1. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла

1.1 Введение

Со времени создания электродинамики Максвелла прошло примерно 130 лет. Уравнения Максвелла широко применяются в механике, в частности, в электромеханике. Нельзя, однако, сказать, что состояние проблемы в целом может быть признано удовлетворительным в логическом отношении. До сих пор уравнения Максвелла не вписываются естественным образом в структуры механики. Более того, принято считать, что между электродинамикой Максвелла и классической механикой существует фундаментальное различие, ибо уравнения Максвелла инвариантны относительно группы Лоренца, а уравнения классической механики — относительно группы Галилея. Долгое время справедливость сказанного не подвергалась тщательному логическому анализу с позиций рациональной механики, хотя вопросов накопилось довольно много. Прежде всего, как вообще могло случиться, что между механикой и электродинамикой возникло фундаментальное расхождение? Какие именно аксиомы механики противоречат законам электродинамики? Ответ хотелось бы видеть столь же ясным, как в геометрии, где точка бифуркации между евклидовой и неевклидовой геометриями лежит в V постулате. В конце концов, Максвелл создал свою электродинамику в 1861 – 1864 гг., когда идеи классической механики играли господствующую роль. От каких из них отказался Максвелл? Или какие новые идеи, несовместимые с существующими, он внес? Бесспорно, Максвелл открыл действительно новую идею, осознавать которую начали только через столетие, но в чем ее противоречие с классической механикой? Возникшая в XX веке специальная теория относительности, казалась бы, ответила на все эти вопросы. Но нельзя забывать, что специальная теория относительности дает всего лишь возможную интерпретацию, которая несовместима с классической механикой. Нас же интересует несовместимость самой электродинамики с исходными аксиомами механики, а это не одно и то же. Рассмотрим такой, например, вопрос.

Известно, что в основаниях электродинамики и многих разделов механики лежат волновые уравнения. Каким же образом одно и то же уравнение оказывается инвариантным относительно разных групп преобразований в зависимости от области приложений? Откуда может знать это уравнение, где его собираются использовать?

Имеется множество других вопросов, но вряд ли их стоит перечислять. Не лучше ли просто повнимательнее приглядеться к уравнениям Максвелла и только после этого продолжать задавать вопросы? Однако здесь возникает затруднение. Чтобы прояснить его, процитируем Л.И.Мандельштама [1]: “Неправильно полагать, что теория относительности перевернула наши понятия о времени и о пространстве в том смысле, что на место старых и четких понятий она поставила такие же новые. Это не так. Одна из больших заслуг теории относительности состоит в том, что она показала, что основные понятия, которыми оперировали раньше — во всяком случае, в известной части, — вовсе не были определены, что многие высказывания не имели вообще никакого смысла”. Аналогичной точки зрения придерживаются и многие другие крупные физики. Справедливы ли эти претензии к классической механике? К сожалению, по форме, а не по существу, они справедливы: в большинстве учебников по механике вопросы пространства и времени действительно излагаются крайне небрежно. Как будет показано ниже, расхождение во взглядах физики и рациональной механики на электродинамику и многие другие примыкающие вопросы лежит именно на этом “элементарном” уровне. Поэтому автор вынужден был начать с обсуждения исходной позиции рациональной механики. Разумеется, в изложенном нет претензий на новизну, но и конкретных ссылок автор дать не в состоянии.

1.2 Инерциальные системы отсчета

1.2.1 Введение тел отсчета

Ньютоновское определение абсолютного пространства общеизвестно. Если к нему добавить всеми принимаемые соглашения о полной равноправности всех точек и всех направлений в абсолютном пространстве, то становится ясным, что ньютоновская концепция абсолютного пространства вообще не дает возможности судить о движении, как это подробно объяснялось самим Ньютоном. Неразрешимость проблемы состоит в том, что мы лишены возможности параметризовать точки абсолютного пространства. Поэтому вводятся в рассмотрение тела отсчета [2]. Для этого возьмем точку, снабженную меткой 0 и назовем ее началом. К ней присоединим тройку некомпланарных "векторов", т.е. трех рукотворных стрелок $\mathbf{e}_k$. Слово "векторы" в применении к объектам $\mathbf{e}_k$ взяты в кавычки, ибо у нас нет возможности судить об их направлениях в абсолютном пространстве. Более того, "векторы" $\mathbf{e}_k$ сами и порождают направления в теле отсчета. Далее берем положительно определенную симметричную матрицу g_{ik}, через которую определяется скалярное произведение "векторов" $\mathbf{e}_k : \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_m = g_{km}$. Компоненты матрицы g_{ik} имеют физическую размерность квадратов длин и задают масштабы расстояний. Возьмем три одномерных непрерывных множества

$$x^k : \quad -\infty \leq x^k \leq \infty.$$

Числа x^k безразмерны. Введем в рассмотрение вектор положения

$$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 \equiv x^k\mathbf{e}_k, \quad -\infty \leq x^k \leq \infty, \tag{1.1}$$

где знак "+" определен правилом параллелограмма. Вектор $\mathbf{r}$ уже имеет при фиксированных x^k определенное направление относительно отсчетных векторов $\mathbf{e}_k$.

Определение 1.1: *телом отсчета называется репер* $\{0, \mathbf{e}_k\}$ *с присоединенным к нему множеством точек, задаваемых вектором 1.1.*

Определение 1.2: *тело отсчета называется правоориентированным, если репер* $\{0, \mathbf{e}_k\}$ *— правый, и левоориентированным, если этот репер левый.*

В отличие от абсолютного пространства все точки тела отсчета снабжены метками, т.е. параметризованы, и в нем определены направления относительно отсчетного репера. Невозможно обнаружить движения тела отсчета относительно абсолютного пространства, но движение других тел относительно тела отсчета обнаружить можно. Понятно, что можно ввести сколько угодно различных тел отсчета, образующих шестимерный континуум. Введение таких понятий, как вектор, тензоры высших рангов, возможно только в теле отсчета. Без тела отсчета понятие вектора лишено смысла.

Все тела отсчета движутся относительно друг друга произвольным образом. Самое важное свойство этих движений состоит в их, так сказать, беспричинности, нерожденности и неуничтожимости. Получив откуда-то свои движения, тела отсчета в дальнейшем их не меняют, так как отсутствуют внешние причины для изменения этих движений и считается, что волей и энергией тела отсчета не обладают.

Аксиома А0: *тела отсчета являются воображаемыми, абсолютно проницаемыми, однородными и изотропными. Они находятся в вечном движении, никогда не меняют своего движения и не взаимодействуют ни между собой, ни с какими-либо другими телами.*

Зыбкость этой аксиомы в логическом отношении очевидна. Это тот уровень фундамента, глубже которого механика опуститься не в состоянии. Она может только оттолкнуться от этого интуитивного фундамента и далее следовать логическому пути. Подобная ситуация типична для всех точных наук, в том числе и для математики. Если мир развивается от причин к следствию, то развитие точных наук идет в обратном направлении: от следствия, которое только и дано нам, к причине, которую наука пытается установить. Поэтому исходные постулаты всегда находятся на переднем плане науки и недосягаемы для логики.

1.2.2 Принцип инерции Галилея. Инерциальные тела отсчета

Выше было введено множество тел отсчета, и пока что они все равноправны. Дальнейшее продвижение возможно только при принятии какого-либо принципа, роль которого играет принцип инерции Галилея, являющийся фундаментом всей физики.

Аксиома А1. Принцип инерции Галилея: *всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.*

Принцип инерции Галилея, конечно, нельзя считать аксиомой в общепринятом смысле этого термина. Действительно, в нем фигурируют такие понятия, как "абсолютное пространство", "прямолинейность", "равномерность". Ни одно из этих понятий не определено и не может быть определено без введения того, что ниже называется инерциальной системой отсчета. Поэтому принцип инерции Галилея — это голая идея, не поддающаяся экспериментальной проверке, но на этой идее держится вся физика. Нам не дано знать, что такое абсолютное пространство, но аксиома А1 определяет основные свойства абсолютного пространства и позволяет из всего множества тел отсчета отобрать те, которые обладают постулированными в А1 свойствами. Представим себе, что мы располагаем изолированной частицей, которая при движении оставляет след наподобие следа реактивного самолета. Этот след называется траекторией частицы. Пронаблюдаем движение частицы относительно всех мыслимых тел отсчета. Относительно одних тел отсчета траектория будет просто точкой, относительно других — прямой линией, наконец, относительно третьих траектория будет криволинейной. Эти последние тела исключим из числа претендентов на роль абсолютного пространства. Запустим теперь вторую пробную частицу (первая уже улетела в бесконечность) так, чтобы хотя бы относительно одного тела отсчета, в котором траектория первой частицы была прямолинейной, траектория второй изолированной частицы была бы прямолинейной и непараллельной траектории первой частицы. Снова пронаблюдаем траектории частицы и вновь исключим из рассмотрения тела отсчета, относительно которых траектория второй частицы криволинейна. У нас остались тела отсчета двух типов: первый тип включает в себя тела отсчета, относительно которых траектории обеих частиц прямолинейны; второй тип — тела отсчета, относительно которых траектория первой частицы была точкой, а траектория второй — прямая линия или наоборот. Для тел отсчета второго типа необходимо провести третье испытание. А именно: возьмем одно из таких тел отсчета и проведем в нем плоскость, проходящую через траекторию-точку и содержащую траекторию-прямую линию. Запустим третью частицу так, чтобы ее траектория не лежала в упомянутой плоскости. Исключим из рассмотрения все тела отсчета, в которой траектория третьей частицы криволинейна. Легко понять, что дальнейшие испытания не нужны: любая изолированная частица относительно отобранных тел отсчета будет иметь прямолинейную траекторию или траекторию-точку.

Определение 1.3: *тела отсчета, относительно которых траектория любой изолированной точки (одинокой во всем мире) частицы прямолинейна или является точкой, называются* ***инерциальными телами отсчета****.*

В определении речь идет о траекториях, т.е. о понятиях, не оперирующих с понятием времени. Таким образом, инерциальные тела отсчета образуют трехмерный континуум тел отсчета, обладающих замечательным свойством: траектории всех точек одного инерциального тела отсчета относительно другого инерциального тела отсчета суть параллельные прямые. Множество инерциальных тел отсчета образует класс эквивалентности, отношение эквивалентности в котором устанавливается принципом инерции Галилея.

Определение 1.4: *множество инерциальных тел отсчета называется абсолютным пространством.*

Не следует удивляться тому, что абсолютное пространство представлено не одним каким-то телом отсчета, а классом эквивалентности. Это достаточно стандартная ситуация в математике. Например, вектор — это не какой-то единичный объект, а класс эквивалентности, состоящий из множества направленных отрезков, имеющих одинаковые длины и одинаковые направления.

1.2.3 Время

Обратимся к понятию времени, самому сложному понятию в науках о Природе. О реальном времени мы не можем сказать ничего определенного, неизвестна даже его размерность. В пользу далеко не очевидной трехмерности пространства имеется немало весьма серьезных аргументов. В пользу самоочевидной на первый взгляд одномерности времени нет не только серьезных, но вообще никаких аргументов. А самоочевидность слишком часто подводила людей. Поэтому в механике реальное время не обсуждается, а вводится в рассмотрение *математическое время* или просто *время.*

Аксиома А2. *Время является непрерывно меняющейся величиной, пробегающей одномерное неограниченное множество (числовую ось); оно направлено (ориентировано) и течет от прошлого к будущему.*

Аксиома А3 (И.Ньютон): *математическое время существует само по себе и не зависит ни от каких внешних обстоятельств. В частности, оно не зависит от движения и от выбора инерциального тела отсчета.*

Для измерения времени применяются часы, т.е. приборы, в основе действия которых лежит какой-либо периодический процесс. Необходимо, однако, иметь гарантию, что этот процесс действительно периодический. Например, мы должны быть уверены в том, что длительности всех минут по обычным часам действительно одинаковы. Единственным гарантом здесь выступает принцип инерции Галилея, утверждающий, что движение изолированной частицы относительно инерциального тела отсчета является (или, лучше сказать, *называется*) равномерным. Это и дает способ тарировки часов.

Определение 1.5. *Часы считаются оттарированными в соответствии с принципом Галилея, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в каком-либо (любом) инерциальном теле отсчета.*

Существует мнение, что аксиома А3 подразумевает существование сигналов, распространяющихся с бесконечной скоростью. Но такое мнение ни на чем не основано. Да, аксиоматикой классической механики *не отрицаются* сигналы с бесконечной скоростью, но такие сигналы *не навязываются* аксиоматикой, в том числе и аксиоматикой для воздействий. Чтобы оттарировать часы в соответствии с принципом инерции Галилея, достаточно разместить их на изолированной частице и отмечать моменты прохождения одинаковых расстояний в инерциальном теле отсчета. На уровне идей это вполне достижимая вещь, а всякой наука строится на уровне идей. Реальность, разумеется, отличается от наших построений и, видимо, никогда не будет уложена в прокрустово ложе какой-либо науки будущего.

Чтобы сделать процесс тарировки единообразным во всех инерциальных телах отсчета, можно предложить мысленный эксперимент, в основе которого лежит допущение о равноправности всех инерциальных тел отсчета. Это допущение в немного расширенной версии будет сформулировано в виде отдельного утверждения, известного под названием принципа относительности Галилея. Представим себе, что в каждом теле отсчета неподвижно (относительно данного тела отсчета) закреплен некий прибор, способный испускать, например, фотоны или какие-либо другие частицы. Все эти приборы (или один прибор, последовательно устанавливаемый во всех телах отсчета) считаются идентичными. Далее, в момент времени $t = 0$, фиксируемый по каким-то, не обязательно оттарированным, часам, прибор испускает фотон. Измеряется расстояние $r(t)$, пролетаемое к моменту времени t, и вводится абсолютное время $t_a = r(t)/c$, где — постоянная, имеющая размерность скорости и одинаковая во всех телах отсчета. Введенное выше определение абсолютного времени можно обратить и получится универсальная тарировка часов $t = f(ct_a)$. Ниже будет использоваться именно абсолютное время t_a, которое будет обозначаться буквой t.

Следует отчетливо понимать, что принятыми аксиомами математическое время введено достаточно жестко. Для того, чтобы прояснить это обстоятельство, рассмотрим двумерный мир, наделенный математическим временем (см. рисунок).

Плоскость xOy — это двумерное пространство. Прямая OP в плоскости xOy — прямолинейная траектория частицы. Ось $0t$ — ось времени. Плоскость tOP — плоскость, в которой лежит мировая линия частицы, т.е. множество точек, которое пробегала частица в трехмерном пространстве: два пространственных измерения и одно временное измерение. Кривая xOB, лежащая в плоскости tOP , есть одна из возможных мировых линий, проекция которой на пространственную плоскость есть траектория-прямая частицы в двумерном пространстве. Уравнение этой прямой имеет вид

$$x = f(t)a, \quad y = f(t)b, \quad y = bx/a. \tag{1.2}$$

Функция $f(t)$ при этом может быть достаточно произвольной. Принцип инерции Галилея требует, чтобы за одинаковые интервалы времени $t_1 - 0 =$

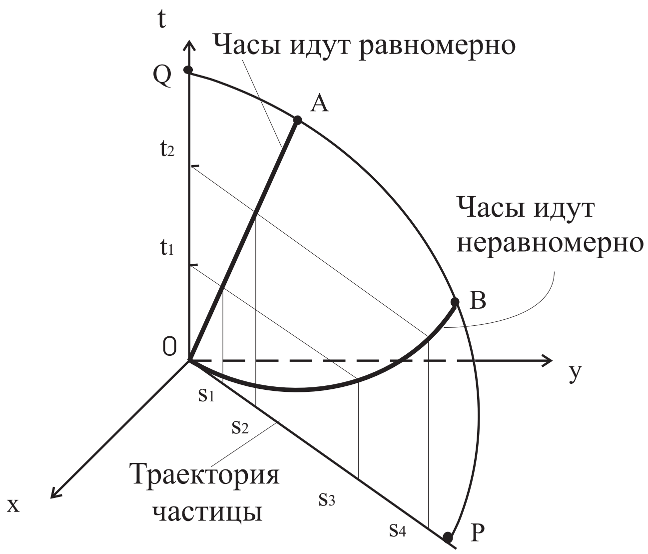

Рис. 1: Тарировка часов по Галилею

$t_2 - t_1$ пролетались бы одинаковые расстояния $s_3 - 0 = s_4 - s_3$. Если OB — кривая, то это условие не выполнено. Другая возможная мировая линия — это прямая OA. Здесь, очевидно, требование принципа инерции выполнено

$$t_1 - 0 = t_2 - t_1 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 - 0 = s_2 - s_1.$$

Однако прямых типа OA можно провести сколько угодно и не обязательно из начала координат. Поэтому математическое время принципом инерции Галилея вводится с точностью до линейного преобразования

$$t \quad \to \quad kt + t_0, \tag{1.3}$$

где t_0 определяет выбор начала отсчета времени, а k — выбор единицы измерения времени (масштабный множитель).

Именно этот ограниченный произвол в выборе математического времени мы и имели в виду, говоря о жестко введенном времени.

1.2.4 Инерциальные системы отсчета

Определение 1.6: *инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными в соответствии с принципом инерции Галилея, называется инерциальной системой отсчета.*

Инерциальных систем отсчета бесконечно много, и все они равноправны, что и фиксируется принципом относительности Галилея.

Аксиома А4. Принцип относительности Галилея: *все инерциальные системы отсчета равноправны, т.е. не существует физических экспериментов, позволяющих выделить какую-либо одну из них.*

Понятно, что сам по себе принцип относительности не участвует ни в каких построениях. Поэтому называть его аксиомой можно только условно. Принцип относительности просто фиксирует достаточность принципа инерции Галилея. Никакой существенной пользы из принципа относительности Галилея извлечь невозможно, поскольку любая теория, построенная на основе фундаментальных законов механики, будет автоматически удовлетворять этому принципу.

Определение 1.7: *абсолютное пространство, снабженное абсолютным временем, есть класс эквивалентности на множестве всех мыслимых систем отсчета, причем отношение эквивалентности устанавливается принципом инерции Галилея.*

Приведем цитату из книги К.Трусделла [3]: "Система отсчета — это чистый холст, на котором можно рисовать картины природы. Этот холст может быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но ни коим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать".

Замечание. Для многих книг по физике и механике характерно использование понятия "аксиома" в нетрадиционном для математики смысле. Иногда забывается, что не всякое, даже правильное, утверждение может быть принято в качестве аксиомы, ибо, став аксиомой, это утверждение может превратиться в свою противоположность. Рассмотрим в качестве иллюстрации следующую аксиому.

Аксиома АХ: *скорость света, испускаемого одним источником, одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Часто думают, что этой аксиомой постулируется одинаковость скорости света во всех введенных выше инерциальных системах отсчета. Однако это не так. Главная особенность любой аксиомы состоит в том, что ей нельзя навязывать какое-либо мнение, аксиома на все смотрит со своей точки зрения. Поясним на примере. Допустим, имеется сад, в котором растут грушевые и яблоневые деревья. Примем аксиому: "На всех деревьях в саду растут груши". Понятно, что груши не начнут в силу этой аксиомы расти на яблонях. Просто с точки зрения этой аксиомы, яблони перестанут считаться деревьями. Точно так же обстоит дело и с аксиомой АХ. Приняв эту аксиому, необходимо на ранее введенном множестве систем отсчета провести новые испытания и отобрать те из них, которые являются инерциальными с точки зрения аксиомы AX. Если мы, допустим, знаем утверждение AX как экспериментально установленный факт, то необходимо построить теорию с помощью каких-то других аксиом так, чтобы утверждение AX являлось их следствием. Если же утверждение AX формулировать как аксиому, то будет это просто сужение класса инерциальных систем отсчета до множества инерциальных тел отсчета, имеющих одну точку, в которой расположен источник света. Ведь аксиома A1 продолжает действовать.

1.3 Системы координат и их замена

Введение инерциальных систем отсчета фундаментально опирается на принцип Галилея, и в этом смысле инерциальные системы отсчета являются не только математическими конструкциями, но и физическими понятиями. Все физические законы формулируются именно в системах отсчета, и во всех инерциальных системах отсчета их формулировки не различаются между собой. В рамках одной и той же системы отсчета можно использовать сколь угодно различных систем координат, как подвижных, так и неподвижных относительно тела отсчета. Если математическое время в разных системах отсчета может меняться только в рамках преобразования (1.3), то координатное время может выбираться как угодно, в том числе и различным в разных точках системы координат. Никакой произвол в выборе системы координат вообще не сказывается на объективном содержании физического закона, меняется только координатная форма представления физического закона.

Утверждение: *многие физические величины (скорость, ускорение, кинетическая энергия и др.) зависят от выбора системы отсчета, но ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат.*

Ввиду сказанного ясно, что смешение понятий систем отсчета и систем координат совершенно недопустимо. Тем не менее в литературе по физике и механике, особенно в изданиях 20–30-летней давности, не говоря уже о более старых изданиях, упомянутое смешение встречается часто. Во избежание каких бы то ни было недоразумений приведем описание понятия системы координат. При введении системы отсчета были использованы отсчетный репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$, отсчетная матрица g_{mn} и отсчетные координаты x^k. Только после этого и обретают смысл расстояния и направления в теле отсчета. И репер $\{O, \mathbf{e}_k\}$, и матрица g_{mn}, и координаты x^k в данном теле отсчета зафиксированы раз и навсегда, ибо они и порождают само тело отсчета. Отсчетные координаты идентифицируют точки тела отсчета, но при желании можно изменить способ идентификации. Важно только помнить, что все точки тела отсчета уже имеют собственные имена, которые никуда и никогда не исчезают. Ситуация здесь та же, что и у людей. Один и тот же человек может получить много удостоверений личности, но он останется одним и тем же человеком.

Определение 1.8: *системой координат в теле отсчета называется система идентификации точек данного тела отсчета.*

Для идентификации точек тела отсчета необходимо каждой такой точке сопоставить тройку чисел так, чтобы каждой точке отвечала бы одна и только одна тройка чисел, и наоборот, чтобы каждой тройке чисел отвечала бы одна и только одна точка тела отсчета. Обозначим через y^i упомянутую тройку чисел

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3, t) \equiv y^i(x, t) \quad \Rightarrow \quad x^i = x^i(y^1, y^2, y^3, t) \equiv x^i(y, t). \tag{1.4}$$

Здесь мы используем подвижную систему координат y^i, т.е. используем систему идентификации, зависящую от времени. В дальнейшем мы можем забыть о существовании формул (1.4) и пользоваться заменами систем координат вида

$$y^{k'} = y^{k'}(y^1, y^2, y^3, t) \equiv y^{k'}(y, t) \Rightarrow y^k = y^k(y^{1'}, y^{2'}, y^{3'}, t) \equiv y^k(y', t). \tag{1.5}$$

Именно по отношению к заменам (1.5) определяются законы преобразования координат векторов и тензоров высшего ранга. Поскольку выбор системы координат полностью произволен, то принимается специальная аксиома, которая, впрочем, всегда подразумевалась, но никогда не выделялась отдельно. Для данной работы целесообразно выделить эту аксиому отдельно.

Аксиома А5. Принцип объективности: *все физические величины и физические законы объективны и не зависят от выбора системы координат.*

В частности, вектор положения какой-либо точки тела отсчета не зависит от выбора подвижной (или неподвижной) системы координат

$$\mathbf{r}(x) = x^k \mathbf{e}_k = x^k(y, t)\mathbf{e}_k \equiv \mathbf{r}(y, t). \tag{1.6}$$

Точка $\mathbf{r}$ неподвижна в теле отсчета, хотя ее координаты (не отсчетные) y^k могут меняться во времени. Базисные векторы системы координат y^k находятся стандартным образом:

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}(y, t)}{\partial y^k} = \frac{\partial x^p(y, t)}{\partial y^k}\, \mathbf{e}_p. \tag{1.7}$$

По ним находится метрический тензор системы y^k

$$a_{ik} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k = \frac{\partial x^s(y,t)}{\partial y^i} \frac{\partial x^p(y,t)}{\partial y^k} \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_p = \frac{\partial x^s}{\partial y^i} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} g_{sp}. \tag{1.8}$$

По матрице a_{ik} находится взаимная (обратная) матрица a^{mp} и векторы взаимного базиса $\mathbf{r}^p(y,t)$

$$a_{ik}a^{kp} = \delta_i^p, \quad \mathbf{r}^p(y,t) = a^{pm}(y,t)\mathbf{r}_m(y,t). \tag{1.9}$$

Введем оператор-градиент

$$\boldsymbol{\nabla} \equiv \mathbf{r}^k(y,t)\frac{\partial}{\partial y^k} = \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_m = \delta_m^k, \quad \frac{\partial}{\partial y^k} = \mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\nabla}. \tag{1.10}$$

Этот оператор не зависит от выбора подвижной системы y^k. Пусть дана частица A, движущаяся относительно тела отсчета. Ее вектор положения $\mathbf{r}_A$ является функцией времени. Скорость частицы относительно тела отсчета определяется стандартным образом:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_\mathbf{A}(t)}{dt} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \left[\mathbf{r}(y_A(t+\triangle t), t+\triangle t) - \mathbf{r}(y_A(t),t)\right]. \tag{1.11}$$

Прежде чем вычислить производную (1.11), найдем скорость точки системы координат y^k с фиксированными координатами y_*^k. Эта точка (не материальная) движется относительно тела отсчета. Ее вектор положения определяется вектором $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}(y_*,t)$, а скорость определяется по формуле

$$\mathbf{v}_* = \frac{d\mathbf{r}_*}{dt} = \frac{d\mathbf{r}(y_*,t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(y_*,t)}{\partial t}. \tag{1.12}$$

Таким образом, частная производная по времени от вектора положения $\mathbf{r}(y,t)$ определяет скорость точки системы координат с координатами y_*. Никакого отношения к скорости движения материальных частиц она не имеет, и сама по себе ни в один физический закон входить не может. Теперь формулу (1.11) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_A = \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial y_A^k}\frac{dy_A^k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial t} + \frac{dy_A^k}{dt}\mathbf{r}_k^A. \tag{1.13}$$

Первое слагаемое в этой формуле определяет скорость точки системы координат y_A^k, а второе — скорость материальной точки A относительно этой точки системы координат. Пусть дано тензорное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, заданное в каждой точке $\mathbf{r}$ тела отсчета в функции времени. Изменение поля в данной точке тела отсчета выражается производной от $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Очевидно, имеем формулу

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

так как точка $\mathbf{r}$ тела отсчета неподвижна, т.е. в этом случае нет разницы между полной и частной производными по времени. Ситуация меняется, если тензорное поле рассматривается не как функция точки тела отсчета и времени, а как функция подвижных координат и времени

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}(y, t), t) = \mathbf{B}(y(t), t). \tag{1.14}$$

Здесь мы действуем строго в согласии с требованиями математики и меняем символ функции при переходе к новым аргументам. В физике и в механике обычно этого не делают, так как значения функций $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(y(t))$ совпадают. В дальнейшем мы будем придерживаться обычных для механики обозначений, т.е. будем писать $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(y(t), t)$. Однако в нижеследующей формуле будут использованы более точные формулы (1.14):

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{d\mathbf{B}(y, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y^k}\frac{dy^k}{dt}.$$

Вспоминая последнюю из формул (1.10), записываем:

$$\frac{d\mathbf{B}(y, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}(y, t)}{\partial t} + \frac{dy^k}{dt}\mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B}.$$

Заметим, что точка $\mathbf{r}(y(t), t)$ в соответствии с (1.6) неподвижна относительно тела отсчета. Поэтому имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}(y, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(y, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^k}\frac{dy^k}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(y, t)}{\partial t} + \frac{dy^k}{dt}\mathbf{r}_k = 0.$$

Предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}(y, t)}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{r}(y, t)}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B} \equiv \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{v}(y, t) \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B}, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{v}(y, t)$ — скорость точки с фиксированными координатами y^k относительно тела отсчета. В механике сплошных сред (например, в гидромеханике) координаты y^k выбираются вмороженными в среду и закрепляются за одними и теми же материальными частицами. В этом случае (и только этом!) производная, стоящая в правой части (1.15), называется локальной производной поля $\mathbf{B}(y, t)$, первое слагаемое в правой части (1.15) называется конвективной производной. Материальную производную обозначают символом

$$\frac{\partial \mathbf{B}(y,t)}{\partial t} \equiv \dot{\mathbf{A}}(r,t).$$

Тогда (1.15) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{A}}(r,t) = \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{v}(y,t) \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{A}(r,t).$$

Если, например, $\mathbf{A}(r,t) = \mathbf{v}(y,t)$ — скорость частицы жидкости, то $\dot{\mathbf{v}}(r,t)$ есть ее ускорение. Формула (1.15) вполне стандартная, но она слишком важна для дальнейшего, чтобы ограничиться просто ссылкой. Выше мы использовали замены системы координат (1.4), которые были неподвижны относительно тела отсчета, но время в этих преобразованиях не затрагивалось. Во многих разделах механики используются и более общие координатные системы, в которых преобразуются не только пространственные координаты, но и время. А именно, используются координаты y^k, τ

$$y^k = y^k(x^1, x^2, x^3, t) = y^k(x,t), \quad \tau = \tau(x,t), \tag{1.16}$$

где величина τ называется координатным временем. Относительно преобразования (1.16) выдвигается только одно обязательное условие: взаимно однозначная обратимость (1.16)

$$x^k = x^k(y,\tau), \quad t = t(y,\tau). \tag{1.17}$$

Математическое время t и координатное время τ отнюдь не равноценны. Во все физические законы входят именно производные по t, от которых можно при желании перейти к производным по координатному времени τ. Пусть дано тензорное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$. Можно записать

$$\mathbf{A}(x,t) = \mathbf{A}(x(y,\tau)),\, t(y,\tau) = \mathbf{B}(y,\tau),$$

$$\frac{d\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y^k}\frac{dy^k}{dt} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \tau} - \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{B}. \tag{1.18}$$

Производная

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau(x,t)}{\partial t} = f(x,t) = F(y,\tau) \tag{1.19}$$

вычисляется по (1.16), а затем с помощью (1.17) переписывается через переменные y^k и τ. Здесь, если и возникают какие-либо сложности, то они носят чисто технический характер. Это обычные математические операции замены переменных и настаивать на их особом физическом смысле не стоит. Преобразования Лоренца полностью укладываются в схему (1.16) – (1.17), поэтому все уравнения классической механики инварианты (в некотором смысле) относительно преобразования Лоренца, а также относительно значительно более общих групп преобразований. Оператор дифференцирования по математическому времени $\mathsf{d}/\mathsf{d}\mathsf{t}$ есть инвариантный оператор, т.е. оператор, не зависящий от выбора системы координат. Напротив, оператор частного дифференцирования по математическому времени $\partial/\partial\mathsf{t}$ зависит от выбора системы координат, и потому оператор $\partial/\partial\mathsf{t}$ сам по себе не может входить в какое-либо уравнение, претендующее на физический смысл иначе, чем в виде комбинации (1.15). Легко доказывается коммутативность операторов $\boldsymbol{\nabla}$ и $\mathsf{d}/\mathsf{d}\mathsf{t}$

$$\boldsymbol{\nabla}\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\mathsf{t}} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}\mathsf{t}}\boldsymbol{\nabla} \quad \left[\Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial\mathsf{t}} \neq \frac{\partial}{\partial\mathsf{t}}\boldsymbol{\nabla}\right]. \tag{1.20}$$

Неравенство в скобках есть прямое следствие зависимости оператора $\partial/\partial\mathsf{t}$ от выбора системы координат. Максвелл при введении тока смещения использовал свойство (1.20), откуда очевидно, что он использовал оператор $\mathsf{d}/\mathsf{d}\mathsf{t}$, но не оператор $\partial/\partial\mathsf{t}$, как это утверждается в современных учебниках физики.

1.4 Замена систем отсчета

Замены систем координат описываются формулами (1.4), (1.6) или более общими формулами (1.16), (1.17). Эти замены не налагают никаких ограничений на форму физических законов, если они записаны в векторном или тензорном виде. Если используется координатная форма записи физических законов, то, разумеется, эта форма меняется при переходе одной системы координат к другой. Например, инвариантный дифференциальный оператор Лапласа

$$\triangle = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \tag{1.21}$$

имеет различный вид в декартовой и цилиндрических системах координат, хотя он порожден инвариантным оператором-градиентом $\boldsymbol{\nabla}$, определенным формулой (1.10). Совершенно иначе обстоит дело с заменами систем отсчета. Как уже отмечалось, понятие тензора любого ранга вводится только в каждой системе отсчета отдельно. Никакие операции между тензорами, заданными в разных системах отсчета, невозможны. Поэтому замена системы отсчета включает в себя предварительную операцию переноса тензора из одной системы в другую. Ниже будет описана операция переноса вектора. Поскольку тензоры высших рангов являются элементами тензорных произведений векторных пространств, то, определив операцию переноса вектора, мы, тем самым, определяет и операцию переноса тензора любого ранга.

Пусть даны две системы отсчета S и S_*, которые не обязательно инерциальны, но используют математическое время, т.е. часы, оттарированные в инерциальной системе отсчета. Пусть S-система порождена отсчетным репером $\{O, \mathbf{e}_k\}$, отсчетной матрицей g_{ik} и отсчетными координатами x^k. Система S_* порождена теми же объектами, снабженными звездочками: $\{O_*, \mathbf{e}^*_k\}$, g^*_{ik}, x^k_*. Найдем движение S_*-системы относительно S-системы. Пусть в какой-то момент времени $t = 0$, принимаемый за начало отсчета времени, начало O_* системы S_*, занимает положение точки $\tilde{O}$ в S-системе и определяется в ней вектором $\mathbf{r}_{\tilde{O}}$. Пусть векторы $\mathbf{e}^*_k$ при $t = 0$ занимают положения векторов $\tilde{\mathbf{e}}_k$ в S-системе. Тогда репер $\{\tilde{O},\tilde{\mathbf{e}}_k\}$, заданный в S-системе, будет играть ту же роль, что репер $\{O_*, \mathbf{e}^*_k\}$ в S_*-системе. Пусть вектор $\mathbf{r}_*$ задает положение точки A_* с координатами x^k_* в S_*-системе. Тогда вектор $\tilde{\mathbf{r}} = x^k_*\tilde{\mathbf{e}}_k$, откладываемый от точки $\tilde{O}$, будет задавать точку $\tilde{A}$ в S-системе, положение которой относительно репера $\{\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$ точно такое же, как положение точки A_* относительно репера $\{O_*, \mathbf{e}^*_k\}$. Пусть начало O_* системы S_* движется произвольно относительно S-системы и ее движение в S-системе задается вектором положения $\mathbf{a}(t)$, причем $\mathbf{a}(0) = \mathbf{r}_{\tilde{O}}$. Тогда положение точки A_* системы S_* в произвольный момент времени задается следующим вектором положения в S-системе

$$\mathbf{r}(A_*, t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot (x^k_*\,\tilde{\mathbf{e}}_k), \tag{1.22}$$

где ортогональный тензор $\mathbf{Q}(t)$:

$$\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{Q}^T(t) \cdot \mathbf{Q}(t) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = 1, \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E} \tag{1.23}$$

определен в S-системе, как и векторы $\mathbf{a}(t)$ и $\tilde{\mathbf{e}}_k$, и задает поворот S_*-системы относительно S-системы.

Определение 1.9. *Преобразование (1.22), определяющее движение S_*-системы относительно S-системы, называется заменой системы отсчета.*

Преобразование (1.22) играет очень важную роль в механике, ибо многие физические величины, как, например, внутренняя энергия системы не зависят от выбора системы отсчета и потому должны быть инвариантны относительно замены системы отсчета. Данное требование позволяет установить допустимый вид зависимости внутренней энергии от величин, определяющих ее. Эта техника очень хорошо разработана и широко применяется, но здесь мы о ней говорить не будем. Пусть точка A_* движется относительно S_*-системы и закон ее движения задан функциями $x_*^k(t)$. Тогда вектор $\tilde{\mathbf{r}} = x_*^k(t)\tilde{\mathbf{e}}_k$ задает движение точки $\tilde{A}$ в S-системе точно таким, каким видит наблюдатель в S_*-системе движение точки A_*. А вот наблюдатель в S-системе видит движение этой же точки A_* системы S_* как движение точки в S-системе, определяемое вектором положения

$$\mathbf{r}(A_*, t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot (x_*^k(t)\tilde{\mathbf{e}}_k). \tag{1.24}$$

Дифференцируя (1.24) по времени, получаем скорости и ускорения точки A_* относительно S-системы. Векторы

$$\mathbf{v}_* = \dot{x}_*^k(t)\mathbf{e}_k^*, \quad \mathbf{w}_* = \ddot{x}_*^k(t)\mathbf{e}_k^* \quad \left(\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}\right) \tag{1.25}$$

задают скорость и ускорение точки A_* в S_*-системе. Векторы

$$\tilde{\mathbf{v}} = \dot{x}_*^k\tilde{\mathbf{e}}_k, \quad \tilde{\mathbf{w}} = \ddot{x}_*^k(t)\tilde{\mathbf{e}}_k$$

задают скорость и ускорение точки $\tilde{A}$ относительно репера$\{\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$ точно такими, какими видит наблюдатель в S_*-системе величины (1.25). Однако скорость и ускорение точки A_* относительно S-системы определяются по более сложным формулам, вытекающим после дифференцирования (1.24) по времени

$$\mathbf{v}(A_*) = \dot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{A}) + \dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot x_*^k(t)\tilde{\mathbf{e}}_k. \tag{1.26}$$

Последнее слагаемое в (1.26) обычно записывается в другой форме, с учетом уравнения Пуассона,

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(t),$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$ называется вектором угловой скорости S_*-системы относительно S-системы.

Исключая из (1.26) тензор $\mathbf{Q}$ с помощью уравнения Пуассона, а вектор $\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot x_*^k\tilde{\mathbf{e}}_k$ с помощью уравнения (1.24), получаем окончательное выражение для скорости точки A_* относительно S-системы

$$\mathbf{v}(A_*) = \dot{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{r}(A_*, t) - \mathbf{a}(t)] + \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \tag{1.27}$$

Выражение (1.27) также играет важную роль при установлении структуры многих характеристик физических систем, так как очень часто эти характеристики не должны зависеть от замены системы отсчета, т.е. менять своего вида при любом виде векторов $\dot{\mathbf{a}}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)$ и ортогонального тензора $\mathbf{Q}(t)$. Для инерциальных систем отсчета выражения (1.24) и (1.27) упрощаются, ибо

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}_0\, t, \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{0}, \tag{1.28}$$

и принимают вид

$$\mathbf{r}(A_*) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{v}_0\, t + \tilde{\mathbf{r}}; \quad \mathbf{v}(A_*) = \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{A}). \tag{1.29}$$

Первое из этих выражений называется преобразованием Галилея, а принцип относительности Галилея утверждает независимость (инвариантность) всех физических законов относительно преобразования (1.29). В механике это очень слабое требование и оно почти всегда выполняется автоматически. Правда, из требования инвариантности уравнения баланса энергии относительно преобразования (1.29) вытекает закон сохранения массы для закрытых систем, но многие воспринимают этот результат как самоочевидный. Имеется ряд других следствий, но все они носят достаточно тривиальный характер. Значительно более содержательные результаты дает требование инвариантности по отношению к преобразованию (1.24), (1.26). Однако это требование можно предъявить *не ко всем* физическим величинам и законам. Большинство физических величин зависят известным образом от выбора системы отсчета (кинетическая энергия, количество движения, кинетический момент и т.д.), но ни одна физическая величина не может зависеть от выбора системы координат (принцип объективности).

Примечание. *Выше мы определили операцию переноса вектора единым образом. При этом оказалась скрытой одна важная деталь: на самом деле выбор репера* $\{\tilde{O}, \tilde{\mathbf{e}}_k\}$ *в* S*-системе можно осуществлять произвольно, а единственное ограничение состоит в том, что должны выполняться условия* $\tilde{\mathbf{e}}_k \cdot \tilde{\mathbf{e}}_m = g^*_{km}$.

1.5 Волновое уравнение. Идея ковариантности

Известно, что в основаниях классической электродинамики и, например, линейной динамической теории упругости лежат волновые уравнения. Принято считать, что в электродинамике волновое уравнение инвариантно относительно группы Лоренца, а в теории упругости волновое уравнение инвариантно относительно группы Галилея. Истолкование этого странного факта почему-то в литературе отсутствует. Ясно, что между волновыми уравнениями в электродинамике и в теории упругости существует какое-то различие, которое надо четко установить и проанализировать. В электродинамике волновое уравнение имеет вид

$$\triangle\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}. \tag{1.30}$$

В динамической теории упругости волновое уравнение записывается в форме

$$\triangle\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\Phi}{dt^2}. \tag{1.31}$$

На самом деле постоянные c в (1.30) и (1.31) различны. Кроме того, в динамической теории упругости имеется не одно, а два волновых уравнения типа (1.31) с различными значениями постоянной c. Поэтому во избежание недоразумений на уравнение (1.31) будем смотреть так: именно в такой форме было бы записано уравнение (1.30), если бы оно использовалось в рациональной механике. Как уже отмечалось в п.3, частые производные по времени в механике встречаются сами по себе, а не в виде комбинации (1.15), тогда и только тогда, когда смыслы полной и частной производной по времени совпадают. А это имеет место только при использовании систем координат, неподвижных относительно тела отсчета. В этом случае никакого различия в уравнениях (1.30) и (1.31) нет — они абсолютно идентичны. Однако при использовании подвижных координат уравнения (1.31) и (1.30) различаются самым существенным образом. В современной электродинамике отдают предпочтение уравнению (1.30), а в рациональной механике — уравнению (1.31). Едва ли можно сомневаться в том, что Дж.Максвелл отдал бы предпочтение уравнению (1.31), ибо только так и понимались все производные по времени в третьей четверти XX века. Выясним, какое из уравнений (1.30) и (1.31) правильнее с точки зрения рациональной механики и почему. Ответ прост: уравнение (1.31) удовлетворяет принципу объективности, а уравнение (1.30) — не удовлетворяет. Поэтому в рациональной механике уравнение (1.30) неприемлемо. Почему физики считают уравнение (1.30) приемлемым, должны ответить они сами. Чтобы проиллюстрировать невыполнение принципа объективности для уравнения (1.30), рассмотрим простой пример. Сначала выберем неподвижную декартову систему координат x, y, z в тела отсчета и возьмем функцию

$$\Phi = (x, y, z, t) = Ax, \quad A = \mathrm{const}. \tag{1.32}$$

Видно, что эта функция является решением как уравнения (1.30), так и уравнения (1.31). Решение (1.32) имеет простой физический смысл: в физике —

это электростатический потенциал между двумя параллельными однородно заряженными плоскостями, а в теории упругости — это перемещение точек однородного слоя, растягиваемого постоянными нормальными напряжениями. Совершенно ясно, что решение (1.32) должно оставаться решением и при использовании любой другой системы координат, в том числе и подвижной. Введем подвижную систему координат

$$x' = a\cos\omega t + x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{1.33}$$

Очевидно, что решение (1.32) должно остаться решением и в системе координат со штрихами

$$\Phi(x' - a\,\cos\omega t', y', z', t') = A(x' - a\,\cos\omega t') \equiv \Phi'(x', y', z', t'). \tag{1.34}$$

Функция $\Phi'(x', y', z', t')$ должна удовлетворять уравнениям

$$\triangle'\Phi' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial t'^2}, \quad \triangle'\Phi' = \frac{1}{c^2}\frac{d^2\Phi'}{dt'^2}(t' \equiv t). \tag{1.35}$$

Оператор Лапласа $\triangle'$ в системе координат со штрихами всегда совпадает с таковыми в исходной: $\triangle' = \triangle$. Поэтому левые части уравнений (1.35) обращаются в нуль для функции (1.34). Вычислим правые части:

$$\frac{\partial^2\Phi'}{\partial t'^2} = Aa\omega^2\cos\omega t' \neq 0;$$

$$\frac{d\Phi'}{dt'} = \frac{\partial\Phi'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial\Phi'}{\partial t'} = Aa\omega(-\sin\omega t + \sin\omega t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\Phi'}{dt'^2} = 0.$$

Таким образом, функция Φ' не удовлетворяет первому из уравнений (1.35), а второму — удовлетворяет, как это и должно быть в соответствии с принципом объективности. Заметим, что речь идет о заменах системы координат, а не систем отчета, где требуется дополнительное обоснование того, как связаны скалярные функции Φ и Φ_*, заданные в разных системах отсчета. Итак, с точки зрения рациональной механики уравнения (1.30) можно использовать только в неподвижных системах координат. Поэтому рассматривать вопрос о том, как ведет себя уравнение (1.30) при преобразованиях Лоренца можно только в чисто математическом, но не в физическом понимании, ибо преобразованиями Лоренца вводятся в рассмотрение подвижные координаты. Уравнение (1.31) сохраняет свой математический и физический смысл при любых преобразованиях координат. Как это следует делать, указано в конце п.3.

Обсудим идею ковариантности основных уравнений физики при преобразованиях системы координат. Трудно понять, почему этой идее придается столь большое значение в физике. Ведь ясно с самого начала, что идея ковариантности не может играть значительной роли в физике. Например, из дифференциальной геометрии хорошо известно, что инвариантные, т.е. не зависящие от выбора системы координат, дифференциальные операторы не обладают свойством ковариантности. Почему же в физике, помимо инвариантности основных уравнений, нужно требовать еще и ковариантности этих уравнений? Согласимся на время с идеей ковариантности и посмотрим, относительно каких линейных преобразований координат и времени уравнение (1.30) обладает свойством ковариантности. Последняя означает, что уравнение (1.30), записанное в двух различных системах координат $x_1, x_2, x_3 t$ и $x_1', x_2', x_3' t'$, имеет совершенно одинаковый вид

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2\Phi'}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x_2'^2}+\frac{\partial^2\Phi'}{\partial x_3'^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi'}{\partial t'^2}, \tag{1.36}$$

где

$$\Phi[x_1(x',t'),\, x^2(x',t'),\, x_3(x',t'),\, t(x',\, t')] \equiv \Phi'(x_1',\, x_2',\, x_3',\, t'). \tag{1.37}$$

Напомним, что сейчас речь идет о чисто математических операциях, лишенных физического смысла, так как уравнение (1.30) справедливо только для неподвижных относительно тела отсчета систем координат. Здесь же в рассмотрение вводится подвижные системы координат. Далее удобнее будет предварительно сделать линейную замену независимых переменных

$$y_1 = x_1 - ct, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_1 + ct. \tag{1.38}$$

Ясно, что такая замена переменных не может испортить дело, так как невырожденные линейные преобразования образуют группу. В новых переменных уравнения (1.36) принимают вид

$$4\frac{\partial F}{\partial y_1 \partial y_4}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y_3^2}=0, \qquad 4\frac{\partial^2 F'}{\partial y_1'\partial y_4'}+\frac{\partial^2 F'}{\partial y_2'^2}+\frac{\partial^2 F'}{\partial y_3'^2}=0, \tag{1.39}$$

где

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,t)=\Phi\left(\frac{y_1+y_4}{2},\, y_2,\, y_3,\, \frac{y_4-y_1}{2c}\right)\equiv F(y_1,y_2,y_3,y_4),$$

а связь отображений F и F' та же, что и в (1.37).

Выясним, при каких линейных заменах переменных вида

$$y_1' = \alpha y_1 + \beta_* y_4, \quad y_2' = y_2, \quad y_3' = y_3, \quad y_4' = \beta y_1 + \gamma y_4 \quad (\alpha\gamma - \beta\beta_* \neq 0) \tag{1.40}$$

будут справедливы уравнения (1.39). Имеем легко проверяемое тождество

$$4\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_4} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_3^2} = 4\left(\alpha\beta_* \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1'^2} + \gamma\beta \frac{\partial^2 F'}{\partial y_4'^2}\right) + 4(\alpha\gamma + \beta\beta_*)\frac{\partial^2 F'}{\partial y_1' \partial y_4'} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_2'^2} + \frac{\partial^2 F'}{\partial y_3'^2} = 0.$$

Для справедливости (1.39) необходимо выполнение равенств:

$$\alpha\beta_* \frac{\partial^2 F'}{\partial y_1'^2} + \gamma\beta \frac{\partial^2 F'}{\partial y_4'^2} = 0, \qquad \alpha\gamma + \beta\beta_* = 1. \tag{1.41}$$

Поскольку в общем случае функция F' не может одновременно удовлетворять двум разным уравнениям (второму из (1.39) и (1.41), то окончательно для определения постоянных $\alpha, \beta, \beta_*, \gamma$ получаем систему

$$\alpha\beta_* = 0, \quad \gamma\beta = 0, \quad \alpha\gamma + \beta\beta_* = 1, \quad \alpha\gamma - \beta\beta_* \neq 0. \tag{1.42}$$

Эта система имеет всего два семейства решений:

$$\alpha \neq 0, \quad \gamma = 1/\alpha, \quad \beta = \beta_* = 0; \tag{1.43}$$

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \beta \neq 0, \quad \beta_* = 1/\beta. \tag{1.44}$$

Возвращаясь от переменных y_1, y_2, y_3, y_4 к переменным x_k, t, получаем два набора линейных преобразований координат, удовлетворяющих принципу ковариантности

$$x_1' = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}x_1 + \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}ct,\ t' = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha}t + \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\frac{x_1}{c},\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3; \tag{1.45}$$

$$x_1' = \frac{1+\beta^2}{2\beta}x_1 + \frac{1-\beta^2}{2\beta}ct,\ t' = -\frac{1+\beta^2}{2\beta}t - \frac{1-\beta^2}{2\beta}\frac{x_1}{c},\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3, \tag{1.46}$$

где α и β — любые вещественные числа, отличные от нуля. Ясно, что преобразования (1.45) и (1.46) не сводятся одно к одному. Преобразование Лоренца есть частный случай преобразования (1.45), получающееся только при положительных α с помощью замены

$$\alpha = \sqrt{(1 - \frac{v}{c})/(1 + \frac{v}{c})}. \tag{1.47}$$

Таким образом, уравнение (1.30) ковариантно не только относительно преобразований Лоренца, но и относительно более общих преобразований (1.45), (1.46), полное истолкование которых здесь не затрагивается. Выделять из (1.45) и (1.46) только одно преобразование Лоренца, да еще без достаточных у тому оснований, как-то не эстетично.

Итак, волновое уравнение, записанное в форме (1.31), инвариантно как относительно преобразования Галилея, так и относительно значительно более общих замен систем координат (но не систем отсчета!). Волновое уравнение в форме (1.30) может использоваться в физике только тогда, когда система координат неподвижна относительно инерциального тела отсчета. Ковариантность этого уравнения относительно преобразований Лоренца есть чисто математический факт, не переносимый на физические явления.

1.6 Уравнения Максвелла

Ниже рассматриваются уравнения Максвелла в пустоте, ибо включение токов требует обсуждения вопросов, не имеющих прямого отношения к теме данной работы. В современной физике уравнения Максвелла в пустоте записываются в виде:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.48}$$

В механике эти же уравнения записывались бы немного иначе:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{E}}{dt}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{1.49}$$

Так же, как и в случае с волновыми уравнениями, различие заключается в том, что в (1.48) входят в частные производные по времени, а в (1.49) — полные производные по времени. Если используются неподвижные системы координат, то уравнения (1.48) и (1.49) неразличимы между собой. Однако при использовании подвижных координат эти уравнения существенно различны. Именно это различие и приводит к тому, что для уравнений (1.48) принцип относительности Галилея не выполняется, а для уравнений (1.49) выполняется. С точки зрения механики, уравнения (1.48) в общем случае подвижных координат неприемлемы, так как они не удовлетворяют принципу объективности. Покажем это на простом примере. Рассмотрим электрическое поле бесконечно длинного однородно заряженного цилиндра. Как известно, в цилиндрической системе координат оно имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{A}{r}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad A = \text{const}. \tag{1.50}$$

Решение (1.50) удовлетворяет как уравнениям (1.48), так и уравнениям (1.49). Введем в рассмотрение пульсирующую цилиндрическую систему координат

$$r' = (2 + \cos\omega t)r, \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = z, \quad t' = t. \tag{1.51}$$

Решение (1.50) в штрихованной системе координат имеют вид

$$\mathbf{E} = \frac{A(2 + \cos\omega t')}{r'}\,\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{1.52}$$

Сами векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при этом, разумеется, не меняется. Подставляя (1.52) в (1.48) и (1.49), убеждаемся, что левые части этих уравнений обращаются в нуль, так как левые части (1.48) и (1.49) не зависят от выбора системы координат. Обращаются в нуль и правые части уравнения (1.49), так как они тоже не зависят от выбора подвижной системы координат, не меняющей время: $t' = t$. А вот левые части уравнений (1.48) в нуль не обращаются, так как

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\omega A\sin\omega t}{r'}\,\mathbf{e}_r \neq \mathbf{0},$$

т.е. уравнения (1.48) не выполняются. Но замена (1.51) — это всего лишь тривиальный способ изменения представления решения. Физическое содержание задачи от этого не зависит. Поэтому уравнения (1.48) применимы только при использовании системы координат, неподвижных относительно тела отсчета. Отсюда следует, что, во-первых, уравнения (1.48) и не должны удовлетворять принципу относительности Галилея и, во-вторых, физически бессодержательно рассматривать вопрос о том, как они ведут себя по отношению к преобразованию Лоренца. Невозможно сомневаться в том, что Дж.Максвелл в качестве своих уравнений признал бы именно (1.49), но не уравнения (1.48). Каким же образом объясняют в литературе по физике переход от уравнений (1.49) к уравнениям (1.48)? В большинстве случаев вообще не объясняют. В учебнике [4], (с.233) после "правильно" записанного уравнения (29), которое совпадает с первым из уравнений системы (1.49), следуют слова: "Так как $\mathbf{B}$ может зависеть от положения и от времени, мы напишем $\partial\mathbf{B}/\partial t$ вместо $d\mathbf{B}/dt$". Однако, как подробно показывалось в п.3 — формула (1.15) — это допустимо только при использовании неподвижных систем координат.

Обратимся к обсуждению принципа относительности Галилея применительно к уравнениям Максвелла. В принципе относительности речь идет о разных системах отсчета, а не о разных системах координат. Различие здесь принципиально и неустранимо. Например, вектор скорости частицы A относительно какой-то системы отсчета имеет определенное значение, не зависящее от системы координат. Однако скорость одной и той же частицы в различных инерциальных системах отсчета выражается совершенно разными векторами, — формула (1.29) — которые различаются не только по направлению, определяемому по отношению к отсчетному реперу, но и по модулю. Часто приходится читать, что классическая механика — это механика малых скоростей. Может быть, в каком-то смысле (пока не ясном) такое выражение и правильно. Однако в рациональной механике нет понятий больших и малых скоростей. Всегда найдутся такие инерциальные системы отсчета, относительно которых скорость одной и той же частицы может быть в один и тот же момент времени и сколь угодно большой, и сколь угодно малой. Возвращаясь к сравнению понятий замен систем координат и систем отсчета, замечаем, что первое из них носит чисто формальный характер, а второе является физическим утверждением, содержащим в себе правило соответствия между одними и теми же величинами, заданными в разных системах отсчета. Есть разные в этом смысле величины. В механике применяется аксиома о том, что масса частицы не зависит от выбора системы отсчета. Именно поэтому масса в механике не может зависеть от скорости. Кинетическая энергия частицы, также являющаяся скалярной величиной, тем не менее, зависит от выбора системы отсчета. То же самое можно сказать о векторах и тензорах. Поэтому прежде чем выяснить справедливость (или несправедливость) принципа Галилея, необходимо указать правило, связывающие одни и те же физические величины, заданные в разных системах отсчета. Если говорить об уравнениях Максвелла, то надо указать, как связаны векторы электрического $\mathbf{E}$ и магнитного полей $\mathbf{B}$ полей, заданные в разных системах отсчета. Трудность здесь в том, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, вообще говоря, зависят от скоростей движения зарядов. Скорости зарядов различны по отношению к разным системам отсчета. Поэтому может показаться, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ должны быть не индифферентными, т.е. зависеть от выбора системы отсчета. Однако нужно иметь в виду следующее. Рассмотрим частицу A_1. Пусть ее скорости в инерциальных S-системе и S_*-системе выражаются векторами $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_1^*$ соответственно. Как мы уже знаем, связь между этими векторами дается формулой

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_1, \tag{1.53}$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость S_*-системы относительно S-системы, представленная в S-системе. Как видим, в (1.53) входит вектор $\mathbf{v}_0$, что и указывает на не индифферентность вектора скорости. Рассмотрим еще одну частицу A_2, для нее справедливо такое же соотношение (1.53), как для A_1. Найдем относительную скорость частицы A_2 относительно частицы A_1:

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}_1) = \tilde{\mathbf{v}}_2 - \tilde{\mathbf{v}}_1. \tag{1.54}$$

Таким образом, относительные скорости частиц оказываются уже индифферентными векторами, т.е. векторами, безразличными к выбору системы отсчета.

Примем теперь во внимание, что электромагнитное поле связано не с движением зарядов вообще, а только с движениями зарядов относительно друг друга. Это так, ибо в противном случае нейтральных тел вообще не существовало бы. Поскольку относительные скорости индифферентны (безразличны) к выбору инерциальных систем отсчета, то можно думать, что и векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ должны быть индифферентными. Пусть поле характеризуется векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в S-системе, и векторами $\mathbf{E}_*$ и $\mathbf{B}_*$ S_*-системе. Примем аксиому.

Аксиома E1(Г.Герц): *векторы электрического* $\mathbf{E}$ *и магнитного* $\mathbf{B}$ *полей индифферентны, т.е. их значения в разных системах отсчета* S *и* S_* *связаны соотношением*

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}, \qquad \mathbf{B} = (-1)^\alpha \tilde{\mathbf{B}}, \tag{1.55}$$

где $\alpha = 0$*, если* S*-система и* S_**-система имеют одинаковые ориентации;* $\alpha = 1$*, если они имеют разные ориентации.*

Эта аксиома не может быть опровергнута логическими доводами, хотя ее экспериментальное опровержение, видимо, возможно, но крайне маловероятно. Заметим, что опыты Майкельсона и их модификации к замене систем отсчета, равно как и к замене систем координат не имеет никакого отношения. Запишем уравнения Максвелла (1.49) в S_*-системе. Для этого нужно просто поставить у всех величин, входящих в (1.49), звездочки. Далее перенесем эти уравнения в соответствии с указаниями п.4 в S-систему. В результате получим

$$(-1)^\alpha \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\tilde{c}}\frac{d\tilde{B}}{dt}, \quad \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \quad (-1)^\alpha \tilde{\nabla} \times \tilde{\mathbf{B}} = -\frac{1}{\tilde{c}}\frac{d\tilde{E}}{dt}, \quad \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0}. \tag{1.56}$$

Здесь принято, что $c_* = \tilde{c}$, т.е. при переносе скаляра из одной системы отсчета в другую он не меняется (это верно даже для тех скаляров, которые зависят от выбора системы отсчета, т.е. не следует путать операцию переноса, как чисто формальную вещь, с операцией замены системы отсчета, к которой мы еще не приступали). Множитель $(-1)^\alpha$ в (1.56) появился из-за того, что в разноориентированных системах отсчета векторное произведение определяется по-разному. Только теперь мы приступаем к операции замены системы отсчета. Уравнения (1.56) выражают в S-системе то, что видит наблюдатель в S_*-системе. Наблюдатель в S-системе видит не (1.56), а уравнения (1.49). Замена системы отсчета сводится к тому, что необходимо провести замену системы координат в (1.56) в согласии с требованием Галилея (1.29) и требованиями аксиомы E1, т.е. условиями (1.55). Очевидно, что при этом справедливы равенства $\nabla = \tilde{\nabla}$, $\mathsf{c} = \tilde{\mathsf{c}}$, так как они выполняются для любых замен систем координат, как подвижных, так и неподвижных. Подставляя (1.55) в (1.56) и учитывая тождества $\nabla = \tilde{\nabla}$, $\mathsf{c} = \tilde{\mathsf{c}}$ приходим к уравнениям (1.49). В этом и состоит принцип относительности Галилея. Никакой пользы из этого факта извлечь не удается, как, впрочем, этого и следовало ожидать. Напомним, что Г. Герц уже получал обобщение уравнений Максвелла, удовлетворяющее принципу относительности Галилея.

1.7 Рациональная механика и электродинамика

Обратимся теперь к обсуждению самого важного и до сих пор нерешенного механикой вопроса о причинах логической несовместимости классической механики и электродинамики. Дело здесь совсем не в принципе относительности Галилея. Причина лежит гораздо глубже и своими корнями уходит на два тысячелетия назад. Кажется необходимым хотя бы кратко затронуть один аспект исторического развития механики.

Основы рациональной механики были заложены еще Архимедом, среди многих достижений которого выделяются два фундаментальных положения, относящихся к равновесию тел: а) уравнение баланса сил и б) уравнение баланса моментов (принцип рычага). Архимед формулирует эти два положения как независимые законы природы. Все дальнейшее развитие механики сопровождалось поисками ответа на вопрос: “Действительно ли баланс сил и баланс моментов являются независимыми утверждениями?” Поначалу эта проблема исследовалась только в статике. Начиная с конца XVI и вплоть до конца XVIII века шли непрерывные атаки на принцип рычага Архимеда. Было найдено много более или менее строгих доказательств принципа рычага и даже утвердилось мнение, что баланс моментов не является независимым утверждением. Это мнение представлено во многих современных учебниках по механике. Удивительно, но самого главного обстоятельства в приводимых доказательствах принципа рычага “не замечают” до сих пор. А именно, во всех этих доказательствах существенно используются соображения симметрии. Но с появлением работы Э.Нетер (1918 г.) уже всем понятно, что соображения симметрии вполне могут заменить требования баланса сил и моментов. Поэтому принцип рычага есть независимое от баланса сил утверждение.

Современная рациональная механика имеет, можно сказать, точную дату рождения (1638 г.), и ее основателем по праву считается Галилею Галилей (1564 – 1642 гг.). Открытие Галилеем принципа инерции (1638 г.) является главным событием в классической физике, из которого уже естественно вытекает закон, впоследствии названный вторым законом Ньютона. Частная формулировка этого закона также открыта Галилеем, поэтому Ньютон называет его законом Галилея. В 1687 году появляются "Математические начала натуральной философии" Исаака Ньютона (1643 – 1727 гг.). Несмотря на то, что в этом труде не было представлено новых фундаментальных принципов, за исключением 3-го закона, "Начала" сыграли огромную роль в истории механики, ибо это была первая попытка систематического изложения механики. Конечно, главным в "Началах" является закон всемирного тяготения и следствия из него. С точки зрения фундаментальных принципов, главной заслугой Ньютона является постановка задачи о необходимости построения механики на основе ясно выраженных исходных постулатов, но самих этих постулатов Ньютон не знал. Ньютону удалось разрешить только ограниченную задачу: как по известным движениям находить силы. Многие крупнейшие ученые (например, Р.Кирхгоф) даже через два столетия были настолько очарованы этим успехом Ньютона, что всерьез считали 2-й закон Ньютона определением силы. Находить по заданным силам движение Ньютон не только не умел, но даже считал, что сформулированных в "Началах" законов для этого явно недостаточно. Итог своих воззрений на механику сформулировал сам И. Ньютон в 1717 году [5], с.301: "Vis inertia есть пассивный принцип, посредством которого тела пребывают в их движении или покое, получают движение[1], пропорциональное приложенной к ним силе, и сопротивляются настолько же, насколько сами встречают сопротивление (здесь формулировка всех трех законов, П.Ж.). По одному этому в мире еще не могло бы произойти движение. Был необходим иной принцип, чтобы привести тела в движение и раз они находятся в движении — требуется еще один принцип для сохранения движения. Ибо из различного сложения двух движений вполне ясно, что в мире не всегда имеется одно и то же количество движения. Если два шара, соединенные тонким стержнем, вращаются вокруг общего центра тяжести равномерным движением, в

[1]Под движением здесь и ниже Ньютон понимает то, что сейчас называется количеством движения.

то время как центр равномерно движется по прямой линии, проведенной в плоскости их кругового движения, то сумма движений двух шаров в том случае, когда шары находятся на прямой линии, описываемой их центром тяжести, будет больше, чем сумма их движений, когда они находятся на линии, перпендикулярной к этой прямой. Из этого примера ясно, что движение может получаться и теряться.” Эти слова были написаны через 30 лет после выхода “Математических начал”, и они дают ясное представление о состоянии механики того времени. Столь длинная цитата кажется необходимой, ибо искажения действительной истории механики в литературе весьма значительны. Ньютон достаточно велик без того, чтобы приписывать ему то, чего он не делал. Книга Э. Маха [6], где впервые появилось утверждение, получившее затем большое распространение, о том, что “после Ньютона в механику не было внесено ничего принципиально нового”, является сборником фантазий самого Э. Маха.

Задача, поставленная Ньютоном, была в значительной мере решена Л.Эйлером (1707 – 1783 гг.). На Эйлера огромное влияние оказали В.Лейбниц, Я. и И.Бернулли, Г.Гюйгенс, Ж.Даламбер. Существенная деталь — современная форма закона Галилея – Ньютона — была открыта К.Маклореном в 1742 г. Именно Леонард Эйлер ввел почти все понятия , которыми пользуется современная механика (исключая, разумеется, гамильтонову механику). То, что сегодня называется ньютоновской механикой, было построено Л.Эйлером в 1735 – 1758 гг. Опустив все подробности, отметим только формулировку 1-го закона динамики (1756 г.): “Скорость изменения количества движения произвольной системы равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему”. Эта формулировка несравнимо сильнее закона Галилея – Ньютона. В частности, из нее следует 3-й закон Ньютона. Однако дело даже не в первом законе динамики, а именно в строгом введении основных понятий, включая понятие силы, уничтожившее пропасть между статикой и динамикой. Все построения проведены Эйлером с такой легкостью и изяществом, с такой естественностью, что многие современники (и не только современники) даже не поняли, что на самом деле произошло. В 1771 году Л.Эйлер окончательно установил, что уравнение баланса количества движения и кинетического момента — суть независимые законы механики. А это означало принципиальную неполноту ньютоновской механики. Возникла новая механика — механика Эйлера, в которой место материальной точки в ньютоновской механике заняло абсолютно твердое тело. С этой поры “ элементарная” частица наделяется не только количеством движения, но и собственным кинетическим моментом. Эйлер формулирует второй закон динамики. Его современная форма такова: “ Скорость изменения кинетического момента произвольной системы равна главному вектору внешних моментов и моментов внешних сил, действующих на эту систему”. В механике Эйлера вводятся воздействия двух типов. Воздействия, выражаемые полярными векторами, называются силами. Воздействия, выражаемые аксиальными векторами, называются моментами.

Мы уже вплотную подошли к интересующей нас точке разрыва между механикой и электродинамикой, но необходимо сказать еще несколько слов. Видимо, единственным человеком, осознавшим открытие Эйлера, был Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813 гг.), но по ряду причин он не захотел с ним согласиться. В попытках опровергнуть открытие Эйлера, Лагранж вновь и вновь обращается к доказательству принципа рычага и доводит это доказательство до высокой степени совершенства, хотя избавиться от соображений симметрии ему, разумеется, не удается. Гений Лагранжа позволил ему насытить ньютонову механику новыми идеями, плодотворность которых надолго отвлекла всех механиков от основных принципов и обратила их внимание на решение важнейших конкретных проблем, включая проблемы механики сплошных сред. Так и получилось, что резко продвинув вперед одни аспекты механики, Лагранж почти на столетие задержал прогресс механики в других, более важных аспектах. Воистину прав сказавший, что гений ученого оценивается тем, на сколько лет он задержал развитие науки. Правда, это верно только в отношении гениев. Есть еще сверхгении, идеи которых входят в науку навсегда, но сверхгении крайне редки. В истории физики ими были: Архимед, Галилео Галилей, Леонард Эйлер и Джеймс Клерк Максвелл.

Обратимся к описанию проблемы, которую ставит перед механикой электродинамика Максвелла.

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Иными словами, в ньютоновской механики задействованы частицы только одного сорта. В электродинамике существенную роль играют частицы трех сортов: нейтральные, положительные и отрицательные, которые наделяются не только массой, но и зарядом. Природа заряда до сих пор точно не известна, как, впрочем, и природа массы. Поэтому важным здесь является не то, какими качествами обладает частица, а число несводимых друг к другу качеств, которыми наделена частица, т.е. важна “размерность” частицы. В ньютоновской механике “размерность” элементарной частицы равна единице, “размерность” абсолютно твердого тела в макромеханике равна четырем, а в электродинамике “размерность” частицы должна быть заведомо больше четырех, чтобы включить заряд. Уже по одной этой причине очевидно, что логический разрыв между ньютоновской механикой и электродинамикой неизбежен и неустраним. Максвелл ясно осознавал этот разрыв и пытался его устранить, изобрел электродинамику с "колесиками". Может быть напрасно в дальнейшем эти усилия никем не были продолжены. Нельзя забывать, что сверхгении знают намного больше того, что они в состоянии выразить в терминах рациональной науки. Так или иначе, но Максвелл не сумел преодолеть разрыв, существующий между механикой и электродинамикой. Вместо этого он просто "перепрыгнул" через пропасть и написал уравнения электродинамики такими, какими они должны быть на основании известных фактов. если бы в эти уравнения входило бы только электрическое поле, то все было бы просто и никакого разрыва с ньютоновской механикой не было бы. Однако в уравнения Максвелла входит вектор магнитного поля. Судя по многим признакам, Максвелл воспринимал его как моментное воздействие. В ньютоновской механике моменты порождаются силами: если нет сил, то и нет моментов. В электродинамике дело обстоит иначе: электрическое и магнитное поля в общем случае не сводимы одно к другому, магнитное поле может существовать при отсутствии электрического поля и наоборот. Вот именно в этом пункте Максвелл и вступил в вопиющее противоречие с ньютоновской механикой. Видимо, это был первый тревожный сигнал, когда реальные факты указывали на принципиальную неполноту ньютоновской механики. Однако никто, кроме Максвелла, не услышал этого сигнала. Вторично он прозвучал в 1918 году, когда Э.Нетер показала, что баланс сил вытекает из однородности пространства, а баланс моментов следует из изотропности пространства. Теорема Э.Нетер обратима. Поэтому, если допустить, что баланс моментов есть следствие баланса сил, то сразу приходим к абсурдному выводу, что изотропия пространства (системы отсчета) есть следствие его однородности.

Механика Эйлера получила свое развитие только в XX веке, главным образом, в последние 40 лет. В настоящее время она обрела вполне оформившуюся структуру в механике сплошных сред. Однако попыток объединения механики и электродинамики в рамках механики Эйлера до сих пор не предпринято.

Какие же черты механики Эйлера позволяют надеяться, что разрыв между механикой и электродинамикой может быть устранен? Прежде всего, это модель "элементарной" частицы, которая в механике Эйлера аналогична абсолютно твердому телу в том смысле, что ее кинетическая энергия является квадратичной формой линейной и угловой скоростей частицы. Коэффициенты этой квадратичной формы называются тензорами инерции, а "размерность" частицы равна 10. В зависимости от строения энергии частицы различаются по сортам. У нейтральных частиц отсутствует перекрестный член в энергии: эти частицы вполне аналогичны абсолютно твердому телу в макромеханике, а трансляционные и вращательные движения у них как бы не взаимодействуют между собой. У "положительных" и "отрицательных" частиц присутствует перекрестный член в энергии, причем один сорт частиц отличается от другого строением перекрестного члена, т.е. у обсуждаемых частиц взаимодействие трансляционных и вращательных движений неустранимо. Прямой аналогии этих частиц с абсолютно твердым телом в макромеханике не существует, а композиция "положительных" и "отрицательных" частиц приводит к нейтральной частице. Любопытно, что если эти частицы действительно можно отождествить с заряженными частицами, то ни электрон, ни протон нельзя представить себе в виде маленьких шариков. Более того, их вообще нельзя вообразить в виде обычного маленького твердого тела. Имеется еще одна особенность, отличающая "электрон" от маленького абсолютно твердого тела: очень похоже на то, что не существует инерциальной системы отсчета, в которой траектория "центра масс" движущегося по инерции "электрона" была бы прямолинейной. Впрочем, без формул все это объяснить довольно трудно. Специфична в механике Эйлера аксиоматика для воздействий, но во многих отношениях она даже проще, чем в ньютоновской механике. Если для силовых и моментных воздействий ввести потенциалы, то они очень похожи на потенциалы в электродинамике, и наличие производных по времени в уравнениях Максвелла существенно связано с наличием перекрестного члена в кинетической энергии частиц. К сожалению, в данный момент автор не может утверждать, что в рамках механики Эйлера разрыв между механикой и электродинамикой действительно может быть устранен. Вопросов пока больше, чем ответов на них. Зато совершенно ясна необходимость решения следующей дилеммы.

Либо механика сумеет включить в свои структуры электродинамику, и тогда она подтвердит свое право считаться фундаментальной наукой, либо механика должна признать свою принципиальную ограниченность и согласиться с ролью важной прикладной науки. Правда, в последнем случае должна быть построена какая-то другая наука, которая могла бы заменить механику и каковой пока что не просматривается.

Список литературы

[1] **Мандельштам Л.И.** Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 437 с.

[2] **Фок В.А.** Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИФМЛ, 1961. 563 с.

[3] **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

[4] **Парселл Э.** Электричество и магнетизм. Берклеевский курс физики. В 5т., М.: Наука, 1983. Т.II. 415 с.

[5] **Ньютон И.** Оптика. М.: ГИТТЛ, 1954. 367 с.

[6] **Мах Э.** Механика (Историко-критический очерк ее развития). СПб.: Общественная польза, 1909. 448 с.