XX века, этот подход начал интенсивно развиваться. В настоящее время использование континуума Коссера при описании различных физических процессов и явлений, таких как пьезоэлектричество, ферромагнетизм, пластичность, поведение сыпучих сред и т. д. можно найти в работах многих авторов [см., например, 19, 50, 51].

5. КОНТИНУУМ ОДНОРОТОРНЫХ ГИРОСТАТОВ И МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Ниже строится линейная теория упругой среды, представляющей собой континуум однороторных гиристов. Однороторный гиристов – это сложная

частица, состоящая из несущего тела и ротора – см. рис. 1. Ротор может вращаться независимо от вращения несущего тела, но не может перемещаться относительно несущего тела. Предполагается, что свободное пространство между гиристами заполнено телами-точками (см. рис. 1), структура которых совпадает со структурой роторов. Тела-точки в пространстве между гиристами представляют собой частицы некоторой упругой среды, имеющей бесконечную протяженность. Предметом нашего исследования является континуум, состоящий из гиристов. Континуум тел-точек представляет собой внешний фактор по отношению к континууму гиристов.

Пусть радиус-вектор \mathbf{r} задает положение некоторой точки материальной среды в отсчетной конфигурации. Введем следующие обозначения: $\rho(\mathbf{r},t)$ и $\rho_*(\mathbf{r})$ – массовая плотность среды в актуальной и отсчетной конфигурациях, соответственно; $\mathbf{I} = \mathbf{L}\mathbf{E}$ и $\mathbf{J} = \mathbf{J}\mathbf{E}$ – массовые плотности тензоров инерции несущих тел и роторов, где \mathbf{E} – единичный тензор; $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$ – вектор перемещений; $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ – вектор скоростей; $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r},t)$ – тензор поворота и вектор угловой скорости несущих тел; $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$ – тензор поворота и вектор угловой скорости роторов. В отсчетной конфигурации тензоры $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ равны единичному тензору. При линеаризации вблизи отсчетного положения они принимают вид

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{E}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r},t)$, $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{r},t)$ – векторы поворота несущих тел и роторов, соответственно. В линейном приближении кинематические соотношения записываются так:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}. \quad (2)$$

Уравнение баланса количества движения гиристов и уравнение движения кинетического момента несущих тел гиристов имеют вид

$$\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \rho_* \mathbf{f} \dot{\neq} \rho_* \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\times} + \rho_* \mathbf{m} \dot{\neq} \rho_* I \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{dt} \quad (3)$$

Здесь ∇ – оператор градиента, $\boldsymbol{\tau}$ – тензор силовых напряжений, $\boldsymbol{\mu}$ – тензор моментных напряжений, характеризующий взаимодействие между несущими телами гиристов, $(\cdot)_{\times}$ – векторный инвариант тензора, \mathbf{f} – массовая плотность внешних сил, \mathbf{m} – массовая плотность внешних моментов, действующих на несущие тела гиристов.

Уравнение баланса кинетического момента роторов выглядит так:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho_* \mathbf{L} = \rho_* J \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \quad (4)$$

где \mathbf{T} – тензор моментных напряжений, характеризующий взаимодействие между роторами

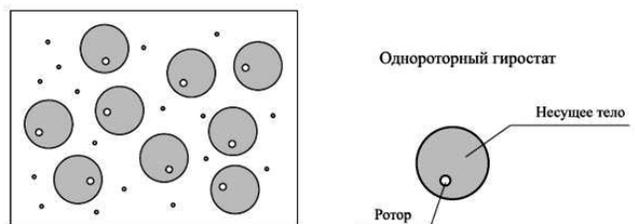


Рис. 1. Элементарный объем континуума однороторных гиристов.

гиростатов, \mathbf{L} – массовая плотность внешних моментов, действующих на роторы.

Далее мы рассмотрим частный случай построенной теории, приняв два важных предположения.

Предположение 1. Вектор L – массовая плотность внешних воздействий на роторы гиростатов – представляет собой сумму момента L_p , характеризующего внешние воздействия различного происхождения, и момента линейного вязкого трения $L_f = -\beta J \omega$. (5)

Замечание. Момент (5) моделирует воздействие тел-точек, находящихся в свободном пространстве между гиростатами (см. рис. 1), на роторы гиростатов. Структура этого момента выбрана в соответствии с результатами решения двух модельных задач [47, 48]. Первая модель [47] представляет собой систему, состоящую из полубесконечного упругого стержня, соединенного с телом-точкой посредством безынерционной пружины, работающей на кручение (поворот вокруг оси стержня). Показано, что после исключения переменных, характеризующих движение стержня, задача сводится к уравнению, описывающему движение тела-точки. Это уравнение содержит момент вязкого трения, характеризующий рассеяние энергии в окружающую среду. Доказано, что момент вязкого трения пропорционален кинетическому моменту тела-точки и коэффициент трения β зависит от параметров стержня и жесткости пружины, соединяющей тело-точку и стержень. Задача о взаимодействии сферического источника с бесконечной окружающей средой рассмотрена в [48]. Постановка этой задачи аналогична обсуждавшейся выше. Сравнение результатов, полученных в случае одномерного континуума и в случае сферически симметричной задачи для трехмерного континуума, показало, что хотя системы уравнений несколько различаются, они имеют одно и то же сходство. В обоих случаях после определенных преобразований получается уравнение, которое содержит диссипативное слагаемое, пропорциональное кинетическому моменту. При этом коэффициент вязкого трения β одинаковым образом зависит от параметров модели. Таким образом, исходя из результатов решения модельных задач предполагается, что момент, моделирующий воздействие тел-точек, находящихся в пространстве между гиростатами, представляет собой момент вязкого трения, пропорциональный кинетическому моменту.

Предположение 2. Тензор моментных напряжений \mathbf{T} , характеризующий взаимодействие роторов, является шаровым тензором $\mathbf{T} = T\mathbf{E}$ (6)

Замечание. Предположение (6) основано на следующих рассуждениях. Мы считаем, что взаимодействие несущих тел гиростатов связано с механическими процессами, взаимодействие роторов моделирует тепловые процессы, а взаимодействие несущих тел и роторов обеспечивает взаимосвязь механических и тепловых процессов. Мы рассматриваем моментное взаимодействие роторов как аналог температуры. Поскольку температура является скаляром, тензор моментных напряжений

должен определяться одной скалярной величиной. Следовательно, он должен быть шаровым тензором.

Далее мы предполагаем, что континуум однороторных гиростатов является изолированной системой, т.е. он обменивается энергией со своим окружением только через мощность внешних сил и моментов. В этом случае уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{d(\rho_* U_m)}{dt} = \tau^T \dots \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \mu^T \dots \frac{d\mathbf{k}}{dt} + T \frac{d\mathfrak{G}}{dt}, \quad (7)$$

где U_m – массовая плотность внутренней энергии; $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{k} , \mathfrak{G} – тензоры деформации, определяемые формулами $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{k} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$, $\mathfrak{G} = \text{tr} \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} = \nabla \boldsymbol{\theta}$. (8)

Если рассматривать (7) как уравнение баланса энергии для классической среды, то последнее слагаемое в правой части этого уравнения имеет смысл термодинамического слагаемого. Тогда величина T приобретает смысл температуры, а величина \mathfrak{G} – объемной плотности энтропии. Температура и энтропия, введенные в рамках предложенной здесь модели, не совпадают по размерности с абсолютной температурой и энтропией классической термодинамики. Эта проблема решается посредством введения нормировочного коэффициента a :

$$T = aT_a, \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{a} \mathfrak{G}_a, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{a} \boldsymbol{\theta}_a, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{a} \boldsymbol{\omega}_a, \quad \mathbf{L}_h = a \mathbf{L}_h^a, \quad J = a^2 J_a. \quad (9)$$

Здесь T_a – абсолютная температура, измеряемая термометром, \mathfrak{G}_a – объемная плотность энтропии.

Построим модель континуума, основанную на сформулированных выше предположениях и аналогиях. В соответствии с предположениями (5), (6) и аналогиями (9), уравнение баланса кинетического момента роторов принимает вид

$$\nabla T_a - \rho_* \beta J_a \boldsymbol{\omega}_a + \rho_* \mathbf{L}_h^a = \rho_* J_a \frac{d\boldsymbol{\omega}_a}{dt}. \quad (10)$$

Вычислив дивергенцию уравнения (11), получим уравнение

$$\Delta T_a - \rho_* \beta J_a \frac{d\mathfrak{G}_a}{dt} - \rho_* J_a \frac{d^2 \mathfrak{G}_a}{dt^2} = -\rho_* \nabla \cdot \mathbf{L}_h^a, \quad (11)$$

которое можно рассматривать как уравнение теплопроводности. В этом случае слагаемое $\rho_* \nabla \cdot \mathbf{L}_h^a$ в уравнении (11) приобретает смысл подвода тепла.

Далее мы считаем континуум однороторных гиростатов упругим. В этом случае, согласно уравнению баланса энергии (7), внутренняя энергия является функцией тензоров деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{k} и скалярной меры деформации \mathfrak{G} (или, что то же самое, объемной плотности энтропии \mathfrak{G}_a). Поскольку в линейной теории внутренняя энергия является квадратичной формой деформаций, определяющие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^T &= \boldsymbol{\tau}_0^T + {}^4 C_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + {}^4 C_2 \cdot \mathbf{k} + C_4 (\mathfrak{G}_a - \mathfrak{G}_a^*), \\ \boldsymbol{\mu}^T &= \boldsymbol{\mu}_0^T + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot {}^4 C_2 + {}^4 C_3 \cdot \mathbf{k} + C_5 (\mathfrak{G}_a - \mathfrak{G}_a^*), \\ T_a &= T_a^* + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot C_4 + \mathbf{k} \cdot C_5 + C_6 (\mathfrak{G}_a - \mathfrak{G}_a^*). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_0$ и $\boldsymbol{\mu}_0$ – начальные напряжения, T_a^* – значение абсолютной температуры, при которой определены параметры модели, \mathfrak{G}_a^* – соответствующее значение объемной плотности энтропии, ${}^4 C_1, {}^4 C_2, {}^4 C_3$ – тензоры жесткости 4-го ранга, C_4, C_5 – тензоры 2-го ранга, характеризующие взаимное влияние механических

и тепловых процессов, C_6 – скалярная величина, характеризующая удельную теплоемкость.

В соответствии с принятой выше аналогией между механическими и термодинамическими величинами, систему уравнений (2), (3), (8), (9), (11), (12) можно рассматривать как математическое описание термоупругой среды. Обратим внимание на тот факт, что температура и энтропия, введенные согласно принятой аналогии, оказались аксиальными скалярами (псевдоскалярами), в то время как в классической теории они являются полярными скалярами. Следовательно, в предлагаемой теории термоупругости тензор C_4 – аксиальный, а тензор C_5 – полярный, тогда как в классической теории, наоборот, тензор C_4 – полярный, а тензор C_5 – аксиальный. Далее обсуждаются следствия, к которым приводит указанная особенность предлагаемой модели.

6. СТРУКТУРА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕНЗОРОВ

Обсудим некоторые аспекты определения структуры материальных тензоров. Прежде всего, отметим тот факт, что структура материального тензора существенно зависит от его типа. Это следует из теории симметрии Жилина [16, 19, 29], которая базируется на приведенном ниже определении ортогонального преобразования.

Определение 1. Тензор ${}^k S'$ называется ортогональным преобразованием тензора k -го ранга ${}^k S$, если

$${}^k S = s^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \dots e_{i_k} \Rightarrow {}^k S' = (\det Q)^\alpha s^{i_1 \dots i_k} Q \cdot e_{i_1} \dots Q \cdot e_{i_k}, \quad (13)$$

где Q – ортогональный тензор, причем $\alpha = 0$ в случае полярного тензора ${}^k S$ и $\alpha = 1$ в случае аксиального тензора ${}^k S$.

Это определение отличается от классического множителем $(\det Q)^\alpha$, который в классическом определении отсутствует. В случае полярного тензора ${}^k S$ этот множитель равен единице и определение (13) совпадает с классическим. В случае аксиального тензора ${}^k S$ множитель $(\det Q)^\alpha$ равен +1 для тензора поворота и -1 для тензора зеркального отражения. Следовательно, в случае аксиального тензора ${}^k S$ определение (13) отличается от классического. Классическая теория симметрии применима только для полярных тензоров. Теория симметрии Жилина, основанная на определении (13), применима как для полярных, так и для аксиальных тензоров. Ниже рассматриваются тензоры обоих типов, поэтому используется теория симметрии Жилина.

Определение 2. Группой симметрии тензора ${}^k S$ называется множество ортогональных тензоров Q , являющихся решениями уравнения

$${}^k S' = {}^k S \quad (14)$$

где тензор ${}^k S'$ определяется уравнением (13).

Таким образом, если тензор ${}^k S$ известен, то группа симметрии этого тензора находится в результате решения уравнения (14). Обратная задача состоит в определении структуры тензора ${}^k S$, если его группа симметрии известна. Именно обратная задача представляет практический интерес, поскольку

принцип Кюри–Неймана позволяет найти группу симметрии всех тензоров, характеризующих свойства физического объекта, при условии, что известна группа симметрии этого физического объекта.

Принцип Кюри–Неймана. Группа симметрии причины является подгруппой группы симметрии следствия.

Поскольку группа симметрии реального физического объекта известна, принцип Кюри–Неймана в совокупности с теорией симметрии дает возможность определить структуру материальных тензоров, характеризующих различные свойства физического объекта. Модель рассмотренного выше континуума содержит как полярные, так и аксиальные тензоры. Тензоры 4-го ранга ${}^4 C_1$, ${}^4 C_3$ и тензор 2-го ранга C_5 – полярные. Тензор 4-го ранга ${}^4 C_2$ и тензор 2-го ранга C_4 – аксиальные. Ниже мы определим структуру этих тензоров для хиральной и классической изотропных сред.

Хиральная изотропная среда. Хиральная среда – это среда, локальные свойства которой инвариантны относительно зеркальных отражений. Хиральность среды, как правило, связана с хиральностью образующих ее элементов или нарушением зеркальной симметрии их свойств. Последнее может быть вызвано внешними механическими воздействиями или наложением полей. Обычно хиральные среды анизотропны. Однако существуют изотропные хиральные среды – это среды, состоящие из хиральных частиц. Группа симметрии хиральной изотропной среды содержит тензоры поворота на произвольный угол вокруг произвольных осей и не включает в себя никаких тензоров зеркального отражения. Рассмотрим тензоры поворота на произвольный угол ψ вокруг трех взаимно ортогональных осей, направления которых определяются единичными векторами e_1 , e_2 и e_3 :

$$Q_i = (1 - \cos\psi)e_i e_i + \cos\psi E + \sin\psi e_i \times e_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Подстановка (15) в уравнения (13), (14) позволяет определить структуру всех материальных тензоров. Поскольку группа симметрии включает только тензоры поворота (тензоры с определителем, равным единице), для полярных и аксиальных тензоров получаются одинаковые результаты. Таким образом, тензоры 4-го и 2-го рангов имеют вид

$${}^4 C_1 = C_1 E E + C_2 \sum_{i=1}^3 e_i E e_i + C_3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_i e_j e_i e_j, \quad C_4 = C_4 E. \quad (16)$$

Классическая изотропная среда. Группа симметрии классической изотропной среды включает как тензоры поворота на произвольный угол вокруг произвольных осей, так и тензоры зеркального отражения от произвольных плоскостей. Рассмотрим три тензора поворота (15) и три тензора зеркального отражения от плоскостей, ортогональных единичным векторам e_1 , e_2 и e_3 :

$$Q_i = E - 2e_i e_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Подстановка (15), (17) в уравнения (13), (14) дает следующие результаты. Полярные тензоры ${}^4 C_1$, ${}^4 C_3$ и C_5 определяются формулами (16). Аксиальные тензоры ${}^4 C_2$ и C_4 равны нулю.

7. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Принятые выше аналогии между термодинамическими величинами и механическими характеристиками микроструктуры континуума однороторных гиростатов привели к тому, что в случае обычной изотропной среды тензор C_4 оказался нулевым. Вместе с тем, хорошо известно, что в классической теории термоупругости тензор C_4 характеризует тепловое расширение, и он не равен нулю. Следовательно, если считать среду, состоящую из гиростатов, изотропной в обычном смысле, возникнет противоречие с экспериментальными фактами. Разумеется, это неприемлемо. Поэтому далее мы предполагаем, что среда является хиральной, по крайней мере, в отношении микроструктуры. Для обоснования этой гипотезы приведем следующие аргументы. Допустим, что гиростаты моделируют атомы. При переходе к сплошной среде используются стандартные рассуждения: считается, что представительный объем сплошной среды содержит огромное количество гиростатов, при этом свойства представительного объема в точности совпадают со свойствами одного гиростата. Движение и взаимодействие несущих тел гиростатов связано с механическими процессами. Наличие внутренних степеней свободы позволяет наделить атомы дополнительными характеристиками и описать “немеханические процессы”, например, тепловые. Если считать, что микроструктура континуума гиростатов в интегральном смысле отражает некоторые свойства внутренней структуры атомов, то предположение о хиральности среды по отношению к микроструктуре не кажется странным. Действительно, атомы состоят из элементарных частиц, которые обладают спином, т.е. являются гиротропными, или, что то же самое, хиральными объектами. Кроме того, хорошо известны, например, оптически активные среды, которые по отношению к электромагнитным волнам ведут себя как хиральные среды, а по отношению к механическим воздействиям не проявляют свойств хиральности. Аналогичными свойствами обладает и рассматриваемая нами среда: она ведет себя как хиральная по отношению к тепловым процессам и как обычная изотропная по отношению к чисто механическим процессам.

Как известно, при описании механических процессов в трехмерных средах моментные взаимодействия и инерцию вращения можно не учитывать. Соответственно, предположим, что $\mu = 0, \mathbf{m} = 0, I = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T$. (18)

Считая средой хиральной в отношении микроструктуры и принимая во внимание уравнения (16), (18), получим следующие определяющие соотношения

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + C_1 \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + (C_2 + C_3) \boldsymbol{\varepsilon}^s + C_4 (\vartheta_a - \vartheta_a^*) \mathbf{E},$$

$$T_a = T_a^* + C_4 \boldsymbol{\varepsilon} + C_6 (\vartheta_a - \vartheta_a^*), \quad \boldsymbol{\varepsilon}^s = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = tr \boldsymbol{\varepsilon}^s. \quad (19)$$

Примем следующие значения параметров модели

$$C_1 = K_{ad} - \frac{2}{3} G, \quad C_2 + C_3 = G, \quad C_4 = -\frac{\alpha K_{iz} T_a^*}{\rho^* c_v},$$

$$C_6 = \frac{T_a^*}{\rho^* c_v}, \quad \beta J_a = \frac{T_a^*}{\rho^* \lambda}. \quad (20)$$

где K_{iz} и $K_{ad} = K_{iz} + \alpha^2 K_{iz}^2 T_a^* / (Q^* c_v)$ – изотермический и адиабатический модули объемного сжатия, G – модуль сдвига, α – объемный коэффициент теплового расширения, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, λ – коэффициент теплопроводности. С учетом (20), из уравнений (3), (11), (19) получаем

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho^* \mathbf{f} = \rho^* \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + (K_{iz} - \frac{2}{3} G) \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E} + 2G \boldsymbol{\varepsilon}^s -$$

$$- \alpha K_{iz} (T_a - T_a^*) \mathbf{E}, \quad \Delta T_a - \frac{\rho^* c_v}{\lambda} \left(\frac{dT_a}{dt} + \frac{1}{\beta} \frac{d^2 T_a}{dt^2} \right) =$$

$$= \frac{\alpha K_{iz} T_a^*}{\lambda} \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \frac{1}{\beta} \frac{d^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{dt^2} \right) - \rho^* \nabla \cdot \mathbf{L}_h^a. \quad (21)$$

Параметр β^{-1} принято называть временем релаксации теплового потока. Нетрудно видеть, что в случае $\beta^{-1} = 0$ система уравнений (21) совпадает с классической постановкой задачи термоупругости (см., например, [20]). Если параметр β^{-1} отличен от нуля, система (21) представляет собой постановку задачи термоупругости гиперболического типа (см., например, [52]).

Замечание. Поскольку классическая теория термоупругости является безмоментной, на первый взгляд может показаться, что континуум однороторных гиростатов – слишком сложная модель, и вместо него можно использовать континуум Коссера. Однако наша цель заключается в том, чтобы предложить механическую модель тепловых процессов, которую можно использовать в любых континуальных моделях, в том числе и в тех случаях, когда при описании механических процессов важно учитывать моментные взаимодействия. Одна из таких моделей – модель термоупругой оболочки – обсуждается ниже.

8. КОНТИНУУМ ДВУХРОТОРНЫХ ГИРОСТАТОВ И ТЕОРИЯ ТЕРМОУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК 12-ГО ПОРЯДКА

Ниже строится линейная теория, описывающая упругую материальную поверхность, каждая частица которой – двухроторный гиростат (см. рис. 2). Роторы гиростата могут вращаться независимо от вращения несущего тела, но они не могут перемещаться относительно несущего тела. Для описания геометрии материальной поверхности введем в рассмотрение единичный вектор нормали к поверхности \mathbf{n} ; двумерный оператор градиента в касательной плоскости $\tilde{\nabla}$; первый метрический тензор $\mathbf{a} = \mathbf{E} - \mathbf{nn}$, представляющий собой единичный тензор в

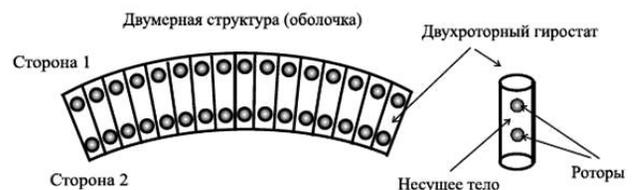


Рис. 2. Оболочка, состоящая из двухроторных гиростатов.

касательной плоскости; второй метрический тензор $\mathbf{b} = -\tilde{\nabla} \mathbf{n}$, характеризующий кривизну поверхности; а также третий метрический тензор $\mathbf{c} = -\mathbf{n} \times \mathbf{a}$.

Сформулируем уравнения баланса для материальной поверхности, состоящей из двухроторных гиростатов. Уравнение баланса количества движения гиростатов и уравнение баланса кинетического момента несущих тел имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{d}} + \rho \mathbf{f} &= \rho \left(\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + \mathbf{I}_1 \cdot \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}}{dt^2} \right), \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{d}}_x + \rho \mathbf{m} &= \rho \left(\mathbf{I}_1^T \cdot \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + \mathbf{I}_2 \cdot \frac{d^2 \boldsymbol{\varphi}}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ – тензор усилий; $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ – тензор моментов, моделирующий взаимодействие несущих тел гиростатов; \mathbf{f} и \mathbf{m} – массовые плотности внешних сил и моментов; \mathbf{u} и $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор перемещений и вектор углов поворота несущих тел; ρ – поверхностная плотность массы в отсчетной конфигурации; $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ – массовые плотности тензоров инерции несущих тел. Уравнения баланса кинетического момента роторов записываются так:

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_1 + \rho \mathbf{L}_1 = \rho J_1 \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_1}{dt^2}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{T}}_2 + \rho \mathbf{L}_2 = \rho J_2 \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_2}{dt^2}, \quad (23)$$

где $\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\mathbf{T}}_2$ – тензоры моментов, моделирующие взаимодействие роторов гиростатов; $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ – массовые плотности внешних моментов, действующих на роторы; $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$ – векторы углов поворота роторов; J_1, J_2 – массовые плотности моментов инерции роторов. Примем гипотезы, аналогичные (5), (6), а именно

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_h^{(i)} + \mathbf{L}_f^{(i)}, \quad \mathbf{L}_f^{(i)} = -\beta J_i \frac{d \boldsymbol{\theta}_i}{dt}, \quad \tilde{\mathbf{T}}_i = \tilde{\mathbf{T}}_i^{(i)}, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Здесь $\mathbf{L}_h^{(i)}$ – векторы моментов, характеризующие внешние воздействия различной природы, $\mathbf{L}_f^{(i)}$ – векторы моментов вязкого трения. С учетом (24) уравнения баланса кинетического момента роторов (23) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{T}}_1 - \rho \beta J_1 \frac{d \boldsymbol{\theta}_1}{dt} + \rho \mathbf{L}_h^{(1)} &= \rho J_1 \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_1}{dt^2}, \\ \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{T}}_2 - \rho \beta J_2 \frac{d \boldsymbol{\theta}_2}{dt} + \rho \mathbf{L}_h^{(2)} &= \rho J_2 \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}_2}{dt^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Представим внешние моменты $\mathbf{L}_h^{(1)}$ и $\mathbf{L}_h^{(2)}$ в виде сумм $\mathbf{L}_h^{(1)} = \tilde{\mathbf{L}}_1 + \mathbf{L}_Q, \quad \mathbf{L}_h^{(2)} = \tilde{\mathbf{L}}_2 - \mathbf{L}_Q,$

где $\tilde{\mathbf{L}}_1, \tilde{\mathbf{L}}_2$, – внешние (по отношению к оболочке) моменты, действующие на роторы, связанные со сторонами 1 и 2 соответственно; \mathbf{L}_Q – момент, характеризующий взаимодействие роторов, связанных со сторонами 1 и 2. Вычислив дивергенцию уравнений (25), с учетом (26) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{T}}_1 - \rho \beta J_1 \frac{d \tilde{\mathcal{G}}_1}{dt} + \rho \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{L}}_1 + \rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_Q &= \rho J_1 \frac{d^2 \tilde{\mathcal{G}}_1}{dt^2}, \\ \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{T}}_2 - \rho \beta J_2 \frac{d \tilde{\mathcal{G}}_2}{dt} + \rho \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{L}}_2 - \rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_Q &= \rho J_2 \frac{d^2 \tilde{\mathcal{G}}_2}{dt^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_1$ и $\tilde{\mathcal{G}}_2$ – меры деформации, определяемые формулами

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{\theta}_1, \quad \tilde{\mathcal{G}}_2 = \tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{\theta}_2. \quad (28)$$

Уравнение баланса энергии для континуума двухроторных гиростатов записывается так

$$\frac{d(\rho U_m)}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}^T \cdot \frac{d \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{dt} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \cdot \frac{d \tilde{\boldsymbol{\kappa}}}{dt} + \tilde{\mathbf{T}}_1 \frac{d \tilde{\mathcal{G}}_1}{dt} + \tilde{\mathbf{T}}_2 \frac{d \tilde{\mathcal{G}}_2}{dt}. \quad (29)$$

Здесь U_m – массовая плотность внутренней энергии; $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ – тензоры деформации, которые вычисляются по формулам

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\nabla} \mathbf{u} + \mathbf{a} \times \boldsymbol{\varphi}, \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \tilde{\nabla} \boldsymbol{\varphi}. \quad (30)$$

Описанная выше двумерная материальная среда моделирует термоупругую оболочку. Силовые и моментные взаимодействия несущих тел гиростатов связаны с механическими процессами. Моментное взаимодействие роторов моделирует тепловые процессы. Взаимодействие несущих тел и роторов обеспечивает взаимное влияние механических и тепловых процессов. Предполагается, что шаровая часть тензора моментов, характеризующего взаимодействие роторов, является аналогом температуры. Следовательно, соответствующая угловая деформация представляет собой аналог поверхностной плотности энтропии. Поскольку частицы материальной поверхности – двухроторные гиростаты, данная аналогия вводит в рассмотрение две температуры и две энтропии в каждой точке поверхности. Благодаря этому появляется возможность учесть перепад температуры по толщине оболочки [29]. Моменты линейного вязкого трения, действующие на роторы, обеспечивает механизм теплопроводности. Из уравнений баланса кинетического момента (25), которые формулируются в данной точке материальной поверхности для каждого ротора, следуют два уравнения теплопроводности (27). Таким образом, уравнения, описывающие упругую материальную поверхность, состоящую из двухроторных гиростатов, можно рассматривать как уравнения теории термоупругих оболочек.

Введем в рассмотрение абсолютные температуры $T_a^{(1)}$ и $T_a^{(2)}$, поверхностные плотности энтропии $\mathcal{G}_a^{(1)}$ и $\mathcal{G}_a^{(2)}$, а также другие термодинамические величины, используя для этого нормировочный коэффициент \tilde{a} :

$$\tilde{\mathbf{T}}_i = \tilde{a} T_a^{(i)}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_i = \frac{1}{\tilde{a}} \mathcal{G}_a^{(i)}, \quad \tilde{\mathbf{L}}_i = \tilde{a} \mathbf{L}_a^{(i)}, \quad \mathbf{L}_Q = \tilde{a} \mathbf{L}_a^Q, \quad J_i = \tilde{a}^2 J_a^{(i)}. \quad (31)$$

Заметим, что нормировочный коэффициент \tilde{a} отличается от нормировочного коэффициента a , введенного в трехмерной теории, поскольку тензор моментов в теории оболочек и тензор моментных напряжений в трехмерной теории имеют разную размерность.

С учетом (31) уравнения (27) переписываются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} T_a^{(1)} - \rho \beta J_a^{(1)} \frac{d \mathcal{G}_a^{(1)}}{dt} - \rho J_a^{(1)} \frac{d^2 \mathcal{G}_a^{(1)}}{dt^2} &= -\rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_a^{(1)} - \rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_a^Q, \\ \tilde{\Delta} T_a^{(2)} - \rho \beta J_a^{(2)} \frac{d \mathcal{G}_a^{(2)}}{dt} - \rho J_a^{(2)} \frac{d^2 \mathcal{G}_a^{(2)}}{dt^2} &= -\rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_a^{(2)} + \rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_a^Q. \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнения (32) представляют собой уравнения теплопроводности, относящиеся к двум сторонам оболочки. Слагаемые $\rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_a^{(1)}$ и $\rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_a^{(2)}$ играют роль $\rho \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{L}_a^Q$ подвода тепла от внешнего источника. Слагаемое характеризует обмен теплом между сторонами оболочки.

Рассмотрим уравнение баланса энергии (29). Как видно из этого уравнения, внутренняя энергия является функцией двух тензоров деформации $\bar{\mathbf{e}}, \bar{\mathbf{k}}$ и двух скалярных мер деформации \bar{g}_1, \bar{g}_2 , соответствующих энтропиям $g_a^{(1)}, g_a^{(2)}$. В линейной теории внутренняя энергия является квадратичной формой деформаций. Следовательно, определяющие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^T &= \bar{\tau}_0^T + {}^4C_1 \cdot \bar{\mathbf{e}} + {}^4C_2 \cdot \bar{\mathbf{k}} + C_4 (g_a^{(1)} - g_a^*) + C_6 (g_a^{(2)} - g_a^*), \\ \bar{\mu}^T &= \bar{\mu}_0^T + \bar{\mathbf{a}} \cdot {}^4C_2 + {}^4C_3 \cdot \bar{\mathbf{k}} + C_5 (g_a^{(1)} - g_a^*) + C_7 (g_a^{(2)} - g_a^*), \\ T_a^{(1)} &= T_a^* + \bar{\mathbf{e}} \cdot C_4 + \bar{\mathbf{k}} \cdot C_5 + C_8 (g_a^{(1)} - g_a^*) + C_9 (g_a^{(2)} - g_a^*), \\ T_a^{(2)} &= T_a^* + \bar{\mathbf{e}} \cdot C_6 + \bar{\mathbf{k}} \cdot C_7 + C_9 (g_a^{(1)} - g_a^*) + C_{10} (g_a^{(2)} - g_a^*). \end{aligned} \quad (33)$$

Далее, воспользовавшись теорией симметрии, определим структуру тензоров жесткости ${}^4C_i (i = 1, 2, 3)$ и тензоров 2-го ранга $C_i (i = 4, 5, 6, 7)$, характеризующих взаимосвязь механических и термодинамических процессов. Разложим эти тензоры в ряды по степеням малого параметра $h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, где h – толщина оболочки. При этом будем сохранять первые два члена ряда для тензоров 4-го ранга и только асимптотически главные члены для тензоров 2-го ранга

$${}^4C_i = {}^4C_i^{(0)} + {}^6C_i^{(1)} \cdot (h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) + O(\|h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|^2), \quad C_i = C_i^{(0)} + O(\|h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}\|). \quad (34)$$

Заметим, что малый параметр $h\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ характеризует кривизну оболочки и, следовательно, коэффициенты ${}^4C_i^{(0)}, {}^6C_i^{(1)}, C_i^{(0)}$ от кривизны не зависят.

Предположим, что материал оболочки является классической изотропной средой в отношении всех величин, характеризующих упругие свойства оболочки, и хиральной изотропной средой в отношении всех величин, связанных с внутренней структурой, т.е. характеризующих термодинамические свойства и свойства, которые определяют взаимное влияние механических и термодинамических процессов. В этом случае, группа симметрии тензоров ${}^4C_i^{(0)}$ и ${}^6C_i^{(1)}$, характеризующих упругие свойства, включает в себя тензоры зеркального отражения $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{E} - 2e_1e_1, \mathbf{Q}_2 = \mathbf{E} - 2e_2e_2, \mathbf{Q}_3 = \mathbf{E} - 2\mathbf{nn}$, (35) где e_1, e_2 – собственные векторы тензора \mathbf{b} , и тензор поворота на произвольный угол вокруг нормали к поверхности оболочки:

$$\mathbf{Q}(\psi\mathbf{n}) = (1 - \cos\psi)\mathbf{nn} + \cos\psi\mathbf{E} + \sin\psi\mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (36)$$

Группа симметрии тензоров $C_i^{(0)}$, характеризующих взаимное влияние механических и термодинамических процессов, включает в себя только тензор поворота (36). Подстановка (35), (36) в уравнения (13), (14) дает возможность определить структуру материальных тензоров. Полярные тензоры 4C_1 и 4C_3 имеют вид

$$\begin{aligned} {}^4C_1 &= A_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + A_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3) + A_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + A_4 (\mathbf{ne}_1 \mathbf{ne}_1 + \mathbf{ne}_2 \mathbf{ne}_2), \\ {}^4C_3 &= C_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + C_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3) + C_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 + C_4 (\mathbf{ne}_1 \mathbf{ne}_1 + \mathbf{ne}_2 \mathbf{ne}_2), \end{aligned} \quad (37)$$

где базисные тензоры 2-го ранга a_i определяются формулами

$$\mathbf{a}_1 \equiv \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1, \mathbf{a}_4 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 \quad (38)$$

Аксиальный тензор 4C_2 выглядит так:

$$\begin{aligned} {}^4C_2 &= 2hN [B_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 + B_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_2) + B_3 (\mathbf{ne}_1 \mathbf{ne}_2 - \mathbf{ne}_2 \mathbf{ne}_1)] + \\ &+ 2hN_1 [B_4 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_4 + B_5 \mathbf{a}_4 \mathbf{a}_1 + B_6 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + B_7 (\mathbf{ne}_1 \mathbf{ne}_2 + \mathbf{ne}_2 \mathbf{ne}_1)]. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad H_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (40)$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны оболочки. Так как материал оболочки считается хиральной изотропной средой в отношении всех величин, связанных с внутренней структурой (т.е. в отношении тензоров 2-го ранга C_i), полярные тензоры C_5, C_7 и аксиальные тензоры C_4, C_6 имеют одинаковую структуру, а именно

$$C_i = \Lambda_i \mathbf{a} + Y_i \mathbf{c}, \quad i = 4, 5, 6, 7. \quad (41)$$

Сравним усилия, найденные посредством предложенной теории оболочек, с напряжениями, определенными по трехмерной теории. В соответствии с определяющими уравнениями (19), (33) и соотношениями [29, 16]

$$\bar{\tau} = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}^{-1} \cdot \tau \, dz, \quad \bar{\mu} = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}^{-1} \cdot \tau \cdot \mathbf{c} \, dz, \quad (42)$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} - z\mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{a}} = \det \tilde{\mathbf{a}},$$

можно заключить, что

$$C_4 = \Lambda_4 \mathbf{a}, \quad C_5 = Y_5 \mathbf{c}, \quad C_6 = \Lambda_6 \mathbf{a}, \quad C_7 = Y_7 \mathbf{c}. \quad (43)$$

Таким образом, систему уравнений (22), (30), (32), (33), (37), (39), (43) можно рассматривать как математическое описание термоупругой оболочки.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше для описания тепловых процессов предложена оригинальная механическая модель, которая является альтернативой механической модели, принятой в кинетической теории и статистической физике. Разработано математическое описание предложенной модели в рамках линейной теории. Дальнейшее развитие теории предполагается вести по двум направлениям. Первое направление связано с учетом нелинейных эффектов в рамках той же механической модели, что необходимо для описания поведения вещества в состояниях, близких к фазовым переходам, а также процессов теплопроводности в условиях быстро меняющихся и сверхвысоких температур. Второе направление связано с модификацией механической модели путем учета дополнительных степеней свободы с целью введения в рассмотрение химического потенциала и ряда дополнительных физических характеристик среды. Это необходимо для описания фазовых переходов и химических реакций, а также для описания взаимодействия вещества с электромагнитным полем и, соответственно, термоэлектрических и термомагнитных эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пригожин И, Кондепуди Д. *Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур*. М., Мир, 2002, 461 с.
2. Пригожин И. *Введение в термодинамику необратимых процессов*. Ижевск, НИЦ РХД, 2001, 160 с.
3. Де Грот СР. *Термодинамика необратимых процессов*. М., ГИТТЛ, 1956, 281 с.
4. Дьярмати И. *Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы*. М., Мир, 1974, 303 с.

5. Бахарева ИФ. *Нелинейная неравновесная термодинамика*. Саратов, Изд. СГУ, 1976, 140 с.
6. Циглер Г. *Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды*. М., Мир, 1966, 136 с.
7. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. *Расширенная необратимая термодинамика*. Москва–Ижевск, НИЦ РХД, 2006, 528 с.
8. Truesdell C. *The elements of continuum mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1965.
9. Трусделл К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред*. М., Мир, 1975, 592 с.
10. Пальмов ВА. *Колесания упругопластических тел*. М., Наука, 1976, 328 с.
11. Коваленко АД. *Термоупругость*. Киев, Вища школа, 1975, 216 с.
12. Кувыркин ГН. *Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении*. М., Изд. МГТУ, 1993, 142 с.
13. Зарубин ВС, Кувыркин ГН. *Математические модели термомеханики*. М., Физматлит, 2002, 168 с.
14. Жилин ПА. *Актуальные проблемы механики*. Т. 1. СПб., ИПМ, 2006, 306 с.
15. Zhilin PA. *Advanced problems in mechanics*. V. 2. St. Petersburg, IPME RAS Publ. 2006, 271 с.
16. Жилин ПА. *Прикладная механика. Основы теории оболочек*. Учеб. пособие. СПб., Изд. Политехн. ун-та, 2006, 167 с.
17. Жилин ПА. *Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней*. Учеб. пособие. СПб., Изд. Политехн. ун-та, 2007, 101 с.
18. Жилин ПА. *Математическая теория неупругих сред*. *Успехи механики*, 2003, 2(4):3–36.
19. Жилин ПА. *Рациональная механика сплошных сред*. СПб., Изд. Политехн. ун-та, 2012, 584 с.
20. Новацкий В. *Динамические задачи термоупругости*. М., Мир, 1970, 256 с.
21. Седов ЛИ. *Механика сплошной среды*. Т. 1. М., Наука, 1970, 492 с.
22. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости*. Под ред. ВД. Купрадзе. М., Наука, 1976, 664 с.
23. Победря БЕ, Георгиевский ДВ. *Основы механики сплошной среды*. Курс лекций. М., Физматлит, 2006, 272 с.
24. Müller I, Müller WH. *Fundamentals of thermodynamics and applications: with historical annotations and many citations from Avogadro to Zermelo*. Springer, Berlin, 2009, 404 с.
25. Müller I, Ruggeri T. *Rational extended thermodynamics*. Springer, New York, 1998, 396 с.
26. Germain P, Nguyen QS, Suquet P. Continuum thermodynamics. *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50:1010–1020.
27. Truesdell C. *Rational Thermodynamics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984, 578 p.
28. Müller I, Weiss W. *Entropy and Energy: A Universal Competition*. Springer, Berlin, 2005, 263 с.
29. Zhilin PA. Mechanics of deformable directed surfaces. *Int. J. Solids Structures*, 1976, 12:635–648.
30. Еремеев ВА, Зубов ЛМ. *Механика упругих оболочек*. М., Наука, 2008, 280 с.
31. Naghdi PM. The theory of plates and shells. In S. Flügge, C. Truesdell (Eds.), *Handbuch der Physik*. Berlin, Springer, 1972, VIa/2:425–640.
32. Green AE, Naghdi PM. On thermal effects in the theory of shells. *Proc. of the Royal Society of London A*, 1979, 365:161–190.
33. Pietraszkiewicz W. Refined resultant thermomechanics of shells. *Int. J. of Engineering Science*, 2011, 49:1112–1124.
34. Eremeyev VA, Pietraszkiewicz W. Thermomechanics of shells undergoing phase transitions. *J. of Mech. and Phys. of Solids*, 2011, 59(7):1395–1412.
35. Steinmann P, Häsner O. On material interfaces in thermomechanical solids. *Archive of Applied Mechanics*, 2005, 75(1):31–41.
36. *Основатели кинетической теории материи*. Сб. ст. под ред. АК. Тимирязева. М.-Л., ОНТИ, 1987, 220 с.
37. Розенбергер Ф. *История физики. Часть 3. История физики за последнее (XIX) столетие*. М.-Л., ОНТИ НКТП СССР. Вып. I, 1935, 302 с. Вып. II, 1936, 448 с.
38. Уиттекер Э. *История теории эфира и электричества. Классические теории*. Ижевск, НИЦ РХД, 2001, 512 с.
39. Льюис М. *История физики*. М., Мир, 1970, 464 с.
40. Müller I. *A history of thermodynamics: the doctrine of energy and entropy*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007, 324 с.
41. Euler L. *Dissertatio de igne, in qua eius natura et proprietates explicantur*. 1738.
42. *Развитие физики в России* (сб. ст.). Т. 1. М., Просвещение, 1970.
43. Барабанов НН. Леонард Эйлер и его вклад в развитие физики: К 300-летию со дня рождения ученого. *Физика*, 2007, 5:40–44.
44. Ломоносов МВ. *Полное собрание сочинений в 10-ти тт. Т. 2. Труды по физике и химии. 1747–1752 гг.* М.-Л., Изд. АН СССР, 1951.
45. Ivanova EA, Krivtsov AM, Zhilin PA. Description of rotational molecular spectra by means of an approach based on rational mechanics. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2007, 87(2):139–149.
46. Ivanova EA. Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component medium. *Acta Mechanica*, 2010, 61(1):261–286.
47. Ivanova EA. On one model of generalised continuum and its thermodynamical interpretation. *Mechanics of generalized Continua*. Eds. H. Altenbach, GA. Maugin, V. Erofeev. Berlin, Springer, 2011, p. 151–174.
48. Ivanova EA. Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component Cosserat continuum. *Technische Mechanik*, 2012, 32(2–5):273–286.
49. Cosserat E. et F. *Theorie des corps deformables*. Hermann, Paris, 1909.
50. Dixon RC, Eringen AC. A dynamical theory of polar elastic dielectrics. I. *Int. J. Engng. Sci.*, 1965, 3:359–377.
51. Можен Ж. *Механика электромагнитных сплошных сред*. М., Мир, 1991, 560 с.
52. Пашков АГ, Бубнов ВА, Яновский СЮ. *Волновые явления теплопроводности*. М., 2004, 296 с.

Иванова Елена Александровна

д.ф.-м.н., проф.

С-Петербургский гос. политехнический ун-т,

29, Политехническая ул, 195251, Санкт-Петербург, Россия
ivanova@ei5063.spb.edu

Институт проблем машиноведения РАН

в.н.с.

61, Большой пр. В.О., 199178 Санкт-Петербург.

MODELING OF THERMOELASTIC PROCESSES IN THREE-DIMENSIONAL MEDIA AND SHELLS BY MEANS OF THE COSSERAT CONTINUUM WITH MICROSTRUCTURE

Ivanova E. A.

Saint-Petersburg State Polytechnical University, <http://www.spbstu.ru>

195251, Saint-Petersburg, Russian Federation

ivanova@ei5063.spb.edu

Institute for Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences

199178, Saint-Petersburg, Russia Federation

In continuum mechanics the temperature is considered to be a quantity measured by thermometer and any mechanical interpretation of temperature is left out. In kinetic theory and statistical physics the temperature is considered as average kinetic energy of the chaotic motion of molecules. The conception of thermal motion of molecules does not contradict continuum mechanics. However, it is very difficult to use this mechanical model of temperature for derivation of the equations of continuum mechanics since the chaotic motion of molecules is ignored in continuum mechanics and the temperature is connected with the internal energy. Our purpose is to propose the mechanical interpretation of the temperature which can be foundation for description of thermal processes within the framework of continuum mechanics and by using the methods of continuum mechanics. The main idea is to introduce the Cosserat continuum with internal structure and additional degrees of freedom. We believe that characteristics of rotational motions of internal structure and moment interactions connected with internal structure can be associated with the temperature and other thermodynamical quantities provided that the mathematical description of the proposed model can be reduced to the well-known equations of thermoelasticity.

Keywords: continuum mechanics, shell theory, Cosserat continuum, continuum with microstructure, thermoelasticity

PACS: 46.05.+b, 46.25.Cc, 46.25.Hf, 46.70.-p, 46.70.De, 65.40.Ba, 65.40.De, 65.40.G-, 65.40.Gr, 65.40.gd.

Bibliography - 52 references

Received 08.04.2013

RENSIT, 2013, 5(1):98-110

REFERENCES

1. Prigogine I, Kondepudi AD. *Modern Thermodynamics. From heat engines to dissipative structures*. Moscow, Mir Publ., 2002, 461 p.
2. Prigogine I. *Introduction to thermodynamics of irreversible processes*. Izhevsk, NITs RKhD Publ., 2001, 160 p.
3. De Groot SR. *The thermodynamics of irreversible processes*. Moscow, GITTL Publ., 1956, 281 p.
4. Gyarmati I. *Non-equilibrium thermodynamics. Field theory and variational principles*. Moscow, Mir Publ., 1974, 303 p.
5. Bakhareva IF. *Nonlinear nonequilibrium thermodynamics*. Saratov, SGU Publ., 1976, 141 p.
6. Ziegler G. *Extreme principles of thermodynamics of irreversible processes and continuum mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1966, 136 p.
7. Zhou D, Casas Baskes H, Lebon J. *Extended irreversible thermodynamics*. Moscow-Izhevsk, NITs RKhD Publ., 2006, 528 p.
8. Truesdell C. *The elements of continuum mechanics*. Springer-Verlag. New York. 1965.
9. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Moscow, Mir Publ., 1975, 592 p.
10. Palmov VA. *Vibrations of elastic-plastic bodies*. Moscow, Nauka Publ., 1976, 328 p.
11. Kovalenko AD. *Thermoelasticity*. Kiev, Vischa shkola Publ., 1975, 216 p.
12. Kuvyrkin GN. *Thermomechanics of deformable solid at high-intensity loading*. Moscow, MGTU Publ., 1993, 142 p.
13. Zarubin VS, Kuvyrkin GN. *Mathematical models of thermal mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 168 p.
14. Zhilin PA. *Advanced problems in mechanics. V. 1*. St.Pb., IPME RAS Publ., 2006, 306 p.
15. Zhilin PA. *Advanced problems in mechanics. V. 2*. St. Petersburg, IPME RAS Publ., 2006, 271 p.
16. Zhilin PA. *Applied Mechanics. Fundamentals of the theory of shells*. St.Pb., SPbSTU Publ., 2006, 167 p.
17. Zhilin PA. *Applied Mechanics. The theory of thin elastic rods*. St.Pb., SPbSTU Publ., 2007, 101 p.
18. Zhilin PA. *Mathematical theory of inelastic media. Uspekhi Mekhaniki*, 2003, 2(4):3-36 (in Russ.).
19. Zhilin PA. *Rational continuum mechanics*. St.Pb., SPbSTU Publ., 2012, 584 p.
20. Nowacki W. *Dynamical problems of thermo-elasticity*. Moscow, Mir Publ., 1970, 256 p.
21. Sedov LI. *Mechanics of Continua. V. 1*. Moscow, Nauka Publ., 1970, 492 p.
22. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermo-elasticity Ed. Kupradze VD. Moscow, Nauka Publ., 1976, 664 p.
23. Pobedrya BE, Georgievski DV. *Fundamentals of continuum mechanics. A course of lectures*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 272 p.
24. Müller I, Müller WH. *Fundamentals of thermodynamics and applications: with historical annotations and many citations from Avogadro to Zermelo*. Springer, Berlin, 2009, 404 c.

25. Müller I, Ruggeri T. *Rational extended thermodynamics*. Springer, New York, 1998, 396 c.
26. Germain P, Nguyen QS, Suquet P. Continuum thermodynamics. Trans. ASME. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50:1010–1020.
27. Truesdell C. *Rational Thermodynamics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984, 578 p.
28. Müller I, Weiss W. *Entropy and Energy: A Universal Competition*. Springer, Berlin, 2005, 263 c.
29. Zhilin PA. Mechanics of deformable directed surfaces. *Int. J. Solids Structures*, 1976, 12:635–648.
30. Yermeev VA, Zubov LM. *Mechanics of elastic shells*. Moscow, Nauka Publ., 2008, 280 p.
31. Naghdi PM. The theory of plates and shells. In S. Flügge, C. Truesdell (Eds.), *Handbuch der Physik*. Berlin, Springer, 1972, VIa/2:425–640.
32. Green AE, Naghdi PM. On thermal effects in the theory of shells. *Proc. of the Royal Society of London A*, 1979, 365:161–190.
33. Pietraszkiewicz W. Refined resultant thermomechanics of shells. *Int. J. of Engineering Science*, 2011, 49:1112–1124.
34. Eremeyev VA, Pietraszkiewicz W. Thermomechanics of shells undergoing phase transitions. *J. of Mech. and Phys. of Solids*, 2011, 59(7):1395–1412.
35. Steinmann P, Häsner O. On material interfaces in thermomechanical solids. *Archive of Applied Mechanics*, 2005, 75(1):31–41.
36. *The founders of the kinetic theory of matter* (Coll. of articles). Ed. Timirjazev AK. Moscow-Leningrad, ONTI Publ., 1987, 220 p.
37. Rosenberger F. *History of Physics. P.3. The history of physics in the last (XIX) century*. Moscow-Leningrad, ONTI Publ., Iss. I, 1935, 302 p. Iss. II, 1936, 448 p.
38. Whittaker E. *History of the theories of ether and electricity. The classical theory*. Izhevsk, NITs RKhL Publ., 2001, 512 p.
39. Liozzi M. *History of Physics*. Moscow, Mir Publ., 1970, 464 p.
40. Müller I. *A history of thermodynamics: the doctrine of energy and entropy*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007, 324 c.
41. Euler L. *Dissertatio de igne, in qua eius natura et proprietates explicantur*. 1738.
42. *The development of physics in Russia* (coll. of articles). V. 1. Moscow, Prosveschenie Publ., 1970.
43. Barabanov NN. Leonard Euler and his contribution to the development of physics: the 300th anniversary of the birth of the scientist. *Physics*, 2007, 5:40–44 (in Russ.).
44. Lomonosov MV. *Complete Works in 10 vols. V. 2. Works on physics and chemistry. 1747–1752*. Moscow-Leningrad, AN USSR Publ., 1951.
45. Ivanova EA, Krivtsov AM, Zhilin PA. Description of rotational molecular spectra by means of an approach based on rational mechanics. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2007, 87(2):139–149.
46. Ivanova EA. Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component medium. *Acta Mechanica*, 2010, 61(1):261–286.
47. Ivanova EA. On one model of generalised continuum and its thermodynamical interpretation. *Mechanics of generalized Continua*. Eds. H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev. Berlin, Springer, 2011, pp. 151–174.
48. Ivanova EA. Derivation of theory of thermoviscoelasticity by means of two-component Cosserat continuum. *Technische Mechanik*, 2012, 32(2–5):273–286.
49. Cosserat E. et F. *Theorie des corps deformables*. Hermann: Paris, 1909.
50. Dixon RC, Eringen AC. A dynamical theory of polar elastic dielectrics. *Int. J. Engng. Sci.*, 1965, 3:359–377.
51. Mozhen J. *Mechanics of electromagnetic continua*. Moscow, Mir Publ., 1991, 560 p.
52. Shashkoff AG, Bubnov VA, Yanovsky SYu. *Wave phenomena of heat conduction*. Moscow, 2004, 296 p.