Основные положения эйлеровой механики*

Аннотация

Доклад содержит обсуждение современных трактовок основных понятий механики. Эти трактовки по форме, а иногда и по существу, отличаются от приводимых в учебниках механики. Хотя вводить какие бы то ни было модификации в устоявшиеся каноны крайне нежелательно и даже вредно, тем не менее в любой развивающейся науке наступает момент, когда модификации необходимы. Важно только, чтобы эти модификации не вступали в противоречие с уже доказанными положениями и не отрицали ничего из достигнутого ранее. В частности, эйлерова механика включает в себя все достижения ньютоновой механики и добавляет к ней важные новые возможности, расширяющие сферу приложения механики.

1 Введение

Основой классической механики, лежащей вне логических структур, является убеждение в возможности объективного описания окружающего нас мира. Главной особенностью трехтысячелетнего развития механики является ее эволюционный характер, при котором все основные структуры механики формировались и углублялись многими поколениями ученых. Когда тому или иному утверждению механики приписываются имена ученых, то это, как правило, не имена единоличных авторов, а дань великим заслугам этих ученых. Поэтому современные формулировки многих принципов значительно отличаются от первоначальных, но еще значительнее отличаются современные формы их применения. Заметить эти изменения удается только на больших интервалах времени. Революция в физике, произошедшая в начале XX века, не изменила эволюционного характера развития механики, но резко обострила внимание к ее логическим основам. Вместе с тем начал стремительно расти разрыв между новейшей физикой и классической механикой. Последняя не приняла многих концепций новейшей физики из-за их логической непоследовательности. С другой стороны, к концу XIX века уже отчетливо проявилось, что классической механике чего-то недостает. Никакое логическое совершенство, которое к тому же недостижимо, не могло затушевать того, что существовал целый ряд фактов, которые классическая механика не могла не только объяснить, но даже и полноценно описать. Главными здесь

*Жилин П.А. Основные положения эйлеровой механики // Труды XXIX летней школы “Актуальные проблемы механики”, Санкт-Петербург, 2002. С. 641–675.

были явления электромагнетизма, которые не вписывались без очевидных натяжек в структуры механики. Другим фактом являлось “печальное поведение” (выражение А.Ю.Ишлинского) Меркурия. Были, разумеется, и другие факты. Сказанное, однако, не привело ни к кризису механики, ни к ее застою. Напротив, с конца XIX века начало развиваться некое расширение классической механики, связанное с включением в сферу действия механики не только трансляционных (обычных) движений, но и так называемых спинорных движений. Без последних, по воззрениям Дж.Максвелла, описание электромагнитного поля невозможно. Новейшая физика пошла по другому пути и трактует магнитное поле как чисто релятивистский эффект, что неудивительно, ибо в новейшей физике и электрическое и магнитное поля вводятся через понятие силы. Другой важной особенностью, не учитываемой классической механикой, является отсутствие в ней понятия излучения, с помощью которого описывается взаимодействие электромагнитного поля с веществом. Описанные и некоторые другие особенности классической механики были почему-то объявлены органическими пороками классической механики и новейшая физика заявила о “решительном отказе от воззрений классической механики при описании явлений микромира”. Здесь не место вдаваться в дискуссии. Отметим только, что истинные возможности механики намного больше тех, о которых говорят физики. Цель данного краткого сообщения как раз и состоит в том, чтобы дать набросок взглядов современной рациональной механики. Огромный вклад в формирование этих взглядов внес Леонард Эйлер, который впервые указал на принципиальную неполноту ньютоновской механики. Показательно, что роль Л. Эйлера долгое время оставалась неосознанной. Например, Г. Герц [8] пишет: “...главные вехи (развития механики) обозначены именами Архимеда, Галилея, Ньютона, Лагранжа.” Как видим, имя Эйлера в этом перечне даже не фигурирует. Подобная позиция присуща и подавляющему большинству современных работ по теоретической физике. Автор полагает, что если бы Дж. Максвелл, Г. Лоренц и другие крупнейшие физики XIX-го века были осведомлены о результатах позднего Л. Эйлера, то облик современной физики мог бы быть совершенно другим. К сожалению, резко негативную роль сыграла здесь талантливая, но крайне легковесная, книга Э. Маха [9].

В заключение этого пункта подчеркнем, что, несмотря на обилие аксиом, изложенное ниже ни в коем случае нельзя рассматривать как попытку аксиоматического построения механики. Вполне очевидно, что так называемая шестая проблема Гильберта принципиально не допускает решения.

2 Пространство, время, движения

2.1 Тела отсчета. Время. Системы отсчета

Наиболее глубинными представлениями в механике являются представления о пространстве и времени. Долгое время эти представления опирались на чисто интуитивное восприятие этих понятий. В частности, общеизвестны ньютоновские определения абсолютного пространства и времени [1]. Основным в них является постулат об объективном характере пространства и времени. Однако использовать ньютоновские определения в рациональных построениях невозможно, ибо в однородном, лишенном всяких меток, пространстве невозможно обнаружить движение, равно как невозможно дать рациональное истолкование равномерному ходу времени. Все это подробно объясняется самим Ньютоном. По этой причине в рациональной механике вводятся некие рукотворные конструкции, называемые телами отсчета. Для этого в рассмотрение вводится репер с вершиной, обозначаемой меткой O, и тремя некомпланарными "векторами" $\mathbf{e}_k$, то есть тремя стрелками, сделанными, например, из дерева. Этот репер никак не привязан к неподвижному абсолютному пространству, ибо у нас нет возможности сделать это. "Векторы" $\mathbf{e}_k$ нельзя назвать настоящими векторами, ибо невозможно определить их направления в абсолютном (неподвижном) пространстве. Более того, невозможно сказать, остаются ли эти направления фиксированными относительно абсолютного пространства или они как-то меняются. Зато существование "векторов" $\mathbf{e}_k$ позволяет ввести в рассмотрение истинные векторы, направление которых относительно "векторов" $\mathbf{e}_k$ определяется однозначно. Итак, ввели репер $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Возьмем дополнительно три одномерных множества $-\infty \le x^k \le \infty$, $(k = 1, 2, 3)$, где числа x^k безразмерны, и введем вектор положения

$$\mathbf{r} = x^k\,\mathbf{e}_k \equiv x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3\,, \qquad -\infty \le x^k \le \infty\,. \tag{1}$$

Будем считать, что вектор $\mathbf{r}$, отвечающий неким фиксированным значениям чисел x^k, определяет точку, фиксированную относительно репера репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$. Определим скалярное произведение "векторов" $\mathbf{e}_k$

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv |\mathbf{e}_m|\,|\mathbf{e}_n| \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n), \tag{2}$$

где числа g_{mn} определены, если мы умеем измерять длины и углы, то есть имеем соответствующие инструменты, и образуют симметричную положительно определенную матрицу. В общем случае, числа g_{mn} определяют масштабы длин и углы в теле отсчета. Если числа g_{mn} заданы, то можно определить расстояние между точками A и B по формуле

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = g_{mn}\,(x^m_A - x^m_B)\,(x^n_A - x^n_B)\;. \tag{3}$$

Числа x^k_A называются координатами точки A. Вершине репера отвечают координаты $x^k_A = 0$.

Определение 2.2.1: *репер* $\{O, \mathbf{e}_k\}$ *с присоединенным к тему множеством точек (1) называется телом отсчета.*

Сам репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$ называется отсчетным, а числа x^k_A называются отсчетными координатами. Ни отсчетный репер, ни отсчетные координаты никогда не меняются, ибо именно они и порождают тело отсчета. Конечно, в теле отсчета можно вводить сколько угодно других систем координат, но об этом будет сказано позднее. Здесь важно подчеркнуть, что тензоры любого ранга лишены всякого смысла вне тела отсчета, и никакие операции между тензорами, заданными в разных телах отсчета, невозможны. Легко понять, что тело отсчета есть трехмерное евклидово пространство. Невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела относительно тела отсчета. Говоря о движении, мы подразумеваем, что вектор положения материальной точки в данном теле отсчета определяется как функция независимой переменной t, называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами. Понятие времени — одно из наиболее трудных в науках о Природе. И.Ньютон писал [2], с.45: "Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово "время" ... под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту *отличную от времени* величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время". Принять это высказывание можно только на глубоко интуитивном уровне, но никак ни на уровне логического мышления. Поэтому к концу XIX века в механике утвердилась точка зрения, зафиксированная Л.Больцманом: "Взгляд на хронометр дает нам значение той независимой переменной, которую мы назвали временем" [3], с.8. Конечно, неудовлетворенность подобным определением времени оставалась. Например, в прошлом существовала традиция завершать диссертации списком нерешенных проблем. В 1900 г. П.Боль среди таковых проблем указал следующую: "Желательно было бы ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь" [4], с.198. Аналогичное требование прозвучало и в знаменитом докладе Д.Гильберта на II Международном конгрессе по математике в Париже (1900 г.) при формулировке им 6-ой проблемы. Трудности, возникающие при определении времени, да и многих других понятий механики, наиболее полно были проанализированы во многих работах А.Пуанкаре — см., например, [5]. Удивительно, что эти исследования до их пор либо вообще игнорируются, либо очевидным образом искажаются. Если говорить о времени, то согласно А.Пуанкаре, главная проблема в том, что отсутствует гарантия действительного равенства двух равных по выбранным часам интервалов времени, т.е. это проблема ньютоновского равномерного течения времени. Одно из главных интуитивных представлений о свойствах времени заключается в принятии объективного характера понятий прошлого и будущего. Многие убеждены в необратимости течения времени, т.е. в том, что прошлое и будущее никогда не меняются местами. В этом и состоит принцип причинности, принимаемый явно или неявно в механике. Правда, в новейшей физике понятия прошлого и будущего уже относительны и зависят от выбора системы отсчета. Поэтому принцип причинности в новейшей физике не работает. Не вдаваясь в дискуссии по этому вопросу, отмечаем, что данная работа следует классическим традициям.

Определение 2.2.2: *тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.*

Можно ввести сколько угодно систем отсчета и пока что все они равноправны. Пусть некая материальная точка движется в выбранной системе отсчета, т.е. ее вектор положения $\mathbf{r}_A$ задан как функция времени $\mathbf{r}_A(t)$. Последняя полностью определяет движение частицы относительно тела отсчета. Однако такое описание не носит объективного характера, ибо мы не в состоянии понять, что именно движется: частица, тело или и то и другое вместе. Причем степень нашего незнания произвольно велика: любая функция $\mathbf{r}_A(t)$ может трактоваться как движение любой частицы относительно какого-либо тела отсчета. Понятно, что подобное описание движения никого не интересует. Не имеют объективного характера скорость $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$ ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_A(t)$ частицы, поскольку, помимо неопределенности в истолковании вектора $\mathbf{r}_A(t)$, здесь добавляется неопределенность в выборе времени, ибо время, введенное выше, определено с точностью до преобразования $t \to \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — любое монотонно возрастающее отображение. Из сказанного следует, что введенные выше системы отсчета — это совсем не те понятия, на которых базируется (по существу) классическая механика. Нужны какие-то дополнительные постулаты, носящие не логический, а физический (интуитивный) характер. В качестве такого постулата в классической физике используется принцип инерции Галилея.

2.2 Инерциальные системы отсчета

Фундаментальным принципом классической физики, лежащим в основе буквально всех ее понятий, является принцип инерции Галилея (**GPI**). Отказ от этого принципа разрушает все здание классической физики.

Принцип инерции Галилея: *всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.*

Следует ясно понимать, что **GPI** не является ни принципом, ни аксиомой, ни постулатом в строгом смысле этих понятий, ибо использует не определенные заранее понятия: абсолютное пространство, прямолинейное и равномерное движение. Фактически **GPI** дает определение понятия прямолинейного и равномерного движения: *движение изолированной частицы в абсолютном пространстве* ***называется*** *прямолинейным и равномерным.* При этом не имеет значения как на самом деле движется изолированная частица в абсолютном пространстве. Важно только то, что это движение является для нас эталоном, посредством которого будут оцениваться все остальные движения. Обратим внимание на то, что в абсолютном пространстве нельзя ввести понятие прямой линии. В теле отсчета понятие прямой линии уже определено. Поэтому из всех мыслимых тел отсчета можно отобрать кандидатов на роль абсолютного пространства.

Определение 2.2.3: *тело отсчета называется инерциальным, если траектория любой изолированной частицы есть прямая линия в этом теле отсчета.*

Инерциальных тел отсчета бесконечно много. Они движутся друг относительно друга и различаются масштабами расстояний (матрицами g_{mn}). Важно, что при отборе инерциальных тел отсчета не используется понятие времени.

Определение 2.2.4: *множество инерциальных тел отсчета называется абсолютным пространством.*

Определение 2.2.5: *часы называются оттарированными в соответствии с* **GPI**, *если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в инерциальном теле отсчета.*

Легко убедиться, что время, измеряемое по различным часам, оттарированным по Галилею, определено с точностью до линейного преобразования: $t \to kt + t_0$, где k определяет масштаб измерения времени, а t_0 — начало отсчета.

Определение 2.2.6: *инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными по Галилею, называется инерциальной системой отсчета.*

Определение 2.2.7: *множество инерциальных систем отсчета называется абсолютным пространством-временем классической физики.*

Из сказанного выше очевидно, что в классической физике пространство и время образует единое четырехмерное пространство, т.е. в нем пространственно-временные отношения не являются независимыми, как это утверждается в новейшей физике.

Замечание. Аксиоматическое введение времени детально обсуждается в работе С.Зарембы [7]. Более детальное изложение содержания этого и следующего пунктов можно найти в работе [11].

2.3 Системы отсчета и системы координат

Все точки тела отсчета идентифицированы отсчетными координатами. При желании можно изменить систему идентификации точек тела отсчета.

Определение 2.2.8: *система идентификации точек тела отсчета называется системой координат.*

Системой координат в каждой точке отсчета ставится во взаимно однозначное соответствие тройка чисел y^k

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^k(y, t) \qquad \Longrightarrow \qquad x' = x'(y', t)\,. \tag{4}$$

Здесь используется подвижная система координат. Системы координат можно заменять

$$y^{k'} = y^{k'}(y, t) \qquad \Longrightarrow \qquad y^m = y^m(y', t)\,. \tag{5}$$

где как бы забыто о существовании формул (4). Законы преобразования координат тензоров определяются именно по отношению к заменам (5), но ни в коем случае не по отношению к заменам систем отсчета. Поскольку выбор системы координат совершенно произволен, то выдвигается специальное требование.

Принцип объективности: *все физические величины и законы объективны и не зависят от выбора системы координат.*

Обратим внимание, что многие физические величины (скорости, кинетическая энергия и т.д.) зависят от выбора системы отсчета. Недопустимо поэтому смешение понятий систем отсчета и систем координат. Замены систем отсчета подробно обсуждаются [11], где также вводятся инвариантные дифференциальные операторы.

2.4 Трансляционные и спинорные движения

Существуют два принципиально различных вида движения: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости и т.д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые ниже спин-векторами. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия. Чтобы определить спин-вектор необходимо в теле отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, ортогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось. Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам.

Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору $\mathbf{a}_\star$ сопоставляется “обычный” вектор $\mathbf{a}$:

1) $\mathbf{a}$ расположен на оси спин-вектора $\mathbf{a}_\star$,

2) модуль $\mathbf{a}$ равен модулю $\mathbf{a}_\star$,

3) $\mathbf{a}$ направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (левоориентированная система отсчета).

Векторы, сопоставляемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Видим, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую и наоборот. Таким образом в ориентированной системе отсчета действуют два типа вектора (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (- 1) и называются аксиальными. Спинорные движения определяются заданием собственно ортогонального тензора $\mathbf{P}(t)$:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}=\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{E}\,,\qquad \det\mathbf{P}(t)=+1. \tag{6}$$

Тензор $\mathbf{P}(t)$ ниже будет называться тензором поворота [12]. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота, отличный от $\mathbf{E}$, однозначно представим в виде

$$\mathbf{P}(t)=(1-\cos\theta)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\cos\theta\,\mathbf{E}+\sin\theta\,\mathbf{m}\times\mathbf{E}\,, \tag{7}$$

где единичный вектор $\mathbf{m}=\mathbf{m}(t)$, является неподвижным вектором тензора $\mathbf{P}(t)$, т.е. $\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{m}(t)=\mathbf{m}(t)$, а угол $\theta=\theta(t)$ называется углом поворота. Вектор $\boldsymbol{\Theta}=\theta(t)\mathbf{m}(t)$ называется вектором поворота. Справедливо представление

$$\mathbf{P}(t)=\exp\left[\boldsymbol{\Theta}\times\mathbf{E}\right],\qquad \mathbf{R}=\Theta\times\mathbf{E}\,, \tag{8}$$

где тензор $\mathbf{R}=-\mathbf{R}^{\mathsf{T}}$ называется логарифмическим тензором поворота. Представление (8) часто оказывается необходимым при исследовании, например, устойчивости.

Изменение тензора поворота во времени характеризуется тензором $\dot{\mathbf{P}}$, но удобнее работать не с $\dot{\mathbf{P}}$, а с тензорами спина: $\mathbf{S}=\dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ — левый тензор спина и $\mathbf{S}_r=\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\dot{\mathbf{P}}$ — правый тензор спина. Оба тензора спина кососимметричны и имеют сопутствующие векторы: $\mathbf{S}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E}$, $\mathbf{S}_r=\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{E}$. Аксиальные векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ называются левой (истинной) и правой угловыми скоростями соответственно. Удобно пользоваться левым и правым уравнениями Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{P},\qquad \dot{\mathbf{P}}=\mathbf{P}\times\boldsymbol{\Omega},\qquad \boldsymbol{\omega}=\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\Omega}\,. \tag{9}$$

В динамике твердого тела вектор $\boldsymbol{\omega}$ принято называть угловой скоростью в пространстве, а вектор $\boldsymbol{\Omega}$ — угловой скоростью в теле.

Подробнее о тензоре поворота и его представлениях можно ознакомится по работам [8,9].

3 Тела и их динамические структуры

3.1 Тела–точки и их размерность

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Уже одно это обстоятельство не позволяет включить, например, электродинамику в рациональную (ньютоновскую) механику, т.к. материальную точку нельзя наделить зарядом. В эйлеровой механике ситуация резко меняется. В качестве исходного объекта в ней вводится тело–точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Относительно тела–точки считается, что оно существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение тела–точки определено, если задан его вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционная и угловая скорости тела–точки находятся по формулам

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t), \qquad \boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\right)_{\times}, \qquad \left((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}\right). \tag{10}$$

Аксиома T1: *кинетическая энергия тела–точки есть квадратичная форма его скоростей*

$$K = m\left(\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}\right), \tag{11}$$

где тензоры второго ранга $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{B}$, $m\mathbf{C}$ называются тензорами инерции тела–точки, скалярный множитель m выделен просто для удобства. Тензоры инерции не зависят от скоростей, но зависят от тензора поворота. Представление (11) значительно сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Например, кажется, что его можно упростить следующим рассуждением. Рассмотрим чисто трансляционное движение тела–точки. Тогда (11) принимает вид $2K = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_\star \cdot \mathbf{v}$. Положим здесь $\mathbf{v} = \nu\mathbf{n}$ и получим $2K = m\nu^2\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_\star \cdot \mathbf{n}$. Примем теперь во внимание, что система отсчета изотропна, т.е. телу-точке безразлично, в каком направлении ему двигаться. Так будет только тогда, когда выполняется равенство $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_\star \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_\star \cdot \mathbf{m}, \forall \mathbf{m}, \mathbf{n}$. Это равенство, в свою очередь, выполняется только для шарового тензора $\mathbf{A}_O = \alpha\mathbf{E}$, где множитель α можно положить равным единице, т.к. у нас уже выделен скалярный множитель m. К сожалению, это рассуждение неправильно и равенство $\mathbf{A}_O = \alpha\mathbf{E}$ можно постулировать, но нельзя доказать. Примем теперь во внимание, что тензоры инерции должны удовлетворять очевидным равенствам

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}(t), \tag{12}$$

где $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$ — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т.е. при тех значениях t_0, при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$. Формулы (12) следует понимать как три формулы для каждого из тензоров в отдельности. С учетом вышеприведенных рассуждений и (12) получаем, что тензор инерции $\mathbf{A}$ равен единичному, а представление (11) принимает вид

$$K = m\left(\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}\right), \tag{13}$$

где скалярный множитель m называется массой тела–точки.

Представление (13) обладает большой степенью общности. Но нельзя утверждать, что оно является максимально общим. В самом деле, допустим, например, что тело–точка это электрон. Тогда все наше рассуждение теряет силу, ибо электрон невозможно заставить совершать чисто трансляционные движения, у него $\boldsymbol{\omega}$ всегда, видимо, отлична от нуля. Правда, здесь никто в настоящее время не может сказать ничего определенного. Необходимы дополнительные исследования. Вероятно, для тяжелых частиц представление (13) является приемлемым, но для легких частиц, например, для нейтрино, видимо, необходимо пользоваться полным выражением (11), где множитель m лучше уже не выделять. При использовании (11) массой тела–точки удобнее называть величину $1/3\,\mathbf{tr}(m\mathbf{A})$. К сожалению, здесь не время и не место обсуждать многочисленные нюансы, заключенные в представлении (11). В принципе, на выражение для кинетической энергии налагаются очень слабые требования: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ и (12). Все остальные требования уже не очевидны и должны приниматься с оговорками. Например, казалось бы естественным потребовать от (11) положительной определенности. Однако, возможно, что можно требовать выполнения только более слабого неравенства

$$\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t}^{t+\Delta} K\,dt \geq 0, \qquad \forall\,\mathbf{v},\boldsymbol{\omega}: \quad |\mathbf{v}| \neq 0,\ |\boldsymbol{\omega}| \neq 0, \tag{14}$$

где Δ — малый интервал времени порядка периода обращения электрона по орбите вокруг ядра.

Для целей данной работы нет необходимости в дальнейших обсуждениях (11), ибо нас интересуют только основные структуры.

Определение 2.3.1: *число независимых параметров, определяющих кинетическую энергию тела–точки и не зависящий от движения тела–точки, называется размерностью тела–точки.*

Размерность материальной точки равна единице $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{0}$, причем единственным параметром является масса. Размерность абсолютно твердого тела равна четырем: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}$ — центральный тензор инерции; параметрами являются масса и три главных центральных момента инерции. Размерность частиц, необходимых для построения электродинамики, заведомо больше четырех. В общем случае, размерность частицы (11) равна 12, а тела–точки (13) — 10.

Определение 2.3.2: *количеством движения* $\mathbf{K}_1$ *тела–точки называется линейная форма скоростей*

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}). \tag{15}$$

Определение 2.3.3: *кинетическим моментом* $\mathbf{K}_2^Q$ *тела–точки, вычисленным относительно опорной точки* Q*, зафиксированной в данном теле отсчета, называется линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле*

$$\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = m\,[(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega}]. \tag{16}$$

Здесь первое слагаемое называется моментом количества движения тела–точки, а второе слагаемое, т.е. величина $m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\omega})$, называется собственным кинетическим моментом или, короче, динамическим спином тела–точки.

В заключение этого пункта приведем пример воображаемого тела–точки, кинетическая энергия которого задается выражением

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{V}\cdot\mathbf{V} + q\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}J\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{17}$$

где m — масса тела–точки, J — момент инерции, q есть новый параметр, который не встречается в телах-точках, используемых в классической механике. Иными словами, параметр q определяет некое новое свойство частицы, которое условно будем называть зарядом. Этим примером мы хотим подчеркнуть, что новые свойства частиц нельзя вводить голословно, но они должны описываться теми или иными параметрами в динамических структурах, которые определяют тело–точку. Например, если мы хотим ввести такие свойства частицы, как “шарм”, “очарование”, “заряд” и т.д., то это должно быть отмечено в динамических структурах частицы. Кинетическая энергия, по определению, является положительно определенной функцией своих аргументов. Положительная определенность формы (17) обеспечивается условиями

$$m > 0, \quad mJ - q^2 > 0.$$

Количество движения и кинетический момент тела–точки (17) определяются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}\times(m\mathbf{V}+q\boldsymbol{\omega}) + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega}. \tag{18}$$

Как видим, и эти структуры не встречаются в классической механике. Забежав немного вперед, рассмотрим движение этой частицы по инерции в пустоте. При этом количество движения и кинетический момент частицы должны сохранять постоянные значения

$$m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega} = m\mathbf{V}_0 + q\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{a} = a\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{R}\times\mathbf{a} + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega} = q\mathbf{V}_0 + J\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{b}. \tag{19}$$

Здесь принято, что $\mathbf{R}(0)=\mathbf{0}$. Удобнее рассматривать последнее уравнение, продифференцировав его по времени и исключив из него трансляционную скорость. В результате получим уравнение

$$\left(J - \frac{q^2}{m}\right)\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} + \frac{qa}{m}\mathbf{e}\times\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1. \tag{20}$$

Решение этого уравнения ищем в виде прецессирующего вектора

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}(\varphi(t)\,\mathbf{e})\cdot\boldsymbol{\omega}_0, \quad \varphi(0) = 0. \tag{21}$$

Подставляя это выражение в (20) и используя уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qa}{q^2 - mJ} \equiv \alpha \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha t. \tag{22}$$

Интегрируя уравнения (19), нетрудно найти все искомые характеристики движения:

$$m\,\mathbf{R}(t) = (a - q\boldsymbol{\omega}_0\cdot\mathbf{e})t\,\mathbf{e} + q\alpha^{-1}\mathbf{e}\times\mathbf{Q}(\alpha t\mathbf{e})\cdot[\boldsymbol{\omega}_0 - (\boldsymbol{\omega}_0\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e}]. \tag{23}$$

Вектор $\mathbf{R}(t)$ показывает, что частица движется по спирали. Если начальные условия подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$a = q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e},$$

то движение частицы по инерции будет происходить по окружности, как это утверждали древние и, в частности, Пифагор. Для вектора скорости имеем выражение

$$m\,\mathbf{V}(t) = \mathbf{Q}(\alpha t\mathbf{e}) \cdot (a\,\mathbf{e} - q\,\boldsymbol{\omega}_0). \tag{24}$$

Видим, что трансляционная и угловая скорости частицы постоянны по модулю, но переменны по направлению, т.е. движение частицы по инерции остается равномерным. В этом примере следует обратить внимание, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (тела–точки) по инерции не обязательно является прямолинейным. Разумеется, речь идет не о классической частице. Но ведь никто не доказал, что, например, электрон является классической частицей (материальной точкой). Этот пример показывает, что в классической механике таятся огромные, еще не изученные, возможности. Здесь возможны ситуации, которые с первого взгляда могут показаться неправдоподобными. Тем не менее, они не более неправдоподобны, чем те "чудеса", которые происходят в микромире. Заметим, кстати, что чем глубже мы погружаемся в микромир, тем важнее становится роль спинорных движений. Последние в рассмотренном примере представлены не тензором поворота $\mathbf{Q}$, а вектором угловой скорости.

Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент исчерпывают список динамических структур тела–точки.

3.2 Тела и их динамические структуры

В механике любое тело рассматривается как совокупность неких первичных тел-точек. Например, в ньютоновской механике всякое тело рассматривается как совокупность материальных точек. Нет оснований отказываться от этой традиции. Однако здесь имеются проблемы, которые до сих пор не получили ясного разрешения. Все было бы очень просто, если бы была возможность ограничиться первичными телами–точками только одного типа, как это и делается в ньютоновской механике. На самом деле ситуация сложнее. Во-первых, современное состояние науки позволяет утверждать, что от действительно первичных тел-точек, если они вообще существуют, мы еще очень далеки. Во-вторых, первичные тела–точки, из которых современная механика составляет тела, существенно различны. В-третьих, и это главная проблема, первичные тела–точки в процессе взаимодействий могут не только менять свою структуру, но может меняться и их число. Например, $2n$ атомов водорода (первичные тела одного типа) при взаимодействии с n атомами кислорода (первичные тела–точки другого типа) образуют в результате n молекул воды (первичные тела–точки третьего типа). Таким образом, вместо $3n$ первичных тел-точек мы получили n первичных тел–точек. О том почему молекулу воды нельзя считать просто состоящей из трех тел-точек будет немного сказано при обсуждении понятия внутренней энергии. Могут возразить, что рассмотрение подобных трансформаций частиц выходит за рамки рациональной механики и составляет предмет химии. Так это и было до недавнего времени. Однако современные технологии таковы, что многие сложные физические, химические и механические явления уже нельзя изучать раздельно. Поэтому для их совместного рассмотрения необходимы такие формулировки фундаментальных законов, которые допускают существование сложных явлений, подобных указанным выше. Тем не менее, в данной работе мы будем придерживаться точки зрения, близкой к традиционной. Будем считать, что Вселенная рациональной механики есть множество тел-точек, структура которых определена выше. Выберем в системе отсчета простую замкнутую поверхность Ляпунова $\mathbb{S}_t$, которая может деформироваться и перемещаться относительно тела отсчета. Считается, что на $\mathbb{S}_t$ нет никаких тел-точек, хотя можно и отказаться от этого условия.

Определение 2.3.4: *множество $\mathfrak{M}_A$ тел-точек, находящихся внутри $\mathbb{S}_t$, называется телом A, а множество $\mathfrak{M}_A^e$ тел-точек, находящихся вне $\mathbb{S}_t$, называется окружением тела $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathcal{A}^e$.*

Объемом тела $\mathcal{A}$ называется объем, заключенный внутри $\mathbb{S}_t$, поэтому объем тела $\mathcal{A}$ не является физической (объективной) характеристикой тела $\mathcal{A}$.

Определение 2.3.5: *тело $\mathcal{A}$ называется закрытым, если оно не обменивается телами–точками со своим окружением: в противном случае тело $\mathcal{A}$ называется открытым.*

Аксиома T2: *кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела $\mathcal{A}$ аддитивны по телам-точкам, составляющим тело $\mathcal{A}$.*

Пусть все характеристики i-го тела–точки снабжаются индексом i. Тогда в соответствии с аксиомой **T2** имеем

$$K(\mathcal{A}) = \sum_{i\in\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} m_i \left(\frac{1}{2}\,\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{B}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}_i\cdot\mathbf{C}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i\right) = \sum_i m_i K_i, \quad (25)$$

где K_i называется массовой плотностью кинетической энергии. Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{1i}, \quad \mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{A}_i\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i. \quad (26)$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_i m_i \mathbf{K}_{2i}^Q, \quad \mathbf{K}_{2i}^Q = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ})\times\frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{v}_i} + \frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ})\times(\mathbf{A}_i\cdot\mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i. \quad (27)$$

В качестве простейшего примера вычислим динамические структуры абсолютно твердого тела, рассматриваемого в теоретической механике.

Определение 2.3.6: *совокупность тел-точек называется абсолютно твердым телом $\mathcal{A}$, если выполняются следующие два условия. Первое: для любых пар точек A_i и A_m, принадлежащих телу $\mathcal{A}$ и для любых моментов времени t_1 и t_2 справедливы равенства*

$$|\mathbf{R}_i(t_1) - \mathbf{R}_m(t_1)| = |\mathbf{R}_i(t_2) - \mathbf{R}_m(t_2)|\,. \quad (28)$$

Второе: тензоры поворота всех тел-точек одинаковы

$$\mathbf{P}_i(t) = \mathbf{P}_m(t) = \mathbf{P}(t), \tag{29}$$

причем $\mathbf{P}(t)$ *называется тензором поворота тела* $\mathcal{A}$.

Из (28) и требования непрерывности движения вытекает основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{P}(t)\cdot(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X)\,,\ \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i(0),\ \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(0),\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \tag{30}$$

где $\mathbf{R}_X(t)$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X, называемой полюсом, зафиксированным в теле $\mathcal{A}$. Принимая для тел-точек модель материальной точки

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{0}, \qquad \Longrightarrow \qquad K_i = \frac{1}{2}\, m_i \dot{\mathbf{R}}_i(t)\cdot\dot{\mathbf{R}}_i(t)$$

получаем кинетическую энергию, количество движения и кинетический момент тела $\mathcal{A}$ в виде

$$\begin{gathered} K(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\mathbf{R}}_X\cdot\dot{\mathbf{R}}_X + \dot{\mathbf{R}}_X\cdot\mathbf{B}_X\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{C}_X\cdot\boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m\,\dot{\mathbf{R}}_X + \mathbf{B}_X\cdot\boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q)\times\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \dot{\mathbf{R}}_X\cdot\mathbf{B}_X + \mathbf{C}_X\cdot\boldsymbol{\omega}, \end{gathered} \tag{31}$$

где $\dot{\mathbf{R}}_X$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, отвечающая повороту $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{B}_X$ и $\mathbf{C}_X$ — тензоры инерции тела $\mathcal{A}$, определяемые по формулам

$$\begin{gathered} \mathbf{B}_X = m\,(\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C)\times\mathbf{E} = \mathbf{P}(t)\cdot[m\,(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)\times\mathbf{E}]\cdot\mathbf{P}^T(t), \\ \mathbf{C}_X = \mathbf{P}(t)\cdot\left\{\sum_i m_i\left[(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)^2\,\mathbf{E} - (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)\otimes(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)\right]\right\}\cdot\mathbf{P}^T(t). \end{gathered} \tag{32}$$

В (31)–(32) через m обозначена масса тела $\mathbf{A}$, через $\mathbf{R}_X(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{r}_X$, $\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{r}_C$ — векторы положения полюса и центра масс тела $\mathbf{A}$

$$m = \sum_i m_i\,, \qquad \mathbf{R}_C(t) = \frac{1}{m}\sum_i m_i\,\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\left(\frac{1}{m}\sum_i m_i\,\mathbf{r}_i\right).$$

Для сплошных сред все суммы заменяются соответствующими интегралами. Если полюс X выбирается в центре масс тела $\mathcal{A}$, то $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, а тензор $\mathbf{C}$ называется центральным тензором инерции. В последние 30–40 лет сложилось мнение, что механику сплошных сред нельзя построить на основе “молекулярных” представлений. Это мнение обосновывается различными аргументами. В частности, К.Трусделл и Р.Тупин [14] считают это невозможным, поскольку на микроуровне действуют законы квантовой, а не классической механики. Может быть, это и в самом деле так. Но автор полагает, что возможности классической механики далеко не исчерпаны. Если для тел-точек рассматривать форму общего вида (11), то поведение этих тел-точек совсем не похоже на то, к которому мы привыкли. Не исключено, что использование тел-точек общего вида восстановит дееспособность классической механики и на микроуровне. Что касается перехода к сплошной среде, то здесь необходимо использовать так называемый нестандартный анализ, т.е. вернуться к языку, которым пользовался Л.Эйлер.

4 Воздействия

4.1 Силы и моменты

Центральной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Особенно отчетливо эта идея представлена у Л.Эйлера [15]. Для реализации этой идеи в механике вводятся специальные структуры, называемые воздействиями, и являющиеся первичными понятиями. Иногда думают, что первичные понятия не требуют определения. Это заблуждение. На самом деле первичные понятия вводятся определением их свойств. Введение воздействия опирается на аксиому, которая является неким дополнением к принципу инерции Галилея, продолжая его на тела общего вида.

Основная аксиома механики: *в инерциальной системе отсчета изолированное закрытое тело $\mathcal{A}$ движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.*

Обычно эту аксиому предпочитают доказывать как теорему, но при этом введение воздействий становится расплывчатым и ведет к неясностям в трактовке сил и моментов.

Аксиома F1: *в инерциальной системе отсчета причина изменения количества движения закрытого тела $\mathcal{A}$ обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством полярного вектора и называется силой $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующей на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$.*

Аксиома F2: *в инерциальной системе отсчета причина изменения кинетического момента закрытого тела $\mathcal{A}$, вычисленного относительно опорной точки Q, обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством аксиального вектора и называется моментом $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующим на тело $\mathcal{A}$ со стороны его окружения $\mathcal{A}^e$.*

При этом момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующий со стороны тела $\mathcal{B}$ на тело $\mathcal{A}$, вычисляется по правилу

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_{\mathrm{P}} - \mathbf{R}_{\mathrm{Q}}) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \tag{33}$$

где $\mathbf{R}_{\mathrm{Q}}$ определяет положение опорной точки Q; вектор $\mathbf{R}_{\mathrm{P}}$ — определяет произвольно выбираемую точку $\mathcal{B}$, называемую точкой приведения; вектор $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения P, но не зависит от выбора опорной точки Q. Полный момент $\mathbf{M}^{\mathrm{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по определению не зависит от выбора точки приведения. Силы и моменты сложны для восприятия начинающим. Трудность в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне доступные нам на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

а) сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела $\mathcal{B}$ на изменение положения тела $\mathcal{A}$;

б) момент $\mathbf{L}^{\mathrm{P}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела $\mathcal{B}$ на повороты тела $\mathcal{A}$ вокруг точки приведения P.

Для того, чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ необходимо проделать следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, 2) мысленно “заморозить” тело $\mathcal{A}$ и превратить его в абсолютно твердое, 3) мысленно придавать всем точкам $\mathcal{A}$ всевозможные бесконечно малые смещения $\xi\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$, произвольный единичный вектор. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным смещениям тела $\mathcal{A}$, то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление $\mathbf{e}_\star$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует смещению тела $\mathcal{A}$ в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_\star$ равна нулю. Для того, чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^{P}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, необходимо: 1) и 2) как для силы; 3) закрепить точки приведения в теле отсчета и относительно тела $\mathcal{A}$, т.е. тело $\mathcal{A}$ и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P; 4) мысленно поворачивать тело $\mathcal{A}$ вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi\mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$. Если тело $\mathcal{B}$ как-то препятствует описанным поворотам тела $\mathcal{A}$, то $\mathbf{L}^{P}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на $\mathbf{e}_{\star\star}$, что тело $\mathcal{B}$ не препятствует повороту тела $\mathcal{A}$ вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^{P}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ на $\mathbf{e}_{\star\star}$ равна нулю. Из аксиомы F2 следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ остался неизменным. Пусть P и S две разные точки приведения. Тогда имеем

$$\mathbf{L}^{S}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) + \mathbf{L}^{P}(\mathcal{A},\mathcal{B}). \tag{34}$$

Определение 2.4.1: *пара векторов* $\left\{\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B});\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B})\right\}$ *называется воздействием тела* $\mathcal{B}$ *на тело* $\mathcal{A}$.

Определение 2.4.2: *воздействие тела* B *на тело* A *называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения* $\mathbf{R}_P(t)$, *что при любых движениях тела* $\mathcal{A}$ *воздействие тела* $\mathcal{B}$ *на тело* $\mathcal{A}$ *определяется заданием пары векторов*

$$\{\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B});\, (\mathbf{R}_P(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})\}, \qquad \left(\mathbf{L}^{P}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{0}\right), \tag{35}$$

причем такая точка P *называется центром силового воздействия.*

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B})$, $\mathbf{L}^{P}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ — суть свободные векторы и ни к каким точкам тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела $\mathcal{A}$. Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать нетривиальные случаи. Сказанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, этого нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

Определение 2.4.3: *воздействие тела* $\mathcal{B}$ *на тело* $\mathcal{A}$ *называется чисто моментным, если* $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \mathbf{0}$.

Для первичных понятий невозможно дать определения. В таких случаях даются не определения самих понятий, а перечисляются свойства, органически присущие этим понятиям. Важнейшим свойством сил и моментов, подтвержденным всем ходом развития механики, является их аддитивность как по телам, составляющим тело $\mathcal{B}$, так и по телам, составляющим тело $\mathcal{A}$.

Аксиома F3: *сила* $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *и момент* $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *аддитивны по отделенным телам* $\mathcal{C}$ *и* $\mathcal{D}$, *составляющим тело* $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}=\mathcal{C}\vee\mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})=\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{C})+\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{D}), \quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing; \tag{36}$$

$$\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})=\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{C})+\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{D}), \quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing. \tag{37}$$

Вычисление момента $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ подразумевает выбор опорной точки и точки приведения. Опорная точка должна быть одна и та же в обеих частях (37). Выбор точки приведения осуществляется произвольно и для каждого из моментов $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{C}\vee\mathcal{D})$, $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{C})$, $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{D})$ может производиться независимо.

Аксиома F4: *сила* $\mathbf{F}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *и момент* $\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *аддитивны по отделенным телам* $\mathcal{C}$ *и* $\mathcal{D}$, *составляющим тело* $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}=\mathcal{C}\vee\mathcal{D}$

$$\mathbf{F}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D},\mathcal{B})=\mathbf{F}(\mathcal{C},\mathcal{B})+\mathbf{F}(\mathcal{D},\mathcal{B}), \quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing; \tag{38}$$

$$\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{C}\vee\mathcal{D},\mathcal{B})=\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{C},\mathcal{B})+\mathbf{M}^{Q}(\mathcal{D},\mathcal{B}), \quad \mathcal{C}\wedge\mathcal{D}=\varnothing. \tag{39}$$

Приведенными выше аксиомами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Введенные аксиомы не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксирует их основные свойства.

Примечания.

1 В литературе часто встречается термин “сила инерции”. Последняя, согласно сказанному выше, может называться силой только весьма условно, ибо “силы” инерции не удовлетворяют главному требованию — они не порождены другими телами, да и вообще не существуют в инерциальной системе отсчета.

2. Аксиомы аддитивности в книгах по механике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”. Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места.

4.2 Статика абсолютно твердого тела

В качестве простой иллюстрации применения понятий сил и моментов сформулируем необходимые условия равновесия абсолютно твердого тела.

Утверждение: *если абсолютно твердое тело* A *находится в покое (в равновесии), то внешние сила и момент, действующие на него, равны нулю, т.е.*

$$\mathbf{F}(\mathrm{A},\mathrm{A}^{e})=\mathbf{0}, \quad \mathbf{M}^{Q}(\mathrm{A},\mathrm{A}^{e})=(\mathbf{R}_{P}-\mathbf{R}_{Q})\times\mathbf{F}(\mathrm{A},\mathrm{A}^{e})+\mathbf{L}^{P}(\mathrm{A},\mathrm{A}^{e}). \tag{40}$$

При выполнении этих условий абсолютно твердое тело может совершать движение, сохраняющее его количество движения и кинетический момент. Чтобы исключить эти движения, необходимо принять дополнительное требование об отсутствии движения тела в какой-либо момент времени. При практическом использовании условий равновесия целесообразно применять аксиомы аддитивности.

Пример: *дано абсолютно твердое тело* A, *к точкам* B *и* C *которого прикреплены тонкие нити, передающие силы* $\mathbf{F}_{B}$ *и* $\mathbf{F}_{C}$; *выяснить, при каких ограничениях на силы* $\mathbf{F}_{B}$ *и* $\mathbf{F}_{C}$ *тело* A *находится в равновесии.*

Воздействия передаются на тело только посредством нитей, которые примем за тела окружения и обозначим теми же буквами, что и точки их прикрепления к телу

A. Таким образом, имеем $A^e = B \vee C$. Первый закон статики требует, чтобы сила $\mathbf{F}(A, A^e)$ обращалась в нуль. Поэтому имеем равенство

$$\mathbf{F}(A, A^e) = \mathbf{F}(A, B \vee C) = \mathbf{F}(A, B) + \mathbf{F}(A, C) \equiv \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \qquad (41)$$

При вычислении момента используем аксиому аддитивности

$$\mathbf{M}^Q(A, A^e) = \mathbf{M}^Q(A, B \vee C) = \mathbf{M}^Q(A, B) + \mathbf{M}^Q(A, C), \qquad (42)$$

где Q есть выбранная опорная точка. Для простоты совместим ее с началом в системе отсчета. В таком случае будем опускать символ опорной точки в обозначениях. При вычислении момента $\mathbf{M}^Q(A, B)$ необходимо сначала выбрать точку приведения. Выбирать ее можно произвольно. Если в качестве точки приведения выбрать какую-либо точку P, не совпадающую с точкой закрепления нити B, то собственный момент $\mathbf{L}^P(A, B)$ будет отличен от нуля. Действительно, если мы будем поворачивать тело A вокруг точки P, то нить B будет препятствовать этому повороту. Это и означает, что $\mathbf{L}^P(A, B)$ отличен от нуля. Если же в качестве точки приведения выбрать точку B, то собственно момент $\mathbf{L}^B(A, B)$ будет равен нулю, поскольку нить не сопротивляется изгибу. Аналогичные рассуждения нужно провести и для момента $\mathbf{M}^Q(A, C)$. Окончательно получаем равенство

$$\mathbf{M}^O(A, A^e) = \mathbf{M}^O(A, B) + \mathbf{M}^O(A, C) = \mathbf{R}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{R}_C \times \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \qquad (43)$$

Внешне это выражение не совпадает с (33), но оно легко преобразуется к виду (33). При этом легко убедиться, что не существует такой точки приведения, чтобы собственно момент $\mathbf{L}^P(A, A^e)$ равнялся нулю. Это означает, что в рассматриваемом примере внешнее воздействие окружения A^e на тело A не является чисто силовым, хотя воздействия от каждой из нитей являются чисто силовыми. Решая систему (41) – (43), получаем

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_C, \quad \mathbf{F}_B = \lambda(\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B), \qquad (44)$$

где величина λ остается произвольной. Если величина λ положительна, то положение равновесия устойчиво. Если величина λ отрицательна, то положение равновесия неустойчиво, что, разумеется, нужно доказывать отдельно.

5 Полная и внутренняя энергии

Энергия — одна из важнейших и наименее разработанных структур в рациональной механике. Даже понятие кинетической энергии, впервые введенное в неотчетливой форме Г.В.Лейбницем, далеко не сразу утвердилось в механике. Позднее понятие энергии было расширено включением в нее потенциалов внутренних и внешних сил. Однако это расширение носило формальный характер, а уравнение баланса энергии являлось следствием законов Ньютона, т.е. не было самостоятельной структурой. В механике сплошных сред дело обстояло иначе. В 1839г. Дж.Грин впервые ввел понятие внутренней энергии, которое прочно утвердилось в механике сплошных сред, а уравнение баланса энергии стало независимым от законов движения постулатом. Наиболее полному анализу понятие энергии подверглось в работах Г.Гельмгольца

[16] и А.Пуанкаре [5]. Однако итог этого анализа не вполне удовлетворителен из-за отсутствия ясной физической идеи. Нет ясного понимания концепции энергии и в настоящее время, хотя уже многие факты указывают на центральную роль энергии (не сводящейся к кинетической энергии) при исследовании многих проблем, особенно на микроуровне. Цель данного пункта не в прояснении концепции энергии, а в подчеркивании роли энергии, как самостоятельной структуры механики.

Кинетическая энергия тела $\mathcal{A}$ есть скалярная мера движения тела относительно выбранного тела отсчета. Сама по себе она не носит объективного характера и в этом смысле мало что определяет. Ясно, что кинетическая энергия далеко не полностью характеризует энергетическое состояние тела. Уже само существование тел в виде не распадающихся объектов указывает на присущее им “нечто”, что может выделяться или поглощаться при распаде тел или их деформации. Это “нечто” можно назвать внутренней энергией, а полную энергию E тела $\mathcal{A}$ представить в виде суммы

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}). \tag{45}$$

Функция $K(\mathcal{A})$ полностью определена. Внутренняя энергия $U(\mathcal{A})$ есть новая характеристика тела $\mathcal{A}$ и требует определения. Если внутренняя энергия определена, то и полная энергия тела определена. Часто различие между кинетической и внутренней энергиями тела $\mathcal{A}$ сводят к простому утверждению, что кинетическая энергия есть часть полной энергии, зависящая от скоростей тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$, а внутренняя энергия есть часть полной энергии, зависящая от положений тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$. Во многих случаях подобное разделение оказывается приемлемым и не ведет ни к каким неприятностям. Однако принятие этой точки зрения резко сужает область применимости механики и потому совершенно неприемлемо в фундаментальном плане. Качественное различие понятий кинетической и внутренней энергии состоит в следующем. Кинетическая энергия — это та часть полной энергии, которая зависит от выбора системы отсчета и потому не является физической (объективной) характеристикой тела. Внутренняя энергия — это та часть полной энергии тела, которая не зависит от выбора системы отсчета и связана с самим телом. Образно говоря, внутренняя энергия как бы вморожена в тело и перемещается вместе с ним. Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о любых системах отсчета, т.е. инерциальность системы отсчета не подразумевается. Внутренняя энергия характеризует способность тела запасать энергию внутри самого себя. Например, внутренняя энергия материальной точки постоянна и не меняется при ее движениях. То же самое можно сказать об абсолютно твердом теле. Внутренняя энергия тела, состоящего из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной, с точностью до постоянной величины равна энергии деформации пружины. Это простые примеры. Чтобы прояснить (или запутать) более сложную ситуацию, рассмотрим следующий идеализированный пример. Допустим, тело $\mathcal{A}$ состоит из $2n$ атомов водорода и n атомов кислорода, причем атомы рассматриваются как материальные точки (в этом и состоит идеализация). Между атомами действуют некие силы, которые потенциальны. Полная энергия этого тела есть сумма кинетических энергий всех атомов и потенциала внутренних сил. Иными словами, внутренняя энергия этого тела равна потенциалу внутренних сил. С другой стороны, известно что два атома водорода объединяются с одним атомом кислорода и образуют молекулу воды, которую, в свою очередь, можно рассматривать как материальную точку (еще одна идеализация). Поэтому тело $\mathcal{A}$ можно рассматривать как состоящее из n тел-точек (молекул воды), между которыми действуют потенциальные силы. В этом случае полная энергия тела $\mathcal{A}$ есть сумма кинетических энергий молекул и потенциала внутренних сил. Понятно, что полные энергии тела $\mathcal{A}$ в обоих случаях должны совпадать, хотя и кинетические энергии, и внутренние энергии тела $\mathcal{A}$ в этих двух подходах будут различаться самым существенным образом. В этом примере мы видим, что разделение полной энергии на кинетическую и внутреннюю не носит абсолютного характера. Отсюда и многочисленные проблемы, связанные с принятием формальных определений для энергии.

Не вдаваясь в дальнейшие обсуждения, сформулируем несколько аксиом относительно энергии, которые показывают направление существующих исследований.

Аксиома E1: *внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ зависит только от конфигурации тела $\mathcal{A}$, т.е. только от векторов положения $\mathbf{R}_i$ и тензоров поворота $\mathbf{P}_i$ тел-точек $\mathcal{A}_i$, составляющих тело $\mathcal{A}$*

$$U(\mathcal{A}) = U\left(\mathbf{R}_1, \mathbf{P}_1; \mathbf{R}_2, \mathbf{P}_2; \ldots; \mathbf{R}_N, \mathbf{P}_N\right). \tag{46}$$

Аксиома E2: *внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ аддитивна по парам тел-точек, составляющих тело $\mathcal{A}$*

$$U(\mathcal{A}) = U\left(\bigvee_{i=1}^{N} \mathcal{A}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{N} \varphi_{i,k}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k\right), \qquad \varphi_{i,i}\left(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i\right) = 0. \tag{47}$$

Эта аксиома часто ставится под сомнение, например, для ионных взаимодействий. Однако на самом деле в физике никогда не анализировались потенциалы вида (46). Не доказано, но по всей видимости аксиома (47) необходима для согласования с аксиомами аддитивности воздействий. Следует обратить внимание на тот факт, что внутренняя энергия тела A, в отличие от его кинетической энергии, не аддитивна по телам, составляющим тело A.

Аксиома E3a: *внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ является индифферентным скаляром, т.е. она не зависит от выбора системы отсчета.*

Аксиома E3b: *внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$ не изменится, если на движение тела $\mathcal{A}$ наложить дополнительное движение тела $\mathcal{A}$, как жесткого целого.*

Последние две аксиомы эквивалентны. Следствием аксиом E1–E3 являются утверждения:

а) *внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$, являющегося системой материальных точек, по необходимости имеет вид*

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{N} \varphi_{i,k}\left(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|\right). \tag{48}$$

б) *внутренняя энергия тела $\mathcal{A}$, состоящего из тел-точек общего вида, по необходимости имеет вид*

$$U(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{N} \varphi_{i,k}\left(\mathbf{P}_i^T \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k); \mathbf{P}_i^T \cdot \mathbf{P}_k\right). \tag{49}$$

Ионные взаимодействия должны описываться внутренней энергией типа (49), который никогда не привлекался для этой цели. В качестве примера возможной функции $\Psi_{i,k}$ в (48) приведем такую

$$\Psi(r) = \Psi_0 e^{-r_0/r}\left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^m - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n\right], \qquad r \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|. \tag{50}$$

где Ψ_0, r_0, r_1, m, n — постоянные, различные, вообще говоря, для разных пар частиц, если последние не однотипны.

Постоянные $0 < r_0 \ll r_1$ положительны и обе весьма малы. Если $r_0 = 0$, то (50) переходит в потенциал Леннарда–Джонса. Постоянная r_0 имеет порядок радиуса орбиты электрона в атоме. Поэтому при $r_0 \gg r_1$ (50) вновь совпадает с потенциалом типа Леннарда–Джонса. На первый взгляд потенциал типа (50) кажется странным, т.к. он допускает “слипание” тел-точек. Но именно это обстоятельство в целом ряде случаев сильно помогает. Принципы выбора конкретного вида потенциала довольно сложны для краткого описания, т.к. они связаны с вопросами существования устойчивых состояний тел и далеки от окончательных решений. Поэтому здесь мы ограничимся приведенными выше намеками.

В заключении этого пункта примем

Определение 2.5.1: *мощностью внешних воздействий на тело $\mathcal{A}$, состоящего из тел-точек $\mathcal{A}_i$, называется билинейная форма скоростей и воздействий*

$$N(\mathcal{A}) = \sum_{i\in\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}}\left[\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)\cdot\dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)\cdot\boldsymbol{\omega}_i\right]. \tag{51}$$

Обратим внимание, что здесь включены силы и моменты, действующие на тело–точку со стороны окружения всего тела $\mathcal{A}$, а не со стороны $\mathcal{A}_i^e$, т.е. окружение i-го тела–точки. Кроме того, под $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ понимается собственно момент, когда в качестве точки приведения выбран вектор положения $\mathbf{R}_i$ тела–точки $\mathcal{A}_i$, причем, напомним, $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ не зависит от выбора опорной точки Q.

6 Фундаментальные законы механики

Под фундаментальными законами механики понимают два закона динамики Эйлера (уравнение баланса количества движения и уравнение баланса кинетического момента) и два начала термодинамики, к которым относятся уравнение баланса энергии и второе начало термодинамики, не имеющее другого общепринятого наименования. Все эти законы суть некие логические утверждения, которые не вытекают из опыта и потому не могут быть опровергнуты опытным путем. Иными словами, фундаментальные законы отнюдь не являются законами Природы типа закона Всемирного тяготения. Фундаментальные законы — суть метод изучения Природы. При дальнейшем развитии механики существующие формулировки фундаментальных законов могут измениться, но не потому что неправильны, а потому что могут быть найдены их более эффективные выражения. Можно утверждать, что фундаментальные законы механики действуют на всех уровнях от атомной физики до космологии. Встречающиеся при этом проблемы суть следствия неправильного или непоследовательного применения фундаментальных законов.

6.1 Уравнение баланса количества движения

Формулировка первого закона динамики Эйлера: *скорость изменения количества движения тела $\mathcal{A}$ равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода количества движения $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$ в тело $\mathcal{A}$*

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A})\,. \tag{52}$$

Для закрытых тел величина $\mathbf{k}_1(\mathcal{A})$, как правило, равна нулю. Для материальной точки уравнение (52) есть второй закон Ньютона. Для закрытых тел уравнение (52) называют первым законом динамики Эйлера, открытым им в 1750 году. Из (52) и аддитивности по телам количества движения и сил немедленно следует третий закон Ньютона $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. Обратим внимание, что это равенство ничего не говорит о направлении силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Уравнение И.В.Мещерского есть просто запись уравнения (52).

Замечание: в физике весьма популярно мнение, что силой называется то, что стоит в правой части уравнения (52). Это заблуждение является источником многих недоразумений. Например, многие физики полагают, что третий закон Ньютона не выполняется в микромире. Однако в эйлеровой механике третий закон Ньютона уже не аксиома, а доказанная теорема, и она не может нарушаться. Противоречие возникает из-за того, что в микромире часто нельзя игнорировать скорость подвода количества движения в тело. Поэтому правую часть уравнения (52) нельзя называть силой.

У начинающих часто возникает затруднение с тем, как следует вычислять скорость подвода количества движения в тело. К сожалению, в общем случае этот вопрос не разрешен на формальном уровне, хотя на интуитивном уровне он вполне очевиден. Поэтому ограничимся двумя простыми примерами.

Пример: погрузка движущейся тележки

Пусть по рельсам движется тележка со скоростью $\mathbf{v}(t)$. При этом на тележку насыпается, например, песок. Поэтому масса $m(t)$ тележки с песком меняется во времени. Считаем, что на тележку никаких сил не действует. Это, в частности, означает, что колея прямолинейна, и трение в подшипниках колес отсутствует. Нужно найти скорость движения тележки.

Первый закон динамики записывается в виде

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \frac{dm(t)}{dt}\mathbf{u}(t), \tag{53}$$

где $dm(t)/dt$ есть скорость подвода массы, а $\mathbf{u}(t)$ есть абсолютная скорость, с которой масса $dm(t)$ подводится к тележке. Задачу можно немного усложнить. Пусть на тележку насыпается песок двух сортов. Тогда вместо (53) будем иметь следующее уравнение

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \rho_1(t)\mathbf{u}_1(t) + \rho_2(t)\mathbf{u}_2(t), \quad \frac{dm(t)}{dt} = \rho_1 + \rho_2, \tag{54}$$

где ρ_1, ρ_2 суть скорости подвода массы песка первого и второго сортов соответственно, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ суть скорости, с которыми упомянутые массы подводятся к тележке. Движение тележки существенно зависит от подводимого к ней количества движения.

Например, если песок подается из неподвижного (падает сверху в тележку) источника, то $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Если песок подается с вертолета, летящего над тележкой с той же скоростью,то $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. В первом случае скорость тележки будет уменьшаться с ростом ее массы, а во втором случае будет сохраняться неизменной. Можно, разумеется, и разгонять тележку, сбрасывая с нее песок с подходящей скоростью (реактивное движение).

Пример: задача Кейли

Чтобы еще немного пояснить особенности работы с открытыми системами, рассмотрим задачу Кэйли (1857) о падающей цепочке — см. стр.114 учебника [10]. В задаче требуется исследовать движение нерастяжимой тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. Пусть $\rho = \mathrm{const}$ и L суть погонная масса и длина цепи. В качестве тела A выбираем свисающую часть цепи, а через x обозначим ее длину. Запишем уравнение движения свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\, x\, \frac{dx}{dt}\right) = \rho\, g\, x - F + \frac{d(\rho x)}{dt}\,\frac{dx}{dt}, \tag{55}$$

где в левой части уравнения стоит скорость изменения количества движения свисающей части цепи. В правой части: первое слагаемое — вес свисающей части, второе слагаемое — сила, приложенная к верхнему концу свисающей части, последнее слагаемое есть скорость подвода количества движения в свисающую часть цепи. Отметим, что в уравнении, используемом Кэли, два последних слагаемых в правой части отсутствуют. Покажем, что так и должно быть. Уравнение (55) содержит две неизвестных функции. В качестве дополнительного уравнения запишем уравнение баланса количества движения для части цепи, лежащей на столе

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\,(L - x)\,0\right] = F + \frac{d\rho\,(L-x)}{dt}\,\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad F = \rho\,\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{56}$$

Подставляя полученное выражение для силы F в уравнение (55), приходим к уравнению, использованному Кэйли без должного обоснования. Примем, что в начальный момент времени цепь находилась в покое и свисала ее бесконечно малая часть, т.е. примем следующие начальные условия

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = g\, t^2/6. \tag{57}$$

Здесь опущены необходимые вычисления, поскольку их можно найти в [10]. Учебники по механике останавливаются на выводе закона движения (57), но любители парадоксов идут дальше. Выясним сохраняется ли энергия у движущейся цепи. При $t = 0$ цепь обладала только потенциальной энергией $P_0 = \rho\, g\, L^2$. Рассмотрим момент времени t_1, когда $x = L$, т.е. $t_1 = \sqrt{6L/g}$. В этот момент времени имеем

$$P_1 = \rho\, g\, L^2/2, \quad K_1 = \rho\, g\, L^2/3 \quad \Rightarrow P_1 + K_1 = 5\,\rho\, g\, L^2/6 \neq P_0 = \rho\, g\, L^2. \tag{58}$$

Спрашивается, куда пропала энергия $\rho\, g\, L^2/6$? Именно в этом усматривается парадокс. Ответ очевиден: эта часть энергии затрачена на мгновенный разгон бесконечно малых частей цепи от нулевой скорости до конечной скорости $\dot{x}$, т.е. в данной задаче бесконечно малые части цепи испытывают бесконечно большие ускорения. Менее тривиален вопрос о правильной записи уравнения баланса энергии в этой задаче. Собственно, именно в этом пункте и возникают наибольшие расхождения и, как следствие, парадоксы. Мы настаиваем, что уравнение баланса энергии должно выполняться во всех случаях, но его правильное написание требует определенной практики. Проверим его выполнение в задаче Кэйли. Через $\mathcal{U}$ обозначим массовую плотность внутренней энергии цепи, т.е. бесконечно малая часть цепи dx обладает внутренней энергией $dU = \rho\, dx\, \mathcal{U}$. Поскольку цепь нерастяжима, то массовая плотность внутренней энергии постоянна. Запишем уравнение баланса энергии для свисающей части цепи

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\rho\, x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \rho\, x\,\mathcal{U}\right] = \rho\, g\, x\,\frac{dx}{dt} - F\,\frac{dx}{dt} + \frac{d(\rho\, x)}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \mathcal{U}\right]. \qquad (59)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части определяют мощность внешних сил, действующих на свисающую часть цепи, а последнее слагаемое определяет скорость подвода энергии в систему. Нетрудно убедиться, что уравнение (59) для решения (57) тождественно выполняется. Чтобы яснее ощутить понятие подвода энергии в систему, запишем уравнение баланса энергии для всей цепочки

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\rho\, x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \rho\, L\,\mathcal{U}\right] = \rho\, g\, x\,\frac{dx}{dt} + \delta. \qquad (60)$$

Здесь δ есть скорость подвода энергии в цепочку. Полный подвод энергии в систему на интервале времени $[0, t_1]$ есть интеграл

$$\triangle = \int\limits_0^{t_1}\delta dt = \left[\frac{1}{2}\rho\, x\,\dot{x}^2\right]_0^{t_1} - \left[\frac{1}{2}\rho\, g\, x^2\right]_0^{t_1} = -\frac{1}{6}\,\rho\, g\, L^2, \qquad (61)$$

где использовано решение (57). В данном случае внутри системы происходит потеря энергии, причем энергия “не механического происхождения” имеет чисто механическую природу. Тем не менее, мы говорим, что энергия (61) рассеялась в окружающую среду в форме тепла. Неискушенному в механике открытых систем читателю будет полезно обдумать эту задачу во всех деталях. В частности, следует проследить происхождение и структуру подвода энергии. По аналогии с рассмотренным выше примером полезно ввести температуру и энтропию, а также дать им истолкование. В задачах такого рода очень трудно сформулировать жесткие правила. Только настойчивая практика позволит изучающим с легкостью преодолевать все возникающие проблемы. К сожалению (или к счастью), механика вообще и механика открытых систем в частности всегда будет включать в себя элементы искусства и никогда не будет принадлежать сфере чистой математики, как это виделось Лагранжу.

6.2 Уравнение баланса кинетического момента

Формулировка второго закона динамики Эйлера: *скорость изменения кинетического момента тела $\mathcal{A}$, вычисленного относительно опорной точки Q, равна* *моменту* $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ *плюс скорость подвода кинетического момента* $\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A})$ *в тело* $\mathcal{A}$

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A})\,. \tag{62}$$

Этот закон для закрытых тел $\left(\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{0}\right)$ впервые был открыт Л.Эйлером в 1776 году и носит название второго закона динамики Эйлера. В менее отчетливой форме Л. Эйлер использовал этот закон еще в 1758 году при формулировке уравнений динамики твердого тела. Как ни странно, но и в настоящее время второй закон динамики Эйлера, как фундаментальный постулат механики, не формулируется в существующих учебниках физики и механики. Относить этот закон к разряду теорем, как это считал Лагранж, разумеется нельзя. Если два закона динамики Эйлера применить к системе материальных точек, то они позволяют доказать, что внутренние силы в такой системе по необходимости являются центральными, т.е. направлены по линиям, соединяющим материальные точки. Поэтому в ньютоновской механике систем материальных точек никаких сил, кроме центральных, не существует. Экспериментально доказано, что силы между ионами в кристаллах не являются центральными. Это означает, что ионы, в общем случае, нельзя моделировать материальными точками. В качестве иллюстрации использования второго закона динамики рассмотрим простые примеры.

Пример: движение абсолютно твердого тела в центральном поле тяготения. Пусть в начале инерциальной системы отсчета расположено точечное тело с массой M. Пусть в поле тяготения этого тела движется абсолютно твердое тело A с массой m. Центральный тензор инерции тела A считается трансверсально изотропным и в отсчетном положении имеет вид

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu\,(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\,, \tag{63}$$

где λ, μ суть осевой и экваториальный центральные моменты инерции тела A соответственно. Количество движения и кинетический момент тела A задаются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\dot{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \tag{64}$$

где $\mathbf{R}, \mathbf{P}$ суть вектор положения центра масс тела A и тензор поворота тела A соответственно, $\boldsymbol{\omega}$ есть угловая скорость тела A, которая связана с тензором поворота тела A уравнением Пуассона (9). В качестве опорной точки при вычислении кинетического момента выбрано начало в системе отсчета. Запишем теперь первые два закона динамики для тела A.

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{R}}\right) = -G\frac{Mm}{R^3}\mathbf{R}, \tag{65}$$

где G есть универсальная гравитационная постоянная. Уравнение (65) имеет четыре интеграла движения (один скалярный и один векторный). Скалярный интеграл называется интегралом энергии трансляционного движения. Он получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (65) на вектор $\dot{\mathbf{R}}$ и имеет вид

$$\frac{1}{2}\, m\, \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} - G\, \frac{mM}{R} = \mathcal{E}_T = \text{const}, \tag{66}$$

где $\mathcal{E}_T$ будем называть энергией трансляционного движения тела A. Векторный интеграл, называемый законом сохранения момента количества движения, получается после векторного умножения обеих частей уравнения (65) на вектор $\mathbf{R}$ и имеет вид

$$\mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{H} = \text{const} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0}. \tag{67}$$

Из последнего равенства видно, что траектория центра масс тела A лежит в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{H}$ и называемой плоскостью эклиптики. Решение задачи (65)–(67) может быть найдено во всех учебниках механики и здесь опускается.

Уравнение баланса кинетического момента имеет вид

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t)\Big) = \mathbf{0}.$$

Отсюда с учетом интеграла (67) получаем еще один векторный интеграл, фиксирующий сохранение динамического спина тела A. Этот интеграл дается выражением

$$\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} = \text{const}. \tag{68}$$

Сохранение динамического спина элементарных частиц, очевидно, должно играть огромную роль в квантовой физике, если бы она учитывала в явном виде спинорные движения. Но, к сожалению, в настоящее время этого нет. Равенство (68) можно переписать в обращенной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \tag{69}$$

Решение этого уравнения совместно с уравнением Пуассона позволяет найти угловую скорость и повороты тела A. Разумеется к этим уравнениям должны быть добавлены начальные условия

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \tag{70}$$

Здесь мы приняли, что в качестве отсчетного положения тела A выбрано его начальное положение. Решение задачи (69)–(70) рассмотрим немного подробнее. Нетрудно убедится, что уравнение (69) допускает интеграл, который выражает закон сохранения энергии спинорного движения. Подчеркнем, что его нельзя называть законом сохранения вращательного движения, поскольку часть энергии вращательного движения, т.е. энергия трансляционного движения тела A вокруг центра притяжения, уже вошла в интеграл (66). Энергия спинорного движения вычисляется по формуле

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{L}. \tag{71}$$

Вычисляя производную по времени от энергии $\mathcal{E}_S$ и учитывая уравнение (69), немедленно убеждаемся, что энергия спинорного движения $\mathcal{E}_S$ сохраняется неизменной. Всякий тензор поворота, как хорошо известно, выражается через три параметра. Например, через углы Эйлера. Общая теорема о представлении тензора поворота через три параметра доказана в работе [12]. Закон сохранения энергии спинорного движения $\mathcal{E}_S = \text{const}$ показывает, что три вышеупомянутые параметра должны удовлетворять одному скалярному равенству (71). В результате, тензор поворота, тождественно удовлетворяющий закон сохранения энергии спинорного движения, может быть выражен через два произвольных параметра. Введем обозначение

$$\mathbf{Q}\left(\varphi(t)\mathbf{m}(t)\right) \equiv (1-\cos\varphi)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \cos\varphi\,\mathbf{E} + \sin\varphi\,\mathbf{m}\times\mathbf{E} \tag{72}$$

для поворота на угол φ вокруг вектора $\mathbf{m}$. Тогда искомый двухпараметрический тензор поворота может быть выражен в виде композиции двух поворотов

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}\left(\psi(t)\mathbf{m}\right)\cdot\mathbf{Q}\left(\varphi(t)\mathbf{e}\right), \quad \mathbf{m}\equiv\mathbf{L}/|\mathbf{L}| = \text{const}, \tag{73}$$

где угол собственного вращения φ задает вращение вокруг оси изотропии $\mathbf{e}$ тела A, а угол прецессии ψ задает прецессию тела A вокруг постоянного вектора динамического спина $\mathbf{L}$. Подстановка (73) в (71) дает

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_S = \frac{1}{2}\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{L}\cdot\mathbf{Q}\left(\psi\mathbf{m}\right)\cdot\mathbf{Q}\left(\varphi\mathbf{e}\right)\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{Q}^{T}\left(\varphi\mathbf{e}\right)\cdot\mathbf{Q}^{T}\left(\psi\mathbf{m}\right)\cdot\mathbf{L} = \\ = \mathbf{L}\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{L} = \text{const}.\end{gathered} \tag{74}$$

Здесь учтены очевидные тождества

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{Q}\left(\psi\mathbf{m}\right) = \mathbf{L}, \quad \mathbf{e}\cdot\mathbf{Q}\left(\psi\mathbf{e}\right) = \mathbf{e}.$$

Вычисляя угловую скорость композиции поворотов (73), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\varphi}\mathbf{Q}\left(\psi\mathbf{m}\right)\cdot\mathbf{e} = \mathbf{Q}\left(\psi\mathbf{m}\right)\cdot\left(\dot{\psi}\mathbf{m} + \dot{\varphi}\mathbf{e}\right) = \mathbf{Q}\left(\psi\mathbf{m}\right)\cdot\boldsymbol{\omega}_0. \tag{75}$$

Подставляя выражение (75) в уравнение (69) и умножая обе части получившегося уравнения на $\mathbf{Q}^{T}\left(\psi\mathbf{m}\right)$ слева, получаем

$$\dot{\psi}\mathbf{L} + l\dot{\varphi}\mathbf{e} = l\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{L} = l\boldsymbol{\omega}_0, \quad l = \sqrt{\mu^2\omega_0^2 + (\lambda^2-\mu^2)\left(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\omega}\right)^2}, \tag{76}$$

где l есть модуль вектора $\mathbf{L}$. Решение уравнения (76) находится элементарно и имеет вид

$$\psi = \frac{tl}{\mu}, \quad \varphi = \frac{t\,(\mu-\lambda)}{\mu}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\omega}_0) = \frac{t\,(\mu-\lambda)}{\lambda\mu}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{L}). \tag{77}$$

Таким образом, мы видим, что ось тела A прецессирует вокруг вектора динамического спина

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}\left(\psi(t)\mathbf{m}\right)\cdot\mathbf{Q}\left(\varphi(t)\mathbf{e}\right)\cdot\mathbf{e} = \mathbf{Q}\left(\psi(t)\mathbf{m}\right)\cdot\mathbf{e} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{e}'\cdot\mathbf{L} = \mathbf{e}\cdot\mathbf{L} \tag{78}$$

с постоянной скоростью прецессии $\dot{\psi}$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг собственной оси, причем угол между осью тела и вектором его динамического спина сохраняется неизменным.

Применим теперь полученные результаты к описанию вращения Земли. Это справедливо в при пренебрежении влиянием Луны и гравитационного момента от Солнца. Как известно, моменты инерции Земли различаются весьма незначительно

$$\lambda \simeq 1{,}0033\,\mu.$$

К сожалению, автор не знаком с деталями наблюдений по изучению вращения Земли и потому не в состоянии судить о степени их точности. Много полезных сведений о движении Земли можно найти в книге [13]. Поскольку вектор динамического спина постоянен, то он фиксирован относительно плоскости эклиптики. Считается [13], что ось Земли также фиксирована относительно плоскости эклиптики и составляет с ней угол $66^o33'$. Согласно (78) одновременная фиксация и динамического спина, и оси Земли возможна тогда и только тогда, когда вектор динамического спина направлен строго по оси Земли. В таком случае имеем

$$\mathbf{L} = \lambda\,\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0\mathbf{e} = \text{const}, \quad l = |\mathbf{L}| = \lambda\,\omega_0, \tag{79}$$

и различие между углами прецессии ψ и собственного вращения φ теряет смысл. Физически интерпретируема только сумма этих углов, равная, конечно, величине $t\omega_0$. С другой стороны, имеются сведения о том, что скорость вращения Земли не постоянна, а ось Земли слегка колеблется. Обычно это объясняется тем, что Земля не может считаться абсолютно твердым телом. Но, в дополнение к этому объяснению, существует и другая причина, по которой ось Земли может колебаться. Действительно, допустим, что направление динамического спина немного отличается от направления оси Земли. В этом случае ось Земли будет прецессировать вокруг вектора динамического спина и, следовательно, будет немного меняться угол между осью Земли и плоскостью эклиптики. Модуль вектора угловой скорости будет оставаться постоянным, но сам вектор угловой скорости будет также прецессировать вокруг вектора динамического спина. При этом смена суток на Земле будет определяться не вращением Земли вокруг собственной оси, а прецессией ее оси, как это видно из формул (77).

Пример: реакция в опоре свободно вращающегося тела. Рассмотрим абсолютно твердое тело, одна точка которого неподвижно закреплена и никаких сил, кроме реакции в опоре, на тело не действует. Эта задача мало отличается от рассмотренной выше, но мы хотим обратить внимание на одну ее особенность. Запишем уравнения движения.

Уравнение баланса количества движения

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\mathbf{R}}\right) = \mathbf{F}, \tag{80}$$

где вектор $\mathbf{R}$ определяет положение центра масс относительно неподвижной точки, сила $\mathbf{F}$ есть реакция в неподвижной точке. Уравнение (80) служит для нахождения реакции в опоре. По основной теореме кинематики имеем

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{r}, \tag{81}$$

где вектор $\mathbf{r}$ задает положение центра масс тела в отсчетном положении. Для нахождения тензора поворота P необходимо записать второй закон динамики. Имеем

$$\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\omega\right)^{\cdot} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\omega = \mathbf{L} = \text{const}, \tag{82}$$

где тензор инерции $\mathbf{C}$ вычислен относительно неподвижной точки и является трансверсально изотропным. Решение задачи (82) при заданных начальных условиях ничем не отличается от решения (73)–(77), построенного в предыдущем примере. Использовав (80), вычислим реакцию в опоре

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{Q}\,(\psi\mathbf{m}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\varphi}\,(\mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0 \otimes \mathbf{e})] \cdot \mathbf{Q}\,(\varphi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}. \qquad (83)$$

В выражении (83) использованы обозначения, принятые в (73)–(77). Как видим реакция в опоре вычисляется по довольно сложной формуле, причем ее направление меняется во времени и не совпадает с направлением вектора $\mathbf{R}$, определяющего положение центра масс. Вообразим теперь, что мы в состоянии измерять реакцию опоры и наблюдать вращательное движение тела. Допустим также, что мы ничего не знаем о втором законе динамики Эйлера. Возьмем далее два тела с одинаковыми тензорами инерции и зададим для них одинаковые начальные условия. В этом случае наблюдаемые движения этих двух тел будут совершенно одинаковыми. В то же время измеряемые реакции опор у этих тел могут быть совершенно разными, поскольку реакции зависят от положения центра масс в теле. Но центры масс у тел с одинаковыми тензорами инерции могут находится в различных точках тела, причем движение центров масс не контролируемо. Если мы стоим на позициях ньютоновой механики, то возникшая ситуация покажется нам парадоксальной, ибо наблюдаемые движения не определяют измеряемые силы. Для объяснения этого факта мы начнем придумывать некие вероятностные трактовки и говорить о нарушениях законов классической механики. Нечто похожее как раз и происходит в микромире. Современная физика для описания подобных явлений использует вероятностные законы квантовой физики.

6.3 Первое и второе начала термодинамики

В механике дискретных систем не обсуждаются такие понятия, как внутренняя энергия, тепло, температура, энтропия. Поэтому и основные законы термодинамики остаются за рамками классической механики. Вместе с тем, в механике сплошных сред законы термодинамики играют весьма важную роль. В результате, при переходе от дискретных систем к сплошным средам возникает некий логический разрыв, поскольку приходится вводить понятия, чуждые детерминированной механике дискретных систем. В данной работе общая концепция законов термодинамики не обсуждается. Тем не менее, кажется целесообразным ввести основные понятия термодинамики на элементарных примерах механики дискретных систем.

Если бы нас интересовали только системы с конечным (и не слишком большим) числом степеней свободы, то первых двух законов динамики в совокупности с определяющими уравнениями было бы вполне достаточно для полного анализа всех интересующих нас вопросов. В механике сплошных сред, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы, ситуация оказывается сложнее. Здесь уже невозможно описать состояние среды, пользуясь только понятиями сил и моментов. Дополнительно приходится вводить такие первичные понятия как внутренняя энергия, тепловая энергия, температура и энтропия. Собственно, понятие внутренней энергии можно ввести и в системах с конечным числом степеней свободы, где внутренняя энергия вводится как потенциал внутренних сил. В механике сплошных сред это уже не всегда возможно. Понятия температуры и энтропии знакомы практически всем. Тем не менее, их строгое определение наталкивается на серьезные затруднения. В механике сплошных сред эти затруднения до некоторой степени разрешаются формулировкой первого и второго начал термодинамики. В данной работе используются упрощенные формулировки, которые имеют своей целью на простых примерах пояснить такие основные понятия термодинамики как внутренняя энергия, температура и энтропия. В частности, понятие энтропии, используемое ниже, отличается от известных определений[1].

Уравнение баланса энергии или первый закон термодинамики: *скорость изменения полной энергии произвольной системы равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии "не механического происхождения", обычно в форме тепла.*

Дать общее и строгое определение понятию энергии "не механического происхождения" затруднительно. Поэтому ограничимся неопределенным заявлением о том, что энергия не механического происхождения — это та часть энергии, которая подводится не через мощность внешних воздействий. Поясним сказанное простейшим примером. Пусть два грузика, соединенные пружиной, могут совершать движения вдоль трубки с осью x. Рассмотрим две похожих ситуации. В первой из них между грузиками и стенками трубки действуют силы вязкого трения. Во втором случае стенки трубки идеально гладкие, но между грузиками вставлен демпфер вязкого трения. Полная энергия системы имеет один и тот же вид в обоих случаях

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2\right) + \frac{1}{2}\,c\,(x_1 - x_2)^2\,, \tag{84}$$

где c есть жесткость пружины. Однако уравнение баланса энергии в этих двух случаях пишется по разному

$$1.\quad \dot{E} = -b_1\,\dot{x}_1^2 - b_2\,\dot{x}_2^2; \qquad 2.\quad \dot{E} = -b\,\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_2\right)^2, \tag{85}$$

где постоянные коэффициенты b_1, b_2, b называются коэффициентами вязкости. В первом случае рассеяние энергии происходит за счет мощности внешних сил, причем подвод энергии "не механического происхождения" отсутствует. Во втором случае мощность внешних сил равна нулю, а рассеяние энергии происходит благодаря подводу (в данном случае — отводу) энергии "не механического происхождения". При этом мы часто говорим, что энергия рассеивается в окружающую среду в виде тепла.

Каждое уравнения баланса вводит в рассмотрение новое понятие. В первом законе динамики впервые вводится понятие силы. Во втором законе динамики вводится новое понятие момента, не сводящегося к понятию момента силы. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение сразу два новых понятия: внутреннюю энергию и скорость подвода энергии в систему. Немного ниже мы покажем, что и такие понятия, как температура и энтропия также вводятся посредством специальной математической формулировки уравнения баланса энергии.

Обсуждение уравнения баланса энергии проведем на элементарном примере двух грузиков, соединенных безынерционной пружиной общего вида. Предварительно рассмотрим случай одной материальной точки. При обычной трактовке подвод энергии "не механического происхождения" к материальной точке невозможен. Поэтому урав-

[1]Энтропия, видимо, одно из наиболее туманных понятий в механике, которое используется во многих смыслах, а иногда и вовсе без смысла.

нение баланса энергии для нее имеет простейший вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+U\right)=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}, \tag{86}$$

где U есть внутренняя энергия, $\mathbf{F}$ есть сила, действующая на материальную точку. Вычисляя производную по времени в левой части уравнения (86) и учитывая первый закон динамики $m\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}$, получаем, что внутренняя энергия материальной точки постоянна. Именно поэтому в классической механике внутренняя энергия исключается из рассмотрения. Между прочим, в упомянутой постоянной энергии заключаются огромные энергии, например, атомная энергия. Ситуация изменилась бы, если бы мы захотели рассматривать распад одной частицы на несколько новых частиц. В таком случае внутренняя энергия перестала бы быть неизменной. При этом игнорировать скорость подвода энергии уже было бы нельзя. Рассмотрим теперь тело, состоящее из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной. Допустим, что внутри этого тела возможны потери энергии, например, из-за наличия демпфера между частицами. Запишем уравнение баланса энергии для рассматриваемого тела

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m_1\,\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1+\frac{1}{2}\,m_2\,\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2+U\right)=\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{v}_1+\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{v}_2+\delta, \tag{87}$$

где U есть внутренняя энергия рассматриваемого тела, δ есть скорость подвода энергии в систему, а $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ — суть внешние силы, действующие на первую и вторую частицы соответственно. Подчеркнем, что в силы $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ не входят внутренние силы. В данном случае, внутренние силы — это силы, действующие на частицы со стороны пружины, а также силы внутреннего трения. Уравнение баланса энергии (87) можно переписать в эквивалентном виде

$$m_1\dot{\mathbf{v}}_1\cdot\mathbf{v}_1+m_2\dot{\mathbf{v}}_2\cdot\mathbf{v}_2+\dot{U}=\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{v}_1+\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{v}_2+\delta. \tag{88}$$

Уравнение (88) следует еще немного преобразовать и исключить из него внешние силы, поскольку они ни в какой степени не характеризуют рассматриваемую систему. Для этого выпишем уравнения движения (первый закон динамики) для обеих частиц в отдельности и для всего тела.

$$m_1\dot{\mathbf{v}}_1=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_{1i},\quad m_2\dot{\mathbf{v}}_2=\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_{2i},\quad m_1\dot{\mathbf{v}}_1+m_2\dot{\mathbf{v}}_2=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2, \tag{89}$$

где $\mathbf{F}_{1i}, \mathbf{F}_{2i}$ суть внутренние силы, действующие на первую и вторую частицы соответственно. Складывая первые два уравнения системы (89) и учитывая третье уравнение, получаем

$$\mathbf{F}_{1i}+\mathbf{F}_{2i}=\mathbf{0}. \tag{90}$$

Это аналог третьего закона Ньютона. С учетом уравнений (89) и (90) уравнению баланса энергии (88) можно придать следующий вид

$$\dot{U}=-\mathbf{F}_{1i}\cdot(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2)^{\cdot}+\delta. \tag{91}$$

Это уравнение носит название приведенного уравнения баланса энергии. Его существенное отличие от (88) состоит в том, что в него не входят никакие внешние параметры. Поэтому приведенное уравнение баланса энергии характеризует саму рассматриваемую систему и оказывается удобным для дальнейшего анализа. Но предварительно следует сказать еще несколько слов о понятии внутренней энергии.

По определению и по физическому смыслу она не может зависеть от скоростей изменения основных кинематических переменных. Но глубокое противоречие состоит в том, что внутренняя энергия, как правило, *обязана зависеть* от неких относительных скоростей игнорируемых нами переменных. Например, при деформации кристаллической решетки ее атомы смещаются от положений равновесия, и эти смещения меняют внутреннюю энергию решетки. В то же время, известно, что атомы не покоятся в узлах решетки, а совершают быстрые колебания относительно средних положений, которые и воспринимаются нами, как положения равновесия при макроскопическом рассмотрении. Представляется очевидным, что внутренняя энергия решетки зависит от скоростей упомянутых колебаний атомов, поскольку именно эти колебания определяют многие механические свойства тела. Если бы мы полностью учли движения атомов, то и в этом случае осталась бы проблема учета движений электронов внутри атома. Даже если бы мы рассматривали систему, состоящую, например, из свободных электронов, то осталась бы проблема учета энергии электромагнитного поля. Короче говоря, Вселенная всегда будет оставаться значительно богаче любых рассматриваемых нами моделей. И эта игнорируемая нашими моделями часть Вселенной всегда будет взаимодействовать с выделенными системами и влиять на ее внутреннюю энергию. Чтобы как-то разрешить это, строго говоря, неустранимое противоречие, можно поступить следующим образом. Будем считать, что плотность внутренней энергии зависит не только от конфигурации тела, т.е. от положений частиц, составляющих тело, в данный момент времени, но и от некоего параметра, называемого энтропией $\mathcal{H}$. Введение энтропии является попыткой как-то учесть зависимость внутренней энергии от скоростей неучитываемых нами степеней свободы. Всегда ли это возможно? Отрицательный ответ на этот вопрос очевиден. Но замечательно то, что этот прием часто оказывается весьма удовлетворительным с практической точки зрения. Не следует только наделять энтропию некими фундаментальными, вплоть до мистических, свойствами.

Вернемся теперь к приведенному уравнению баланса энергии (91). Примем, что внутренняя энергия рассматриваемого тела зависит от векторов положений частиц тела и энтропии. Использовав принцип независимости от выбора системы отсчета, нетрудно доказать, что внутренняя энергия рассматриваемого тела есть функция вида

$$U = U(\gamma, H), \quad \gamma \equiv |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2, \tag{92}$$

где параметр H будем называть энтропией. Внутренние силы представим в виде суперпозиции

$$\mathbf{F}_{1i} = \mathbf{F}_{1e}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, H) + \mathbf{F}_{1d}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dot{\mathbf{R}}_1, \dot{\mathbf{R}}_2, H). \tag{93}$$

Теперь приведенное уравнение баланса энергии (91) можно переписать в виде

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)^{\cdot} - \mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)^{\cdot} + \delta. \tag{94}$$

Левая часть этого равенства является полной производной по времени от внутренней энергии. Следовательно, и левая часть (94) должна быть полной производной. Чтобы получить полную производную введем в рассмотрение новую неизвестную переменную ϑ, которую в дальнейшем будем называть температурой, посредством равенства

$$\vartheta \dot{H} = -\mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)^{\cdot} + \delta. \tag{95}$$

Следует подчеркнуть, что равенство (95) не требует принятия никаких новых допущений. Правда, остается пока неясным, можно ли назвать введенный параметр ϑ температурой. Проблема в том, что, например, в статистической физике температура вводится посредством вполне определенных рассуждений, которые невозможно увязать с принятым выше способом введения температуры. В данной работе мы лишены возможности провести детальное обсуждение этого трудного вопроса. Поэтому ограничимся декларацией о том, что принятый способ введения температуры, в принципе, согласуется с механикой сплошных сред и классической термодинамикой.

Аналог уравнения (95) в механике сплошных сред носит название уравнения теплопроводности. Подставив (95) в приведенное уравнение баланса энергии (94), получим равенства

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)^{\cdot} + \vartheta \dot{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{1e} = 2\frac{\partial U}{\partial \gamma}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), \quad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial H}. \tag{96}$$

Последними двумя равенствами определяются сила упругости, возникающая при деформации пружины, и температура, если считать, что внутренняя энергия системы каким-то образом задана. Конкретный вид внутренней энергии зависит от физических свойств системы и может быть установлен только на основе интуитивных представлений, включающих знание основных экспериментальных данных. Если энтропию считать не имеющей физической размерности, то температура будет иметь смысл энергии, которую обычно называют тепловой. В общем случае температура есть энергия на единицу энтропии. Если энтропию считать имеющей размерность, то и размерность температуры изменится. По смыслу своего введения *температура — это энергия движения системы по игнорируемым степеням свободы*. В рассматриваемом нами примере о двух грузиках, соединенных пружиной и демпфером, мы имеем

$$\mathbf{F}_{1d} = -b\left(\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2\right),$$

где b постоянный коэффициент, называемый коэффициентом вязкости демпфера. Подставив это выражение в уравнение производства тепла (95), получим

$$\vartheta \dot{H} = b\,|\,\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2\,|^2 + \delta. \tag{97}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (95) есть тепло, вырабатываемое в системе в единицу времени, а второе слагаемое в правой части есть тепло, излучаемое системой в единицу времени в окружающую среду. Таким образом, вся правая часть уравнения (97) есть тепло, накапливаемое телом в единицу времени. Мощность излучения δ, вообще говоря, уже не определяется только свойствами тела, но зависит также и от свойств (например, температуры) окружающей среды. Определение функции δ есть отдельная задача. Примем, например, следующее определяющее уравнение для мощности излучения

$$\delta = -\eta\, b\,|\,\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2\,|^2, \quad 0 \le \eta \le 1, \tag{98}$$

где коэффициент η показывает какая часть вырабатываемой в теле мощности излучается в окружающую среду. Второе из уравнений (85) записано для случая $\eta = 1$, когда энтропия системы сохраняется постоянной, как это следует из (97). Подставив (98) в (97), получим уравнение для производства тепла в следующем виде

$$\vartheta \dot{H} = (1-\eta)\, b\, |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2. \tag{99}$$

Следует обратить внимание на тот факт, что в правую часть (97) не вошли характеристики вязкого трения частиц о внешнюю среду. Упомянутые характеристики входят во внешние силы и потому исключаются из приведенного уравнения баланса энергии. Ситуация может показаться странной, поскольку, как известно, тело нагревается при трении о внешнюю среду. Однако этот нагрев должен учитываться введением некоего механизма внутри материальных точек, чтобы сделать их способными накапливать тепло.

Уравнение (99) служит для определения температуры в теле. Но само по себе оно недостаточно, ибо содержит две неизвестных функции: температуру ϑ и энтропию H. Для замыкания этого уравнения необходимо дополнительное уравнение, связывающее температуру и энтропию. Трудность состоит в том, что энтропия является неизмеряемым параметром. По существу, она служит только для того, чтобы правильно определить температуру. Примем, что параметр ϑ есть температура, измеряемая термометром по некоей выбранной процедуре. Пусть, например, ϑ есть измеряемая температура корпуса демпфера. Теперь необходимо сформулировать определяющее уравнение, связывающее температуру ϑ и энтропию H. Подчеркнем, что определяющее уравнение можно формулировать только после определения смысла температуры, например, как измеряемого термометром параметра. Примем простейшее определяющее уравнение для температуры[2]

$$\vartheta = \vartheta(H) = c^{-1} H \quad \Rightarrow \quad H = c\,\vartheta, \tag{100}$$

где c есть экспериментально определяемый параметр. Подставляя (100) в (99), находим температуру

$$c\,\vartheta\dot{\vartheta} = (1-\eta) b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \Rightarrow \vartheta = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2(1-\eta)b}{c} \int\limits_0^t (|\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 dt\right]^{1/2},$$

где ϑ_0 есть начальная температура. Если наблюдаемые экспериментальные данные удается удовлетворительно описать при подходящем выборе постоянной c, то определяющее уравнение (100) можно считать приемлемым. В противном случае необходимо принимать другое определяющее уравнение. Если принять определяющее уравнение (100), то уравнение баланса энергии рассматриваемой системы запишется в следующем виде

$$\dot{E} = -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2 - \eta\, b\, |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \quad \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt}\left(E + \frac{\eta\, c\, \vartheta^2}{2(1-\eta)}\right) = -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2.$$

[2]Сейчас мы не заботимся о действительном соответствии этого уравнения реальности, а хотим продемонстрировать только идею нахождения температуры

Это равенство справедливо только при $\eta \neq 1$. На рассмотренном примере отчетливо видно, что никакого объективного (измеряемого) смысла энтропия сама по себе не имеет. Она служит только для того, чтобы получить приемлемое уравнение для нахождения температуры. Что касается температуры, то в данном примере это энергия движения атомов корпуса и масла демпфера, т.е. энергия движения игнорируемых степеней свободы.

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, а потому она полностью определена и, следовательно, может быть переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это некая характеристика состояния не только рассматриваемой системы, но и ее окружения. Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т.е. в неучитываемую нами, Вселенную. При этом следует подчеркнуть, что ни одна из существующих в настоящее время формулировок второго закона термодинамики не может претендовать на тот же уровень фундаментальности, каким обладают законы динамики Эйлера и уравнение баланса энергии. Более того, маловероятно, что в ближайшем будущем удастся выдвинуть такую формулировку второго закона термодинамики, которая будет полноценно отражать всю совокупность идей, связанных с этим законом. Второе начало термодинамики имеет очень много различных формулировок. В общих чертах, второе начало термодинамики утверждает, что в реальности не существует изолированных систем. Иными словами, всякая система неизбежно излучает часть своей энергии в окружающую среду.

Общая формулировка второго закона термодинамики: *тепловая энергия не может быть полностью переведена в работу и неизбежно частично теряется в виде излучения в окружающую среду.*

Следует иметь в виду, что окружающая среда не имеет границ в пространстве, т.е. "тепловые волны" неизбежно уносят часть тепловой энергии. Фактически в рациональной механике под вторым законом термодинамики понимают совокупность неких утверждений, выражающих интуитивные представления о поведении реальных систем. Примером представления такого рода является следующее рассуждение. Выше мы рассматривали две материальные точки, соединенные пружиной. При этом допускалось, что эта система способна существовать сколь угодно долго. Подобное допущение справедливо не всегда. Достаточно вспомнить о существовании радиоактивных элементов и коротко живущих элементарных частиц. В рациональной науке словесные утверждения ничего не значат, если они не находят своего отражения в тех или иных математических формулировках. В рассматриваемом случае длительное существование системы возможно тогда и только тогда, когда энергия деформации пружины[3] удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2}\, c\, |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2 > 0 \quad (\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2) \quad \Rightarrow \quad c > 0.$$

[3]Нижеследующее условие достаточно только в линейном приближении.

Если $c < 0$, то легко убедится, что любые бесконечно малые возмущения этой системы приведут к появлению решений, которые неограниченно возрастают во времени, что приведет к взрывному разрушению системы. Иными словами, стоит комару чихнуть на эту систему, и она разрушится. Если же $c > 0$, то система будет сопротивляться всяким попыткам ее разрушить, т.е. при приложении внешней нагрузки ее внутренняя энергия будет возрастать. Приведенное здесь рассуждение, конечно, нельзя связывать со вторым законом термодинамики, поскольку оно не связано со взаимоотношением системы с окружающей средой. Однако, если не буква, то дух этих рассуждений полностью сохраняется и при формулировке второго закона термодинамики. Ко второму закону термодинамики относят следующие утверждения.

Первое: *тепло всегда течет от горячего к холодному.* Это утверждение известно под названием нулевого начала термодинамики. Однако его нельзя обосновать без привлечения окружающей среды (электромагнитного поля). В данной работе потоки тепла не рассматривались.

Второе: *силы трения не могут совершать положительной работы.* Для рассматриваемой нами системы из этого утверждения следуют неравенства

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b > 0.$$

Третье: *при отсутствии внешних силовых и моментных воздействий всякая система стремится к равновесию с окружающей средой, например, излучает энергию в окружающую среду.* В рассмотренном выше примере это утверждение равносильно условию

$$\delta \le 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \eta.$$

Четвертое: *энтропия всякой системы либо постоянна, либо возрастает с ростом времени.* В рассмотренном примере это утверждение влечет неравенство

$$\dot{H} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \eta \le 1.$$

Третье и четвертое утверждения в совокупности ведут к неравенству $0 \le \eta \le 1$, использованному в (98). Формулировка второго закона термодинамики считается приемлемой, если из нее вытекают следствия типа приведенных выше утверждений. Подробное изложение истории развития понятия энтропии и различные варианты формулировок второго закона термодинамики можно найти в превосходной книге [17]. Тем не менее, далеко не со всеми утверждениями книги [17] можно согласиться. В настоящее время понятия температуры и энтропии и их объективный смысл окончательно не установлены. Конечно, термометр позволяет[4] нам измерить объективно существующую величину, называемую температурой. Мы можем попытаться подобрать такую функцию, называемую энтропией, чтобы измеряемая в эксперименте температура совпадала бы с вводимой в теории. Часто такая попытка оказывается успешной. Что касается энтропии, то ее никто и никогда не измерял. В данном пункте мы хотели дать только приблизительное представление о втором законе термодинамики.

[4]Впрочем, и здесь имеются свои нерешенные проблемы

7 Заключение

Выше сформулированы основные понятия эйлеровой механики и показаны ее отличительные черты. Можно надеяться, что читатель понял самое главное. А именно то, что механика открыта для творческих поисков[5] и не может быть сведена к чистой математике. Понятно, что существует необозримый океан задач, где царствует ньютонова механика. В этих случаях эйлерова механика едва ли что-либо сможет добавить. Однако ограниченность ньютоновой механики привела к тому, что механика отказалась от изучения электричества и магнетизма и целого ряда других проблем. Хочется верить, что эйлерова механика позволит расширить сферу действия механики на задачи, исследуемые в новейшей физике. В частности, она позволяет с совершенно новой точки зрения взглянуть на проблемы квантовой физики.

Список литературы

[1] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. // Собр. трудов А.Н.Крылова, т. VII, М.-Л. ИАН СССР, 1936.

[2] Ньютон И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. - В кн. Ньютон И. Математические работы. М.-Л.: ОНТИ, 1937, с.25-166.

[3] Boltzmann L. Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik Teil I. Leipzig; 1897, 241s.

[4] Боль П. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике. — Собр. тр. (Под ред. Л.Э.Рейзиня.) Рига: Зинатне,1974, с.73-198.

[5] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983, 560с.

[6] Пуанкаре А. Измерение времени. Избр. труды А. Пуанкаре, т.III, с.419–428. М.: Наука, 1974. 771с.

[7] Zaremba S. Rėflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle. – Enseignement Math., 1940, t.38, p.59-69

[8] Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Издательство АН СССР, 1959. 386с.

[9] Мах Э. Механика (историко–критический очерк ее развития). СПб.: Общественная польза, 1909. 448с.

[10] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. В двух томах. Том II. М.: Наука, 1983. 640с.

[5]Однако прежде, чем начинать творить, необходимо ясно осознать идеи, лежащие в основе рациональной механики. К сожалению, многим не ортодоксальным “творцам” это не свойственно.

[11] Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла. Тр. СПбГТУ, N448, С.-Пб.: 1994, с.3-38.

[12] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies.//ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**. pp.187-204.

[13] Куликов К.А. Вращение Земли. М.: Недра, 1985. 159с.

[14] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories, Encyclopedia of Phycics. Springer - Verl, 1960 vol s/1

[15] Эйлер Л. Основы динамики точки. М.-Л.: ГИТТЛ, 1938, 500с.

[16] Гельмгольц Г. О сохранении силы. М.-Л.: ГИТТЛ, 1934, 143с.

[17] Truesdell C. Rational Termodynamics. Springer–Verlag, New–York, 1984. 578p.