УДК 539.3

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ СИММЕТРИИ ТЕНЗОРОВ И ТЕНЗОРНЫХ ИНВАРИАНТОВ

© ***П.А. Жилин***

The theory of the tensor symmetry is modified in order to include into consideration the Non-Euclidean tensors. The polar (Euclidean) and axial (Non-Euclidean) tensors are discussed. A new definition of the tensor invariants is given. This definition coincides with the conventional one only for the Euclidean tensors. It is shown that any invariant is the solution of some partial differential equation of the first order. The number of the independent solutions of this equation determines the minimal number of the invariants which are necessary in order to fix a system of tensors as a rigid whole. This result was not found in the known publications. The examples of some systems of tensors are discussed in order to give the comparison with known results.

1 Введение. Общая постановка проблемы

Теория инвариантов систем тензоров относится к числу классических разделов линейной алгебры и тензорного исчисления. Классическую постановку проблемы инвариантов можно найти в книгах [1, 2, 3]. Применительно к механике сплошных сред и, в частности, теории определяющих уравнений, теория инвариантов имеет две существенные особенности. Первая особенность связана с тем, что в механике исследуются только ортогональные инварианты и практически не затрагиваются инварианты относительно линейной группы преобразований, как это имеет место в алгебре. Вторая особенность связана с использованием в механике не только евклидовых объектов, но и тензоров других типов, например, аксиальных тензоров. Начало применению ортогональных инвариантов евклидовых тензоров в механике сплошных сред было положено О. Коши в 1850 году. Представление о современных направлениях использования теории инвариантов в механике сплошных сред можно получить по книге [4]. Отметим, что значительная часть результатов по теории инвариантов относится к так называемым полиномиальным инвариантам [5]. Однако нет физических оснований для выделения полиномиальных инвариантов среди всех возможных инвариантов. Поэтому в данной работе полиномиальность инвариантов не предполагается. Достаточно полный список современных работ по теории инвариантов можно найти в обзоре [6]. В данной работе будут рассматриваться инварианты систем тензоров относительно полной ортогональной группы, которые наиболее важны в механике сплошных сред. Отличие данной работы от известных состоит в распространении существующей теории на неевклидовы тензоры, которые играют весьма важную роль в механике.

Существо проблемы инвариантов заключается в следующем. Пусть дана система векторов и тензоров второго ранга

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_m, \quad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots \mathbf{A}_n. \tag{1}$$

Ниже используется прямое тензорное исчисление [7, 8, 9], при котором векторы рассматриваются как направленные отрезки, а тензоры второго ранга являются совокупностями упорядоченных пар векторов. Заметим, что некоторые тензоры, например, градиент деформации, в [7] отличаются от тензоров в [8] операцией транспонирования. В книгах [7, 9] обозначения совпадают. Преимущества прямой тензорной записи заключаются в том, что, например, объекты (1) заключают в себе всю необходимую информацию. При арифметическом (координатном) подходе за кадром остаются используемые базисы, о которых необходимо помнить дополнительно. Следует иметь в виду, что авторы, использующие координатный подход, часто используют записи типа (1), но это просто условные обозначения. Все равно вектор $\mathbf{a}$ — это тройка координат $a^i : (a^i) \equiv \mathbf{a}$ относительно некоторого базиса $\mathbf{g}_i$, который нужно помнить отдельно. При прямом подходе вектор $\mathbf{a} \equiv a^i \mathbf{g}_i$, причем ни координаты a^i, ни базисные векторы $\mathbf{g}_i$ не нужны. Без ограничения общности можно считать, что тензоры второго ранга, входящие в систему (1), симметричны. Действительно, если какой-либо тензор $\mathbf{A}_i$ несимметричен, то его можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Антисимметричный тензор, в свою очередь, допускает [9] однозначное представление через сопутствующий вектор, который можно включить в список векторных величин, входящих в (1). Здесь, однако, возникают нюансы, связанные с типом рассматриваемых тензоров и приводящие к неясностям. Пусть дана тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. В литературе утверждается [4], что на обладает шестью независимыми инвариантами

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a},\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{c},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c},\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.$$

Каждому из этих векторов сопоставить кососимметричный тензор по формуле

$$\mathbf{W}_a = \mathbf{a}\times\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad -2\mathbf{a} = (\mathbf{W}_a)_\times\,.$$

После этого можно работать с системой трех кососимметричных тензоров $\mathbf{W}_a$, $\mathbf{W}_b$, $\mathbf{W}_c$. Казалось бы, что система трех кососимметричных тензоров также должна обладать шестью базисными инвариантами. Однако в литературе [4] утверждается, что она обладает семью базисными инвариантами. Никаких комментариев по поводу этого странного положения дел в литературе не приводится. Кроме того, не обсуждается ни тип рассматриваемых векторов, ни тип сопоставляемых им кососимметричных тензоров. Между тем, они имеют противоположные типы: если векторы полярны, то сопоставляемые им кососимметричные тензоры аксиальны и наоборот. Поэтому невозможно ограничиться рассмотрением объектов только одного типа.

Отметим некоторые наиболее известные примеры систем типа (1), использующихся в механике. Пример одного векторного аргумента дает нам кинетическая энергия материальной точки. Энергия деформации нелинейно упругой изотропной неполярной среды зависит от одного симметричного тензора второго ранга. Энергия деформации мультиполярной изотропной среды (среды Коссера, среды Кельвина и др.) зависит от двух несимметричных тензоров второго ранга, причем один из них полярен, а другой аксиален. При переходе к симметричным тензорам второго ранга получаем систему из двух векторов и двух симметричных тензоров второго ранга, причем один вектор и один тензор полярны, а остальные — аксиальны. Энергия деформации оболочки зависит [10] от двух тензоров второго ранга, один из которых полярен, а другой — аксиален, и одного $\mathbf{n}$-ориентированного вектора. В электродинамике энергия зависит от двух векторов, один из которых полярен (вектор электрического поля), а другой (вектор магнитного поля) — аксиален. Можно привести много других примеров.

Классическое определение инвариантов системы (1) можно найти, например, в [3]. Известна теорема Гильберта [1], гласящая, что конечная система тензоров имеет конечное число функционально независимых базисных инвариантов, т.е. таких инвариантов, через которые функциональным образом выражаются все остальные инварианты. Однако теорема Гильберта ничего не говорит о числе инвариантов, составляющих базис. Последней проблеме, назовем ее *Проблемой I*, посвящено большое количество работ [3] – [6], [11] – [18], в которых можно найти ссылки и на другие работы[1]. Но окончательного решения *Проблема I* так и не получила. Можно сформулировать проблему, назовем ее *Проблемой II*, несколько иначе.

Проблема II: *найти минимально полный набор инвариантов системы (1), фиксация которых определяет систему (1) с точностью до жесткого поворота в пространстве.*

С математической точки зрения сказанное означает следующее. Пусть наряду с системой (1) дана еще одна система

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_m, \quad \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots \mathbf{B}_n. \tag{2}$$

Требуется установить минимально полный набор инвариантов систем (1) и (2), совпадение которых гарантирует существование тензора поворота $\mathbf{P}$ такого, что справедливы равенства

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{b}_m = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}_m,$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}, \quad \dots, \quad \mathbf{B}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}. \tag{3}$$

Тензором поворота называют собственно ортогональный тензор. Подробное описание тензора поворота и его свойств можно найти в книге [9]. Иными словами, если базисные инварианты двух систем тензоров совпадают, то эти системы отличаются друг от друга только поворотом как жесткое целое.

Строго говоря, обе постановки проблемы должны приводить к совершенно одинаковым результатам. Однако это не так. Затруднение возникает при определении понятия инварианта. С чисто математической точки зрения возможны различные определения инвариантов и в этой связи может возникать разве что терминологическая дискуссия. Вторая постановка проблемы исключает возможность дискуссии: определение инвариантов должно быть таким, чтобы оно допускало решение *Проблемы II*. Заметим, что решение *Проблемы II* одновременно решает *Проблему I*, но обратное верно не для всякого определения инвариантов. Важно подчеркнуть, что в теории определяющих уравнений сплошных сред важна вторая и только вторая постановка проблемы. Поэтому именно ее решение и рассматривается ниже[2].

2 Ортогональные преобразования тензоров

Классическое определение инвариантов и классическая теория симметрии тензоров применимы только для полярных (евклидовых) тензоров. Евклидовы тензоры отнюдь не исчерпывают список объектов, встречающихся в приложениях. В работе [10] введено понятие ориентированных тензоров, для которых предложена теория симметрии. Основные результаты работы [10] воспроизведены в работе [19].

[1]Весьма интересна во многих отношениях статья [18] известного ученого Сэмуэля Ривлина. В этой работе С. Ривлин высказывает свою критическую позицию по нескольким важнейшим вопросам механики сплошных сред. В частности, в ней обсуждается и проблема инвариантов. Именно эта работа стимулировала автора к написанию данной статьи.

[2]Автор приносит свои извинения тем, кому отдельные места в статье покажутся слишком элементарными, но данная статья обращается не только к "крутым" теоретикам, но и к тем, кто использует теорию инвариантов в сугубо прикладных целях.

Частным случаем ориентированного тензора является аксиальный (псевдоевклидовый) тензор. Понятие аксиального вектора давно и широко используется в литературе. Однако корректное введение аксиального вектора можно найти только в книге [9]. В частности, в [9] показано почему нельзя складывать евклидовы и псевдоевклидовы тензоры. Для сравнения: в работе [18] считается, что складывать полярные и аксиальные объекты можно. Приложение классической теории симметрии к аксиальным объектам ведет к ошибочным результатам. Собственно говоря, именно это обстоятельство обусловило необходимость введения новой теории симметрии в работе [10]. В приложениях аксиальный вектор, в частности, возникает как результат векторного произведения двух полярных векторов. Поскольку классическая теория симметрии при этом не работает, а ее использование ведет к абсурдным результатам, то некоторые авторы [8] вообще отказались от использования векторного произведения. Однако отказ от использования аксиальных объектов ведет к совершенно неоправданным усложнениям во многих разделах механики. Например, в динамике твердого тела, теории мультиполярных сред, электродинамике и др. Следует подчеркнуть, что аксиальные объекты обязаны своим возникновением тому факту, что в мире существуют два принципиально различных типа движения: трансляционные и спинорные движения [9]. Трансляционным движениям отвечают полярные объекты, а спинорным движениям отвечают аксиальные объекты. Поэтому кажется целесообразным полностью узаконить аксиальные объекты в механике, вместо того, чтобы вводить для них искусственные конструкции, связанные с повышением ранга рассматриваемых тензоров. Что касается теории симметрии, то она легко обобщается на аксиальные (псевдоевклидовы) тензоры. Это и будет сделано ниже.

Прежде всего, необходимо ввести понятие ориентированной системы отсчета [9]. Трансляционные движения определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости, моменты и т.д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются объекты, называемые спин-векторами [9]. Именно спин-векторы являются прямыми носителями физического содержания того или иного спинорного понятия. Чтобы определить спин-вектор необходимо в системе отсчета задать прямую, называемую осью спин-вектора, и в плоскости, ортогональной оси, задать круговую стрелку, охватывающую ось. Длина этой круговой стрелки называется модулем спин-вектора, а направление стрелки показывает направление поворота или вращения. Спин-векторы очень удобны для работы на интуитивном уровне, но на формальном уровне удобнее работать не с ними, а с так называемыми аксиальными векторами, сопоставляемыми по определенному правилу спин-векторам. Принятие этого правила называется ориентацией системы отсчета. Каждому спин-вектору $\hat{\mathbf{a}}$ сопоставляется "обычный" вектор $\mathbf{a}$ таким образом, что выполняются условия:

1) $\mathbf{a}$ расположен на оси спин-вектора $\hat{\mathbf{a}}$, 2) модуль $\mathbf{a}$ равен модулю $\hat{\mathbf{a}}$, 3) $\mathbf{a}$ направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка спин-вектора показывала движение либо против хода часовой стрелки (правоориентированная система отсчета), либо по ходу часовой стрелки (левоориентированная система отсчета).

Векторы, сопоставляемые по указанному правилу спин-векторам, называются аксиальными. Видим, что аксиальные векторы не зависят от выбора системы координат и не меняются при замене правой системы координат на левую и наоборот. Таким образом в ориентированной системе отсчета действуют два типа вектора (направленных отрезков): одни из них не реагируют на изменение ориентации системы отсчета и называются полярными, а другие при изменении ориентации умножаются на (-1) и называются аксиальными. Важно подчеркнуть, что введенное правило ориентации существует только в наших головах и само по себе не отражено в формальных определениях, связанных с аксиальным вектором. По этой причине понятие аксиальности должно быть дополнительно введено в определение ортогонального преобразования тензоров. Понятно, что аксиальными могут быть и тензоры любого ранга. Например, диада векторов, один из которых является полярным, а другой аксиальным, является аксиальным тензором второго ранга.

Определение: *объекты, которые не зависят от выбора ориентации в системе отсчета, называются полярными или евклидовыми; объекты, которые при изменении ориентации в системе отсчета умножаются на (-1), называются аксиальными или псевдоевклидовыми.*

Согласно принятому определению аксиальными могут быть скаляры, векторы и тензоры высших рангов. Полярные скаляры часто называют абсолютными. Примерами абсолютных скаляров в физике являются энергия, температура, объем и т.д. Простейшим и часто встречающимся примером аксиального скаляра является смешанное произведение трех полярных векторов

$$\mathrm{f} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \tag{4}$$

Если один из векторов в смешанном произведении является аксиальным, то оно будет абсолютным скаляром. Другим примером аксиального скаляра является проекция аксиального вектора, например вектора угловой скорости или вектора момента силы, на какое-либо направление в системе отсчета.

Введем понятие ортогонального преобразования тензоров разных рангов. Пусть дан ортогональный тензор $\mathbf{Q}$.

Определение: *ортогональными преобразованиями скаляра* g*, вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора второго ранга* $\mathbf{A}$ *называются соответственно величины*

$$g' \equiv (\det\mathbf{Q})^{\alpha} g, \; \mathbf{a}' \equiv (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}, \quad \mathbf{A}' \equiv (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}, \quad (5)$$

где $\alpha = 0$ *для полярных объектов и* $\alpha = 1$ *для аксиальных объектов.*

Для полярных объектов вводимое определение ортогонального преобразования совпадает с общепринятым. Для аксиальных объектов оно было впервые введено в работе [10], в которой даны определения и для других типов тензоров. Для иллюстрации естественности вводимого определения ортогонального преобразования аксиальных объектов рассмотрим два простых примера. Рассмотрим аксиальный скаляр (4). Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ полярны. Тогда ортогональное преобразование скаляра f, определенного выражением (4) можно определить непосредственно

$$f' = \mathbf{a}'\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\cdot[(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b})\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{c})] = \\ = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}})\cdot[(\det\mathbf{Q})\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] = (\det\mathbf{Q})\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\,.$$

Здесь использовано тождество [9]

$$(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b})\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{c}) = (\det\mathbf{Q})\,\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

В результате пришли к определению (5). Типичным примером аксиального вектора является векторное произведение двух полярных векторов. В этом случае также возможно дать определение ортогонального преобразования непосредственно на основе определения ортогонального преобразования полярных векторов

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}'\times\mathbf{b}' = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}) = (\det\mathbf{Q})\,\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.$$

Аналогично можно объяснить определение ортогональных преобразований для тензоров любого ранга [10].

Обратимся к введению важного физического понятия симметрии объектов. Интуитивное представление о симметриях тел имеется практически у каждого человека. Но в рациональной науке эти интуитивные представления должны быть однозначно определены в математической форме. Например, физической операции зеркального отражения, осуществляемой с помощью реального зеркала, должна соответствовать математическая операция, в которой реальному зеркалу должен соответствовать однозначно определенный математический объект. Реальному зеркалу соответствует плоскость, совпадающая с плоскостью зеркала, которую обычно определяют заданием вектора единичной нормали $\mathbf{n}$. Математический объект, точно соответствующий реальному зеркалу, действительно существует и определяется заданием тензора второго ранга $(\det\mathbf{Q} = -1)$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \quad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}. \qquad (6)$$

Если тензором зеркального отражения (6) подействовать на вектор $\mathbf{a}$, то получим вектор $\mathbf{a}_* = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}$. Проекции векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_*$ на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{n}$, совпадают, а проекции этих векторов на вектор $\mathbf{n}$ равны между собой по модулю, но противоположны по направлению.

Еще одним важным представлением о симметрии является симметрия тел относительно разного рода поворотов. Например, шар не меняется при произвольных поворотах вокруг своего центра. Этому представлению также отвечает вполне определенный математический объект, называемый тензором поворота, который в соответствии с теоремой Эйлера [9] может быть представлен в следующем виде $(\det\mathbf{Q} = +1)$

$$\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{m}) \equiv \\ \equiv (1-\cos\varphi)\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \cos\varphi\mathbf{E} + \sin\varphi\,\mathbf{m}\times\mathbf{E}, \quad (7)$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ определяет прямую, называемую осью поворота, а угол φ называется углом поворота. Действие тензора поворота (7) на вектор $\mathbf{a}$ сводится к повороту этого вектора вокруг оси поворота на угол φ. Замечательным является тот факт, что любой элемент симметрии тела может быть представлен в виде композиции тензоров типа (6) и (7). Как видим, симметрии тел описываются тензорами второго ранга.

Определение: *группами симметрии скаляра* g*, вектора* $\mathbf{a}$ *и тензора второго ранга* $\mathbf{A}$ *называются соответственно множества ортогональных решений уравнений*

$$(\det\mathbf{Q})^{\alpha}\, g = g, \quad (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}, \quad (8)$$

где скаляр g*, вектор* $\mathbf{a}$ *и тензор второго ранга* $\mathbf{A}$ *считаются заданными, а ортогональные тензоры* $\mathbf{Q}$ *подлежат определению.*

Смысл введенного определения вполне ясен. Если ортогональное преобразование рассматриваемого объекта совпадает с исходным объектом, то ортогональный тензор, входящий в это преобразование, называется элементом симметрии данного объекта. Очевидно, что множество элементов симметрии объекта действительно образует группу. В самом деле, это множество не пусто, поскольку единичный тензор является элементом (тривиальным) симметрии любого объекта. Обратный элемент также существует для любого элемента симметрии. Осталось только убедиться, что если тензоры $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ являются элементами симметрии, то и их композиция $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$ является элементом симметрии, т.е. принадлежит к рассматриваемому множеству. Покажем это на примере тензора второго ранга $\mathbf{A}$. Пусть тензоры $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ являются элементами симметрии тензора $\mathbf{A}$, т.е. пусть они удовлетворяют уравнениям

$$(\det\mathbf{Q}_1)^\alpha \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{A}, \; (\det\mathbf{Q}_2)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{A}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}(\det\mathbf{Q}_3)^\alpha \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_3^T &= \\ = (\det\mathbf{Q}_2)^\alpha (\det\mathbf{Q}_1)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{Q}_2^T &= \\ = (\det\mathbf{Q}_2)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_2^T &= \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Здесь мы дважды использовали уравнения (2) и убедились, что тензор $\mathbf{Q}_3$ принадлежит к множеству элементов симметрии. Таким образом, множество элементов симметрии обладает всеми признаками, позволяющими назвать это множество группой.

Опишем группы симметрии скаляров, векторов и симметричных тензоров второго ранга. Для скаляров непосредственно из определения видим, что группа симметрии абсолютного скаляра совпадает с полной ортогональной группой, а группа симметрии аксиального скаляра совпадает с собственно ортогональной группой.

Группа симметрии полярного вектора $\mathbf{a}$ состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и зеркальных отражений от плоскостей, параллельных $\mathbf{a}$, т.е. из тензоров (7) при $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и тензоров (6) при $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$.

Группа симметрии аксиального вектора $\mathbf{a}$ состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и зеркальных отражений от плоскостей, ортогональных $\mathbf{a}$, т.е. из тензоров поворота (7) при $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и тензоров зеркальных отражений (6) при $\mathbf{n} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$. При экспериментальной проверке этого факта с помощью зеркала следует помнить, что прообразом аксиального вектора является спин-вектор, а зеркало ничего не знает о соглашении об ориентации, которое существует только в наших головах. Поэтому при работе с зеркалом следует использовать не аксиальный вектор, а его прообраз, т.е. спин-вектор. Таким образом, группы симметрии полярных и аксиальных векторов существенно различны.

Группа симметрии симметричного полярного тензора второго ранга, все собственные числа которого различны, состоит только из зеркальных отражений от плоскостей, ортогональных собственным векторам этого тензора. Зеркальные отражения принадлежат к группе симметрии аксиального симметричного тензора только в исключительных случаях. Пусть, например, зеркальное отражение $\mathbf{E} - 2\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$ принадлежит к группе симметрии симметричного аксиального тензора $\mathbf{A}$. Это возможно тогда и только тогда, когда тензор $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = A(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) + B(\mathbf{m} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{m}) \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\mathbf{A} = 0,$$

где A и B суть аксиальные скаляры, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ есть ортонормированный базис. Если имеются две плоскости зеркальной симметрии, ортогональные векторам $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, то $B = 0$. Три ортогональных плоскости зеркальной симметрии имеет только нулевой аксиальный тензор. Столь существенное различие между полярными и аксиальными объектами сильно сказывается на всей теории инвариантов.

3 Ортогональные инварианты и теорема о базисе

Обратимся к проблеме инвариантов[3]. Пусть дан конечный набор векторов и тензоров второго ранга

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_m, \quad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_n. \tag{9}$$

Как уже отмечалось во введении, тензоры в системе (9) можно считать симметричными. В систему (9) входит $m + n$ объектов или, в пересчете на координаты, $N = 3m + 6n$ скалярных функций.

Определение: *скалярная функция*

$$F = F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_m, \quad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_n)$$

называется ортогональным инвариантом системы объектов (9) если для любых ортогональных тензоров выполняется равенство

$$F(\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_m, \quad \mathbf{A}'_1, \ldots, \mathbf{A}'_n) = = (\det\mathbf{Q})^\alpha F(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n), \tag{10}$$

где величины со штрихами определены формулами (5); $\alpha = 0$, если F есть абсолютный скаляр и $\alpha = 1$, если F есть аксиальный скаляр.[4]

[3]Ниже рассматриваются инварианты относительно полной ортогональной группы.

[4]На первый взгляд кажется, что определение (10) совпадает с определением, принятым в [5]. Однако это не так. Во-первых, определение ортогонального преобразования неевклидовых объектов в работе [5] вообще не определено. Определение (10) используется в [5] для демонстрации того, что аксиальный скаляр не является инвариантом относительно полной ортогональной группы, что находится в радикальном противоречии с точкой зрения, принятой в данной работе.

Обратим внимание, что в обеих частях уравнения (10) символ отображения F один и тот же. Иными словами, уравнение (10) есть функциональное уравнение для определения функции F. Поэтому далеко не всякая скалярная функция аргументов (9) удовлетворяет уравнению (10). Вообще говоря, существует несчетное множество решений уравнения (10), но не все они функционально независимы. Основная проблема здесь заключается в установлении минимального числа инвариантов, через которые могут быть выражены все остальные решения уравнения (10). Ниже излагается подход, опирающийся на основную идею теории непрерывных групп.

С физической точки зрения проблема инвариантов заключается в следующем: найти минимальное число инвариантов, задание которых фиксирует систему (9) с точностью до жесткого поворота в системе отсчета. Интуитивно число этих инвариантов нетрудно подсчитать. Сначала рассмотрим частные случаи. Пусть система (9) состоит только из одного вектора. Тогда очевидно, что достаточно задать только один инвариант, а именно модуль вектора. Если система состоит из одного симметричного тензора второго ранга, то достаточно задать три инварианта. Например, три собственных числа или три главных инварианта. Если система (9) состоит из одного вектора $\mathbf{a}$ и симметричного тензора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ или, что то же самое, из одного тензора второго ранга общего вида, то необходимо задать шесть инвариантов: три главных инварианта тензора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ и три координаты вектора $\mathbf{a}$ относительно базиса, состоящего из собственных векторов тензора $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. Здесь возникает, тем не менее, проблема, связанная с неоднозначностью определения собственных векторов тензора. Если все собственные числа тензора различны, то однозначно определяются только диады из собственных векторов, а сами собственные векторы определяются с точностью до выбора их положительных направлений. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться ниже.

Нетрудно теперь подсчитать минимально необходимое число независимых инвариантов системы (9), задание которых фиксирует эту систему с точностью до поворота в пространстве. Это число равно $N_* = 3m + 3n + 3(n-1)$, где $3n$ это число главных инвариантов тензоров $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_n$, число $3m$ — это число координат векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots \mathbf{a}_m$ относительно собственных векторов, например, тензора[5] $\mathbf{A}_1$, число $3(n-1)$ — это число углов, фиксирующих собственные векторы тензоров $\mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_n$ относительно тройки собственных векторов тензора $\mathbf{A}_1$. Далее принимается, что $m + n \geq 1$. Обратим внимание, что справедлива связь числа независимых инвариантов N_* с числом координат N, выражаемая формулой

$$N_* = N - 3, \quad N > 3. \tag{11}$$

Сказанное выше является совершенно очевидным с интуитивной точки зрения. Тем не менее, в литературе, например в [3], указывается другое число необходимых инвариантов. Поэтому необходимы формально строгие доказательства утверждения (11). Одна из возникающих здесь проблем состоит в предположении, что все собственные числа тензора $\mathbf{A}_1$ различны, а сам тензор $\mathbf{A}_1$ оказывается выделенным. Хотелось бы иметь такие инварианты, в которые все тензоры $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_n$ входили бы равноправно. Подчеркнем, что определение размерности базиса инвариантов и определение наиболее подходящих инвариантов, составляющих базис, — суть разные проблемы, которые могут рассматриваться отдельно. Именно так мы и будем поступать, причем определение наиболее подходящих инвариантов в работе не доведено до необходимого уровня общности и строгости.

***Теорема**: размерность N_* базиса инвариантов системы (9) связано с числом N координат объектов, входящих в систему (9), следующими формулами*

$$N_* = 1 \ \textit{при} \ m = 1, n = 0; \quad N_* = N - 3 \tag{12}$$

во всех остальных случаях.

Доказательству этой теоремы посвящены оставшиеся пункты данной работы.

4 Основное уравнение теории инвариантов

Определение (10) инварианта системы (9) содержит в себе произвольный ортогональный тензор $\mathbf{Q}$. Ведем в рассмотрение семейство ортогональных тензоров $\mathbf{Q}(\tau)$, непрерывно зависящее от вещественного параметра τ. Можно доказать[6], что существует такой вектор $\boldsymbol{\omega}(\tau)$, что справедливы равенства

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{Q}(\tau) = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{Q}(\tau),\ \mathbf{Q}(0) = \\ = (-1)^{\beta}\mathbf{E},\ \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \neq \mathbf{0}, \tag{13}$$

где $\beta = 0$, если $\mathbf{Q}(\tau)$ есть собственно ортогональный тензор и $\beta = 1$ в противном случае. Аксиальный вектор $\boldsymbol{\omega}(\tau)$ будем условно называть вектором угловой скорости. Настоящий вектор угловой скорости вводится только для тензоров поворота, в то время как равенство (13) справедливо для любого ортогонального тензора. Считая в определении (10) ортогональный тензор $\mathbf{Q}(\tau)$ зависящим от τ, видим, что левая

[5] В предположении, что все собственные числа этого тензора различны.

[6] Доказательство аналогично доказательству, используемому при введении вектора угловой скорости в работе [9].

часть (10) зависит от τ, а правая часть — не зависит. Отметим, что определитель $(\det\mathbf{Q}(\tau))^{\alpha}$ для непрерывного семейства постоянен и не зависит от τ.

Продифференцируем обе части равенства (10) по параметру τ. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}'_i}\cdot\frac{d\mathbf{a}'_i}{d\tau}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}'_i}\right)^{T}\cdot\cdot\frac{d\mathbf{A}'_i}{d\tau}=0. \tag{14}$$

Производные от скалярной функции по векторному и тензорному аргументам определяются по правилу

$$dF=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i}\cdot d\mathbf{a}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i}\right)^{T}\cdot\cdot d\mathbf{A}_i. \tag{15}$$

Пример. *Пусть дана скалярная функция*

$$F(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{A})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} \quad\Rightarrow\quad dF=$$
$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{b})\cdot d\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{A})\cdot d\mathbf{b}+(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^{T}\cdot\cdot d\mathbf{A}.$$

Согласно (15) имеем

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{b},\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{b}}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{A},\ \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}=\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}.$$

Используя равенство (13), вычисляем производные

$$\frac{d\mathbf{a}'_i}{d\tau}=\boldsymbol{\omega}(\tau)\times\mathbf{a}'_i,\quad \frac{d\mathbf{A}'_i}{d\tau}=\boldsymbol{\omega}(\tau)\times\mathbf{A}'_i-\mathbf{A}'_i\times\boldsymbol{\omega}(\tau).$$

Учтем равенства

$$\mathbf{a}'_i(0)=(-1)^{\beta}(-1)^{\beta\delta_i}\mathbf{a}_i,\ \mathbf{A}'_i(0)=(-1)^{\beta}(-1)^{\beta\gamma_i}\mathbf{A}_i,$$

где $\delta_i=0$ для полярных векторов $\mathbf{a}_i$ и $\delta_i=1$ для аксиальных векторов $\mathbf{a}_i$, $\gamma_i=0$ для полярных тензоров $\mathbf{A}_i$ и $\gamma_i=1$ для аксиальных тензоров $\mathbf{A}_i$. Полагая $\tau=0$ в равенстве (14) и используя вышеуказанные соотношения, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i}\right)^{T}\cdot\cdot(\boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{A}_i-\mathbf{A}_i\times\boldsymbol{\omega}_0)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i}\cdot(\boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{a}_i)=0. \tag{16}$$

Получили линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Это уравнение должно выполняться для любого вектора $\boldsymbol{\omega}_0$, т.е. оно эквивалентно трем скалярным уравнениям. Поэтому любой скалярный инвариант системы тензоров (9) должен удовлетворять трем дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. Удобнее работать с уравнением (16), если обе его части разделить на модуль вектора $\boldsymbol{\omega}_0$. Тогда получим равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i}\right)^{T}\cdot\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{A}_i-\mathbf{A}_i\times\mathbf{m})+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{a}_i)=0, \tag{17}$$

которое должно выполняться для любого единичного вектора $\mathbf{m}$. Замечательно то, что в уравнение (17) не попали параметры β, α_i, γ_i. Это означает, что ни сами инварианты, ни базисный набор инвариантов не зависят от типов рассматриваемых тензоров. Таким образом, любой ортогональный инвариант должен удовлетворять скалярному уравнению (17), которое в дальнейшем будем называть *основным уравнением теории инвариантов*. Но это скалярное уравнение должно выполняться при произвольном выборе вектора $\mathbf{m}$. Можно исключить этот вектор из уравнения (17) и тогда получим векторное уравнение следующего вида

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i}\right)^{T}\cdot\mathbf{A}_i+\mathbf{A}_i\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}_i}\right)^{T}\right]_{\times}+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}_i}\times\mathbf{a}_i=\mathbf{0}, \tag{18}$$

где вектор $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{\times}\equiv\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ называется векторным инвариантом тензора второго ранга. Векторное уравнение (18) эквивалентно трем скалярным уравнениям, каждому из которых должен удовлетворять ортогональный инвариант. Однако последние три уравнения не всегда являются независимыми. Если среди аргументов (9) содержатся два вектора или имеется хотя бы один тензор второго ранга, отличный от единичного, то все три скалярных уравнения являются независимыми.

Уравнение (18) есть система трех линейных уравнений в частных производных первого порядка. В качестве независимых переменных в нем выступают координаты векторов и тензоров системы (9). Так что это уравнение определено в пространстве размерности N. Искомая функция $F(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots\mathbf{a}_m,\quad \mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\dots\mathbf{A}_n)$ зависит от N аргументов. Теория линейных уравнений в частных производных детально разработана [20], [21]. Можно сказать, что каждое из скалярных уравнений системы (18) уменьшает число независимых переменных на единицу. Число оставшихся независимых переменных это и есть число функционально независимых инвариантов, которое, таким образом, равно числу N скалярных функций (координат) в системе (9) минус число независимых уравнений в системе (18). Именно это и утверждается в формулировке теоремы. Мы не будем приводить полное формальное доказательство этой теоремы. По существу требуемое доказательство содержится в теории уравнений с частными производными первого порядка [20], [21].

Рассмотрим несколько конкретных примеров, на которых можно ясно понять содержание теоремы и путь ее доказательства. Но предварительно на простом примере, показывающем используемую ниже технологию, проиллюстрируем известную в теории обыкновенных дифференциальных уравнений теорему: *система дифференциальных уравнений n-го порядка имеет не более $n-1$-го функционально независимых интегралов.*

Рассмотрим пример одномерного линейного осциллятора, поведение которого описывается уравнением

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}=\omega y, \quad \dot{y}=-\omega x. \tag{19}$$

Хорошо известно, что система (19) имеет только один интеграл, а именно интеграл энергии. Покажем технологию получения этого интеграла в нужной для последующих выкладок форме. Систему (19) перепишем в эквивалентной форме

$$\dot{\mathbf{a}}=-\omega\mathbf{k}\times\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, \tag{20}$$

где векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ составляют стандартный ортонормированный базис. Решение векторного уравнения (20) имеет вид

$$\mathbf{a}(t)=\mathbf{Q}(-\omega t\mathbf{k})\cdot\mathbf{a}_0, \quad \dot{\mathbf{Q}}(-\omega t\mathbf{k})=-\omega\mathbf{k}\times\mathbf{Q}(-\omega t\mathbf{k}),$$

где вектор $\mathbf{a}_0$ определяется по начальным условиям, а тензор $\mathbf{Q}(-\omega t\mathbf{k})$ есть тензор поворота, определенный выражением (7). Для получения интеграла системы (20) необходимо исключить тензор поворота $\mathbf{Q}(-\omega t\mathbf{k})$ из приведенного решения. В данном случае это исключение очевидно

$$\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{a}(t)=\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{a}_0=\mathrm{const}. \tag{21}$$

Это и есть интеграл энергии. Любой другой интеграл векторного уравнения (20) является функцией интеграла энергии. Рассмотрим теперь несвязанную между собой систему двух одинаковых осцилляторов. Для второго осциллятора имеем уравнение

$$\dot{\mathbf{b}}=-\omega\mathbf{k}\times\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}(t)=\mathbf{Q}(-\omega t\mathbf{k})\cdot\mathbf{b}_0, \tag{22}$$

которое вполне аналогично уравнению (20). Векторное уравнение (22) также допускает только интеграл энергии $\mathbf{b}(t)\cdot\mathbf{b}(t)$. С другой стороны, если совокупность уравнений (20) и (22) рассматривать как систему, то последняя имеет четвертый порядок и, следовательно, должна иметь три независимых интеграла. Действительно, в соответствии с (4) и (22) имеем еще один независимый интеграл

$$\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t)=\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{b}_0=\mathrm{const}.$$

Таким образом, любой интеграл F системы (20) и (22) является функцией построенных трех интегралов: $F=F(\mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)\cdot\mathbf{b}(t), \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{b}(t))$. Конечно, приведенный пример вполне элементарен и может быть рассмотрен другими и более простыми способами. Однако он позволяет ясно понять используемый ниже подход.

5 Базисные инварианты конкретных систем тензоров

1. Базисный инвариант вектора.

В этом случае уравнение (18) принимает совсем простой вид

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}}\times\mathbf{a}=\mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad a_1\frac{\partial F}{\partial a_2}-a_2\frac{\partial F}{\partial a_1}=0,$$
$$a_2\frac{\partial F}{\partial a_3}-a_3\frac{\partial F}{\partial a_2}=0, \quad a_1\frac{\partial F}{\partial a_3}-a_3\frac{\partial F}{\partial a_1}=0, \tag{23}$$

где a_i суть координаты вектора $\mathbf{a}$ относительно какого-либо ортогонального базиса.

Последнее уравнение в системе (23) является следствием двух предыдущих. Поэтому в данном случае имеем имеем только два независимых уравнения, которым должен удовлетворять любой ортогональный инвариант вектора

$$a_1\frac{\partial F}{\partial a_2}-a_2\frac{\partial F}{\partial a_1}=0, \quad a_2\frac{\partial F}{\partial a_3}-a_3\frac{\partial F}{\partial a_2}=0. \tag{24}$$

Получили два уравнения в частных производных первого порядка для одной и той же функции. Поэтому нужно найти общее решение первого из этих уравнений, а затем потребовать, чтобы оно удовлетворяло второму уравнению. Нахождение общего решения уравнения в частных производных первого порядка хорошо известно [20]. Для этого необходимо составить характеристическую систему для первого из уравнений (24)

$$\frac{da_1}{ds}=-a_2, \ \frac{da_2}{ds}=a_1 \ \Rightarrow \ \frac{d}{ds}\left(a_1^2+a_2^2\right)=0, \tag{25}$$

где $a_i(s)$ есть параметрическое задание кривой в трехмерном пространстве координат a_i, s — параметр. Получившаяся линейная система второго порядка с постоянными коэффициентами имеет два независимых решения и только один интеграл, который можно получить исключением переменной s из упомянутых двух независимых решений. Практически, конечно, интегралы строятся не так. Важно лишь то, что имеется ровно один независимый интеграл. При этом любая функция этого интеграла сама является интегралом. В данном случае удобно выбрать интеграл, который указан в последнем равенстве (25). Таким образом, общее решение первого уравнения из системы (25) имеет вид

$$F(\mathbf{a}) = F(a_1,\, a_2,\, a_3) = f(a_1^2 + a_2^2,\, a_3).$$

Подставляя это решение во второе уравнение системы (24), приходим к следующему уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial a_3} - 2a_3\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \quad q \equiv a_1^2 + a_2^2.$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\frac{dq}{ds} = -2\,a_3, \quad \frac{da_3}{ds} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds}\left(q + a_3^2\right) = 0.$$

Опять получили систему второго порядка, которая имеет ровно один независимый интеграл, в качестве которого можно выбрать $q + a_3^2$. Таким образом, всякий ортогональный инвариант вектора может быть выражен как функция модуля этого вектора

$$F(\mathbf{a}) = f(q,\, a_3) = g(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}).$$

В этом случае сформулированная выше теорема доказана. С интуитивной точки зрения она, конечно, вполне очевидна и была доказана еще О. Коши.

Докажем полученный результат на основе уравнения (17). В данном случае уравнение (17) и соответствующая ему характеристическая система имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{a}) = 0, \quad \frac{d\mathbf{a}}{ds} = \mathbf{m}\times\mathbf{a}. \qquad (26)$$

Характеристическая система, т.е. последнее уравнение в (26), имеет третий порядок и, следовательно, имеет два независимых интеграла, которые очевидны и даются выражениями

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = const, \quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{a} = const.$$

Последний интеграл зависит от произвольного вектора $\mathbf{m}$ и потому нас не интересует. Как видим, второй подход значительно короче, и потому именно он будет использован ниже.

Теперь необходимо показать, что два вектора, имеющие одинаковые модули, могут быть совмещены поворотом. Пусть даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, модули и типы которых совпадают, т.е они либо оба полярны, либо оба аксиальны. Сравнивать модули полярных и аксиальных векторов бессмысленно. Известно, что наиболее общим линейным преобразованием вектора, не меняющим его модуля, является ортогональное преобразование. Это означает, что для векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ справедлива связь

$$\mathbf{a} = (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}, \quad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{T} = \mathbf{E}, \quad \det\mathbf{Q} = \pm 1,$$

где $\alpha = 0$ для полярных векторов и $\alpha = 1$ для аксиальных векторов. Это не совсем то, что нам нужно. В *Проблеме II* требуется, чтобы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ переводились бы друг в друга чистым поворотом, т.е. посредством собственно ортогонального тензора. Здесь следует обратить внимание, что тензор $\mathbf{Q}$ в последнем равенстве определен неоднозначно. В самом деле, это равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{a} = (\det\mathbf{Q})^{\alpha}\mathbf{Q}\cdot(\det\mathbf{S})^{\alpha}\mathbf{S}\cdot\mathbf{b}, \quad (\det\mathbf{S})^{\alpha}\mathbf{S}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b},$$

где тензор $\mathbf{S}$ принадлежит к группе симметрии вектора $\mathbf{b}$. Таким образом, имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q}_*\cdot\mathbf{b}, \quad \det\mathbf{Q}_* = [\det(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{S})]^{1+\alpha} = 1.$$

Выполнения последнего равенства всегда можно добиться подходящим выбором элемента симметрии.

2. Базисные инварианты системы трех полярных векторов.

Найдем минимально полную систему ортогональных инвариантов системы трех полярных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. В этом случае для любого ортогонального инварианта $F(\mathbf{a},\, \mathbf{b},\, \mathbf{c})$ уравнение (17) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{a}) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{b}}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{b}) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{c}}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{c}) = 0. \quad (27)$$

Уравнение (27) эквивалентно трем независимым скалярным уравнениям, которые нетрудно выписать. Функция $F(\mathbf{a},\, \mathbf{b},\, \mathbf{c})$ зависит от девяти скалярных аргументов (координат векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$). Каждое из уравнений системы (27) позволяет уменьшить число аргументов на единицу. Таким образом, любой ортогональный инвариант системы трех полярных векторов может быть выражен как функция шести аргументов, которые, в свою очередь, являются инвариантами. Ниже мы будем работать непосредственно с уравнением (27). Характеристическая система для уравнения (27) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\,s} = \mathbf{m}\times\mathbf{a}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{d\,s} = \mathbf{m}\times\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{c}}{d\,s} = \mathbf{m}\times\mathbf{c}. \qquad (28)$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Поэтому полное решение системы (28) строится без труда. Покажем это на примере первого уравнения системы (28). Решение ищем в виде

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{g}(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{a}}{d\,s} = \mathbf{m}\times\mathbf{a} + \mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\frac{d\mathbf{g}}{d\,s},$$

где $\mathbf{Q}(s\mathbf{m})$ есть тензор поворота вокруг $\mathbf{m}$ на угол s. Подставляя предыдущее соотношение в первое из уравнений системы (28), получаем, что вектор $\mathbf{g}$ постоянен. Аналогично строятся решения второго и третьего уравнений системы (28). Таким образом, общее решение системы (28) имеет вид

$$\mathbf{a}(s)=\mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{a}_0,\quad \mathbf{b}(s)=\mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{b}_0,\quad \mathbf{c}(s)=\mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{c}_0, \tag{29}$$

где векторы $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0$ суть произвольные постоянные векторы. Чтобы получить искомые интегралы системы (28), необходимо исключить переменную s из решений (29). Проще всего исключать весь ортогональный тензор $\mathbf{Q}(s\mathbf{m})$. В данном случае легко строятся десять интегралов, из которых три зависят от произвольного вектора $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}_0,\quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{b}_0,\quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{c}_0$$

и нас не интересуют. Здесь учтено, что вектор $\mathbf{m}$ является неподвижным вектором тензора $\mathbf{Q}(s\mathbf{m})$, т.е. удовлетворяет условию $\mathbf{m}\cdot\mathbf{Q}(s\mathbf{m})=\mathbf{m}$.

Еще семь инвариантов дают следующие интегралы

$$I_1=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a},\quad I_2=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b},\quad I_3=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c},\quad I_4=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\quad I_5=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c},\quad I_6=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},\quad I_7=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}). \tag{30}$$

Заметим, что по принятой в литературе терминологии интеграл I_7 не является инвариантом. Между инвариантами (30) существует связь

$$I_7^2\equiv\begin{vmatrix} I_1 & I_4 & I_5\\ I_4 & I_2 & I_6\\ I_5 & I_6 & I_3\end{vmatrix}.$$

Эта связь не позволяет однозначно найти инвариант I_7, но какой-либо из инвариантов I_1, I_2, I_3 находится однозначно и его, в принципе, можно исключить из системы (30). Если, например, $I_2I_3-I_6^2\neq 0$, то можно исключить инвариант I_1. Обратим внимание, что для системы трех векторов существует не более шести функционально независимых базисов. Шесть инвариантов $I_1, I_2, \ldots, I_6$ в (30) функционально независимы. Тем не менее, они не образуют базиса на множестве инвариантов. Эту особенность функциональных пространств, отличающую их от векторных пространств, следует иметь в виду.

На рассмотренном примере трех векторов ясно видно различие между постановками, указанными во введении под названиями *Проблема I* и *Проблема II*. В первом случае возможно псевдоскаляры не считать инвариантами, как это и принято в литературе. Тогда инварианты I_1 – I_6 образуют базис на множестве инвариантов, являющихся абсолютными скалярами. Но при этом возникают следующие ограничения. Во-первых, все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ должны быть либо все полярными, либо все аксиальными. В противном случае среди инвариантов I_1 – I_6 будут содержатся аксиальные скаляры. Тогда *Проблема I* теряет смысл. Во-вторых, даже если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ полярны, то фиксация инвариантов I_1 – I_6 не определяет эту тройку векторов с точностью до жесткого поворота в пространстве, т.е. *Проблема II* не разрешима. Приведем простой пример. Наряду с тройкой векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ рассмотрим тройку векторов

$$\mathbf{a},\quad \mathbf{b},\quad (\mathbf{E}-2\mathbf{k}\otimes\mathbf{k})\cdot\mathbf{c},\quad \mathbf{k}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}/|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|.$$

Эта тройка векторов также состоит из полярных векторов. Инварианты I_1 – I_6 для обеих троек векторов совпадают. Тем не менее, рассматриваемые тройки векторов невозможно совместить посредством жесткого поворота. Инварианты (30) для рассматриваемых троек векторов различаются.

Итак, утверждается, что совпадение инвариантов (30) для двух троек векторов гарантирует совпадение этих троек векторов с точностью до жесткого поворота. Хотя этот факт интуитивно совершенно очевиден, его строгое доказательство требует некоторых рассмотрений, которые в литературе отсутствуют. Пусть даны две тройки векторов

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\qquad \text{и}\qquad \mathbf{a}_*=a\mathbf{m},\quad \mathbf{b}_*=b\mathbf{n},\quad \mathbf{c}_*=c\mathbf{p}.$$

Считаем, что инварианты I_1-I_3 для этих троек совпадают, т.е модули рассматриваемых векторов соответственно равны. Фиксация модулей векторов определяет их с точностью до ортогонального преобразования

$$\mathbf{a}=a\mathbf{Q}_a\cdot\mathbf{m},\quad \mathbf{b}=b\mathbf{Q}_b\cdot\mathbf{n},\quad \mathbf{c}=c\mathbf{Q}_c\cdot\mathbf{p}, \tag{31}$$

где $\mathbf{Q}_a, \mathbf{Q}_b\,\mathbf{Q}_c$ суть произвольные ортогональные тензоры. Совпадение инвариантов I_4-I_6 дает уравнения для нахождения тензоров $\mathbf{Q}_a, \mathbf{Q}_b\,\mathbf{Q}_c$

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{Q}_a^T\cdot\mathbf{Q}_b\cdot\mathbf{n}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{n},\quad \mathbf{m}\cdot\mathbf{Q}_a^T\cdot\mathbf{Q}_c\cdot\mathbf{p}=\mathbf{m}\cdot\mathbf{p},\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{Q}_b^T\cdot\mathbf{Q}_c\cdot\mathbf{p}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}. \tag{32}$$

Отсюда немедленно следуют равенства

$$\mathbf{Q}_a^T\cdot\mathbf{Q}_b=\mathbf{S}_{(m,1)}\cdot\mathbf{S}_{(n,1)},\quad \mathbf{Q}_a^T\cdot\mathbf{Q}_c=\mathbf{S}_{(m,2)}\cdot\mathbf{S}_{(p,1)},\quad \mathbf{Q}_b^T\cdot\mathbf{Q}_c=\mathbf{S}_{(n,2)}\cdot\mathbf{S}_{(p,2)}, \tag{33}$$

где ортогональные тензоры $\mathbf{S}_{(m,k)}, \mathbf{S}_{(n,k)}, \mathbf{S}_{(p,k)}$ являются элементами симметрии векторов $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ соответственно. Из равенств (33) получаем, что эти элементы симметрии должны удовлетворять условию

$$\mathbf{S}_{(n,1)}^T\cdot\mathbf{S}_{(m,1)}^T\cdot\mathbf{S}_{(m,2)}\cdot\mathbf{S}_{(p,1)}=\mathbf{S}_{(n,2)}\cdot\mathbf{S}_{(p,2)}. \tag{34}$$

Теперь равенства (31) с учетом равенств (32) - (34) принимают вид

$$\mathbf{a}=a\mathbf{Q}_a\cdot\mathbf{m},\ \ \mathbf{b}=b\mathbf{Q}_a\cdot\mathbf{S}_{(m,1)}\cdot\mathbf{n},\ \ \mathbf{c}=c\mathbf{Q}_a\cdot\mathbf{S}_{(m,2)}\cdot\mathbf{p},$$

где тензоры $\mathbf{S}_{(m,1)}$, $\mathbf{S}_{(m,2)}$ являются двумя произвольными элементами симметрии вектора $\mathbf{m}$. Каковы бы ни были эти элементы симметрии и каков бы ни был ортогональный тензор $\mathbf{Q}_a$, инварианты I_1-I_6 для двух рассматриваемых троек векторов совпадают. Однако различие между ними не сводится к жесткому повороту. Потребуем теперь, чтобы инварианты I_7 для этих троек векторов совпадали. Это требование ведет к необходимости выполнения равенства

$$\det\mathbf{Q}_a \det\mathbf{S}_{m,1}(\mathbf{m}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{S}^{\mathsf{T}}_{(m,1)}\cdot\mathbf{S}_{(m,2)}\cdot\mathbf{p}=(\mathbf{m}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{p}.$$

Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\det\mathbf{Q}_a\det\mathbf{S}_{(m,1)}=1,\quad \mathbf{S}_{(m,1)}=\mathbf{S}_{(m,2)}.$$

Таким образом, пришли к равенству

$$\mathbf{a}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}_*,\quad \mathbf{b}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{b}_*,\quad \mathbf{c}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{c}_*,\quad \mathbf{P}=\mathbf{Q}_a\cdot\mathbf{S}_{(m,1)},$$

где $\mathbf{Q}_a$ есть произвольный ортогональный тензор, $\mathbf{S}_{(m,1)}$ есть такой элемент симметрии вектора $\mathbf{a}$, что тензор $\mathbf{P}$ является собственно ортогональным тензором. Что и требовалось доказать.

3. Базисные инварианты симметричного тензора второго ранга.

Необходимо доказать, что любой ортогональный инвариант симметричного тензора второго ранга может быть выражен как функция главных инвариантов, т.е. доказать, что последние составляют базис на множестве инвариантов. Разумеется, этот факт общеизвестен. Пусть $F(\mathbf{A})$ есть ортогональный инвариант. Тогда он должен удовлетворять уравнению (17) при $m=0$, $n=1$, которое принимает вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\mathbf{A}}\right)^{\mathsf{T}}\cdot\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{m})=0.$$

Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}(s)}{ds}=\mathbf{m}\times\mathbf{A}(s)-\mathbf{A}(s)\times\mathbf{m}. \tag{35}$$

Получили систему шестого порядка, которая имеет ровно пять независимых интегралов. Однако нас интересуют только те интегралы, которые не зависят от произвольно выбранного единичного вектора $\mathbf{m}$. Общее решение системы (35) находится без труда и имеет вид

$$\mathbf{A}(s)=\mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(s\mathbf{m}),\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}^k(s)=\mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{A}_0^k\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(s\mathbf{m}), \tag{36}$$

где $\mathbf{A}_0$ есть тензор произвольных постоянных.

Из решения (36) немедленно вытекают пять независимых интегралов системы (35). Они имеют вид

$$I_1=\operatorname{tr}\mathbf{A},\ I_2=\operatorname{tr}\mathbf{A}^2,\ I_3=\operatorname{tr}\mathbf{A}^3,\quad I_4=\mathbf{m}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{m},\ I_5=\mathbf{m}\cdot\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{m}.$$

Таким образом, любой интеграл системы (35) может быть представлен как функция этих пяти интегралов: $f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$. Нетрудно доказать, что функция $f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$ является ортогональным инвариантом $F(\mathbf{A})$ тензора $\mathbf{A}$, т.е. она является решением уравнения (18), тогда и только тогда, когда она не зависит от величин I_4, I_5. Иными словами, доказано, что любой ортогональный инвариант $F(\mathbf{A})$ тензора $\mathbf{A}$ является функцией вида $F(\mathbf{A})=f(\operatorname{tr}\mathbf{A}, \operatorname{tr}\mathbf{A}^2, \operatorname{tr}\mathbf{A}^3)$. Осталось показать, что два симметричных тензора с одинаковыми собственными числами отличаются только поворотом. По теореме о спектральном разложении симметричных тензоров второго ранга имеем

$$\mathbf{A}=\sum A_i\,\mathbf{d}_i\otimes\mathbf{d}_i,\quad \mathbf{A}^*=\sum A_k\,\mathbf{d}^*_k\otimes\mathbf{d}^*_k,$$

где тройки векторов $\mathbf{d}_i$ и $\mathbf{d}^*_k$ ортонормированы, но могут иметь разные ориентации. Поэтому имеем

$$\mathbf{d}^*_m=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{d}_m=\mathbf{d}_m\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}^*=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}},$$

где $\mathbf{Q}$ есть ортогональный тензор. Если $\det\mathbf{Q}=1$, то теорема справедлива. Если $\det\mathbf{Q}=-1$, то $\mathbf{Q}$ можно представить в виде произведения тензора поворота и тензора инверсии $\mathbf{Q}=\mathbf{P}\cdot(-\mathbf{E})$. Используя это разложение, получаем

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{P}\cdot(-\mathbf{E})\cdot\mathbf{A}\cdot(-\mathbf{E})^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}},$$

т.е. теорема также справедлива. Этот результат, конечно, хорошо известен, хотя обычно не доказывается, и широко используется в нелинейной теории упругости.

4. Базисные инварианты совокупности вектора и тензора второго ранга.

Рассмотрим систему, состоящую из вектора $\mathbf{a}$ и симметричного тензора второго ранга $\mathbf{A}$. Основное уравнение теории инвариантов (17) в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial\mathbf{a}}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{a})+\left(\frac{\partial F}{\partial\mathbf{A}}\right)^{\mathsf{T}}\cdot\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{m})=0. \tag{37}$$

По обычным правилам выписываем характеристическую систему для уравнения (37)

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds}=\mathbf{m}\times\mathbf{a},\quad \frac{d\mathbf{A}}{ds}=\mathbf{m}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{m}.$$

Получили систему девятого порядка, которая имеет не более восьми независимых интегралов, из которых только шесть не зависят от произвольного вектора $\mathbf{m}$. Для получения интегралов можно выписать общее решение характеристической системы

$$\mathbf{a}(s) = \mathbf{Q}(s\mathbf{m}) \cdot \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{A}(s) = \mathbf{Q}(s\mathbf{m}) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(s\mathbf{m}).$$

Исключая отсюда ортогональный тензор, получаем следующие интегралы

$$I_k = \operatorname{tr} \mathbf{A}^k,\ I_4 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}, \quad I_5 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a},$$
$$I_6 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{a}, \quad I_7 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}). \qquad (38)$$

Здесь выписаны семь интегралов, но между ними имеется одна связь. Чтобы убедиться в этом достаточно рассмотреть тройку векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{a}$ и выписать для нее инварианты типа (30). В результате получим следующее уравнение

$$I_7^2 = \begin{vmatrix} I_4 & I_5 & I_6 \\ I_5 & I_6 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{a} \\ I_6 & \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^4 \cdot \mathbf{a} \end{vmatrix} \qquad (39)$$

В определителе (39) инварианты $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^4 \cdot \mathbf{a}$ следует выразить через инварианты I_1 – I_6 с помощью тождества Кели–Гамильтона.

Обратим внимание, что учет инварианта I_7 является необходимым, и его нельзя отбросить. Чтобы убедиться в этом достаточно наряду с системой $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ рассмотреть систему

$$\mathbf{S}_{(A)} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}, \quad \mathbf{S}_{(A)} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_{(A)}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A},$$

где тензор $\mathbf{S}_{(A)}$ принадлежит группе симметрии тензора $\mathbf{A}$. Можно показать, что эти две системы в общем случае не сводятся одна к другой посредством поворота. Вместе с тем, различие в инвариантах для этих систем заключено только в инварианте I_7. Можно также показать, что если инвариант I_7 обращается в нуль, то две обсуждаемые системы переводятся друг в друга поворотом. Отметим, что в книге [4] на стр. 37 указываются только инварианты $I_1 - I_6$, задание которых не решает *Проблему II*. В той же книге, но в главе, написанной Э. Спенсером [5], указываются все семь инвариантов, но они рассматриваются как инварианты относительно собственно ортогональной группы. При этом наличие связи между инвариантами (38) не отмечается. Здесь уместно заметить, что если $\mathbf{a}$ является аксиальным вектором, то все инварианты $I_1 - I_7$ являются абсолютными скалярами, т.е. подчиняются обычному определению инварианта относительно полной ортогональной группы.

Оставшиеся два интеграла уже зависят от вектора $\mathbf{m}$ и имеют вид

$$I_8 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{m}, \quad I_9 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}.$$

Поскольку нас интересуют только интегралы, не зависящие от произвольного вектора $\mathbf{m}$, то любой ортогональный инвариант системы $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ может быть выражен через семь указанных инвариантов, на которые наложена одна функциональная связь.

Несколько сложнее показать, что фиксация инвариантов (38) фиксирует систему $\mathbf{a}$ и $\mathbf{A}$ с точностью до жесткого поворота в системе отсчета. Рассмотрим две системы $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{a}_*$, $\mathbf{A}_*$. Типы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_*$, а также тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_*$, должны совпадать. Если у этих систем инварианты $I_1 - I_4$ совпадают, то имеем соотношения

$$\mathbf{a} = (\det \mathbf{Q}_a)^{\alpha} \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{a}_* = a\,(\det \mathbf{Q}_a)^{\alpha} \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{m},$$
$$\mathbf{a}_* = a\mathbf{m}, \quad \mathbf{A} = (\det \mathbf{Q}_A)^{\beta} \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^{\mathsf{T}}, \qquad (40)$$

где a есть модуль вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{m}$ произвольный единичный вектор, $\alpha = 0$, если $\mathbf{a}$ полярен, и $\alpha = 1$, если $\mathbf{a}$ — аксиален; $\beta = 0$, если $\mathbf{A}$ полярен, и $\beta = 1$, если $\mathbf{A}$ — аксиален; собственные числа тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}_*$ совпадают; $\mathbf{Q}_a$ и $\mathbf{Q}_A$ суть произвольные ортогональные тензоры, Тензоры $\mathbf{Q}_a$ и $\mathbf{Q}_A$ должны быть такими, чтобы инварианты $I_5 - I_7$ для двух рассматриваемых систем совпадали. Сначала рассмотрим инвариант I_5

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = a^2\,(\det \mathbf{Q}_A)^{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{m},$$
$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_a^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{Q}_A. \qquad (41)$$

Аналогичное представление имеем для инварианта I_6. Фиксация этих инвариантов ведет к условиям

$$(\det \mathbf{Q}_A)^{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{m},$$
$$(\det \mathbf{Q}_A)^{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A}_*^2 \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_*^2 \cdot \mathbf{m}. \qquad (42)$$

Необходимо найти общий вид ортогонального тензора $\mathbf{Q}$, удовлетворяющего условиям (42). Ведем обозначения

$$\varepsilon = (\det \mathbf{Q}_A)^{\beta}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{Q} \equiv \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1,$$
$$h = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{m}, \quad H = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A}_*^2 \cdot \mathbf{m}. \qquad (43)$$

В принятых обозначениях условия (42) принимают вид

$$\mathbf{n} \cdot (\varepsilon \mathbf{A}_* - h\mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \left(\varepsilon \mathbf{A}_*^2 - h\mathbf{E}\right) \cdot \mathbf{n} = 0. \ (44)$$

Дальнейший ход рассуждений зависит от величины ε. Анализ проведем для случая полярного тензора $\mathbf{A}_*$, т.е. для случая $\varepsilon = 1$. Примем, что собственные числа тензора $\mathbf{A}_*$ различны, а единичный вектор $\mathbf{n}$ представим в базисе главных осей тензора $\mathbf{A}_*$

$$\mathbf{n} = n_k \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{m} = m_k \mathbf{d}_k.$$

Тогда уравнения (44) после несложных преобразований принимают вид

$$(A_3 - A_2) n_3^2 = (h - A_1) + (A_1 - A_2)(1 - n_1^2),$$

$$(A_3^2 - A_2^2)n_3^2 = (H - A_1^2) + (A_1^2 - A_2^2)(1 - n_1^2).$$

Решая эту систему, получаем

$$n_1 = \pm m_1, \quad n_2 = \pm m_2, \quad n_3 = \pm m_3.$$

Отсюда видим, что вектор $\mathbf{n}$ получается из вектора $\mathbf{m}$ преобразованиями симметрии тензора $\mathbf{A}_*$. Иными словами, для тензора $\mathbf{Q}$ получаем представление

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}_{(m)} \cdot \mathbf{S}_{(A)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}_A = \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(m)} \cdot \mathbf{S}_{(A)},$$

где $\mathbf{S}_{(m)}$ есть элемент симметрии вектора $\mathbf{m}$, $\mathbf{S}_{(A)}$ - элемент симметрии тензора $\mathbf{A}_*$. Итак, если инварианты $I_1 - I_6$ зафиксированы, то для систем $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{a}_*$, $\mathbf{A}_*$ вместо (40) имеем

$$\mathbf{a} = \left[\det(\mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(m)})\right]^{\alpha} \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{a}_*,$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(m)} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{S}_{(m)}^T \cdot \mathbf{Q}_a^T. \tag{45}$$

Наконец, требование сохранения инварианта I_7 ведет к условию

$$\left[\det(\mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(m)})\right]^{1+\alpha} = 1.$$

Если вектор $\mathbf{a}$ полярен, т.е. $\alpha = 0$, то тензор $\mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{S}_{(m)}$ обязан быть тензором поворота. Если вектор $\mathbf{a}$ аксиален, то инвариант I_7 не дает ничего нового и достаточно задать только шесть первых инвариантов из списка (38). При этом система $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ задается с точностью до жесткого поворота. В самом деле, если $\mathbf{Q}_a$ есть тензор поворота, то достаточно принять $\mathbf{S}_{(m)} = \mathbf{E}$. Если определитель тензора $\mathbf{Q}_a$ отрицателен, то достаточно принять $\mathbf{S}_{(m)} = -\mathbf{E}$. Обратим внимание, что тензор инверсии является элементом симметрии как произвольного симметричного тензора второго ранга, так и элементом симметрии произвольного аксиального вектора.

6 Базисные инварианты системы двух симметричных тензоров.

Рассмотрим систему двух симметричных тензоров второго ранга $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Этот случай часто встречается в приложениях. В литературе считается, что базисная система инвариантов дается следующими десятью инвариантами

$$I_k^A = \operatorname{tr} \mathbf{A}^k, \quad I_k^B = \operatorname{tr} \mathbf{B}^k, \quad x = \operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B},$$

$$y = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}, \quad z = \operatorname{tr} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2, \quad u = \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}^2. \tag{46}$$

Заметим, что в литературе оба тензора считаются полярными или, что то же самое, евклидовыми. Здесь это предположение не принимается и тензоры могут быть как полярными, так и аксиальными. Фактически для приложений интересен, главным образом, случай, когда один тензор полярен, а другой — аксиален. Но именно для этого случая приводимые в литературе результаты, строго говоря, неприменимы. Впрочем, случай двух симметричных тензоров встречается вообще редко. Наиболее интересен случай двух тензоров общего вида, один из которых полярен, а другой аксиален. Ниже рассматриваются симметричные тензоры, чтобы было проще сравнивать с известными результатами. Согласно рассматриваемой теореме система двух симметричных тензоров допускает не более девяти независимых инвариантов. Следовательно, указанные в списке (46) десять инвариантов не могут быть независимыми. Иными словами, между инвариантами (46) должна существовать одна функциональная связь, которая не очевидна и в литературе не приводится. Использование переполненной системы инвариантов возможно, но может приводить к недоразумениям. Поэтому необходимо либо сократить список (46) на один инвариант, либо указать связь, существующую между ними. Можно непосредственно доказать, что инварианты (46) могут быть выражены через девять других инвариантов. А именно, инварианты x, y, z, u могут быть выражены через первые шесть инвариантов из списка (46) и три инвариантных параметра, которые будут указаны ниже. Точнее говоря они могут быть выражены через четыре параметра, между которыми существует очевидная связь. Покажем этот факт. При этом ограничимся случаем, когда собственные числа у каждого из тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ различны. Пусть $\mathbf{a}_k$ суть собственные векторы тензора $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{b}_m$ суть собственные векторы тензора $\mathbf{B}$. Считаем, что латинские индексы принимают значения $1, 2, 3$, но правило суммирования по повторяющемуся индексу ниже не принимается. При необходимости суммирование будет явно указываться. В отличие от собственных векторов, собственные диады симметричного тензора находятся однозначно. Например, для собственных диад тензора $\mathbf{A}$ имеем

$$\mathbf{a}_k \otimes \mathbf{a}_k = \alpha_k \mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{A}), \;\; \alpha_k^{-1} = (A_k - A_i)(A_k - A_j), \tag{47}$$

$$\mathbf{\Gamma}_k(\mathbf{A}) \equiv \mathbf{A}^2 - (I_1^A - A_k)\mathbf{A} + A_k^{-1} I_3^A \mathbf{E}, \quad i \neq j \neq k \neq i,$$

A_k суть собственные числа тензора $\mathbf{A}$. Аналогичные представления имеем для собственных диад тензора $\mathbf{B}$

$$\mathbf{b}_m \otimes \mathbf{b}_m = \beta_m \mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{B}), \quad \beta_m^{-1} = (B_m - B_n)(B_m - B_p),$$

$$\mathbf{\Gamma}_m(\mathbf{B}) \equiv \mathbf{B}^2 - (I_1^B - B_m)\mathbf{B} + B_m^{-1} I_3^B \mathbf{E}, \; m \neq n \neq p \neq m,$$

B_m суть собственные числа тензора $\mathbf{B}$.

По равенствам (47) и (6) получаем систему девяти равенств

$$(\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_m)^2=\alpha_k\beta_m\left[u+(A_k-I_1^A)(B_m-I_1^B)x-\right.$$
$$-(I_1^B-B_m)y-(I_1^A-A_k)z+\left(B_mI_1^B-2J_B\right)A_k^{-1}I_3^A+$$
$$\left.+\left(A_kI_1^A-2J_A\right)B_m^{-1}I_3^B+3\left(A_kB_m\right)^{-1}I_3^AI_3^B\right],\quad(48)$$

$$2J_A=(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2-\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2),\quad 2J_B=(\mathrm{tr}\mathbf{B})^2-\mathrm{tr}(\mathbf{B}^2).$$

Четыре инварианта x, y, z и u входят в систему (48) линейно и их можно рассматривать как неизвестные величины. Тогда получаем систему девяти уравнений относительно четырех неизвестных. Можно убедиться, что ранг матрицы этой системы равен четырем. Следовательно, четыре указанных инварианта можно выразить через собственные числа тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и девять чисел $\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_m$, на которые наложено шесть связей

$$\sum_{m=1}^{3}(\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_m)^2=1,\ \sum_{k=1}^{3}(\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_m)^2=1.$$

Наличие этих связей позволяет выразить девять чисел $\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_m$ через три параметра. С этой целью введем в рассмотрение тензор поворота [9], выраженный через вектор поворота

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})=\cos\theta\,\mathbf{E}+\frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}+\frac{\sin\theta}{\theta}\,\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E},\quad(49)$$

где θ есть модуль вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$. Введем в рассмотрение ортонормированный базис $\mathbf{i}_k$, фиксированный в системе отсчета. Тогда имеем

$$\mathbf{a}_k=\mathbf{Q}_A\cdot\mathbf{i}_k,\quad \mathbf{b}_k=\mathbf{Q}_B\cdot\mathbf{i}_k,\quad \mathbf{b}_k=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}_k,\quad(50)$$

где $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_B\cdot\mathbf{Q}_A^T$. Используя (49) и (50), получаем

$$\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{b}_m=\cos\theta\,\delta_{km}+$$
$$+\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\theta_k\theta_m+\frac{\sin\theta}{\theta}\sum_{s=1}^{3}e_{mks}\theta_s,\quad(51)$$

где e_{mks} есть символ перестановки. Используя (51), получаем

$$\theta^2\mathbf{a}_p\cdot\mathbf{b}_p=\theta_p^2+\cos\theta\,(\theta^2-\theta_p^2),\quad(52)$$

$$(\mathbf{a}_p\cdot\mathbf{b}_m)^2-(\mathbf{a}_m\cdot\mathbf{b}_p)^2=\frac{4\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}\theta_1\theta_2\theta_3,\quad(53)$$

где числа p, m, s являются четной перестановкой чисел 1, 2, 3, т.е. выполняются равенства $e_{pms}=1$, $\theta_p\theta_m\theta_s=\theta_1\theta_2\theta_3$.

Покажем, что инварианты x, y, z, u действительно выражаются через компоненты вектора поворота и собственные числа тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Чтобы показать этот факт в правой части системы (48) можно отбросить слагаемые, зависящие только от собственных чисел и переписать систему (48) в виде трех независимых систем

$$u_1-(B_2+B_3)y_1=a_{11},\quad u_1-(B_1+B_3)y_1=a_{12},$$
$$u_1-(B_1+B_2)y_1=a_{13};\quad(54)$$

$$u_2-(B_2+B_3)y_2=a_{21},\quad u_2-(B_1+B_3)y_2=a_{22},$$
$$u_2-(B_1+B_2)y_2=a_{23};\quad(55)$$

$$u_3-(B_2+B_3)y_3=a_{31},\quad u_3-(B_1+B_3)y_3=a_{32},$$
$$u_3-(B_1+B_2)y_3=a_{33}.\quad(56)$$

В системе (54)–(56) введены новые переменные

$$u_m=u-(A_n+A_p)z,\quad y_m=y-(A_n+A_p)x,\quad(57)$$

причем $m\neq n\neq p\neq m$. Кроме того, приняты обозначения

$$a_{ik}=\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_k/\alpha_i\beta_k.$$

Решения систем (54)–(56) даются формулами

$$u_m=a_{mm}+\frac{B_n+B_p}{B_n-B_p}(a_{mn}-a_{mp}),$$

$$y_m=\frac{a_{mn}-a_{mp}}{B_n-B_p},\quad(58)$$

где числа m, n, p образуют четную перестановку чисел 1, 2, 3. Решая систему (57), выражаем искомые инварианты через переменные y_m и u_m

$$x=\frac{y_1-y_2}{A_1-A_2},\quad y=y_3+\frac{A_1+A_2}{A_1-A_2}(y_1-y_2),$$

$$z=\frac{u_1-u_2}{A_1-A_2},\quad u=u_3+\frac{A_1+A_2}{A_1-A_2}(u_1-u_2).$$

Используя равенства (58), окончательно получаем

$$x=(A_1-A_3)\left[(B_2-B_1)(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_2)^2+\right.$$
$$\left.+(B_3-B_1)(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_3)^2\right].$$

Аналогичные формулы получаются и для остальных инвариантов. Следует заметить, что фактически инварианты x, y, z, u однозначно выражаются через четыре числа θ_1^2, θ_2^2, θ_3^2, $\theta_1\theta_2\theta_3$, между которыми существует очевидная связь $\theta_1^2\theta_2^2\theta_3^2=(\theta_1\theta_2\theta_3)^2$.

Указанная выше процедура, хотя и доказывает теорему, но является слишком громоздкой и мало наглядной. Поэтому приведем другую схему рассуждений.

Для построения базисной системы инвариантов будем следовать вышеописанной процедуре, опирающейся на основное уравнение теории инвариантов

(17), которое в данном случае можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}\right)^{T} \cdot\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{m})+ \\ +\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}\right)^{T} \cdot\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{m})=0, \quad (59)$$

которое должно выполняться для любого вектора $\mathbf{m}$. Характеристическая система для уравнения (59) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds}=\mathbf{m}\times\mathbf{A}-\mathbf{A}\times\mathbf{m}, \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds}=\mathbf{m}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{m}. \quad (60)$$

Получили систему двенадцатого порядка, которая имеет не более одиннадцати независимых интегралов, среди которых нас интересуют интегралы, не зависящие от произвольно выбираемого вектора $\mathbf{m}$. Легко видеть, что должно быть ровно девять таких интегралов: две тройки собственных чисел тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и три угла, фиксирующих положение тройки главных осей одного тензора относительно главных осей другого тензора. К сожалению, работать с упомянутыми углами непосредственно довольно затруднительно. Хотелось бы найти алгебраические инварианты, которые определяют эти углы. Будем рассуждать следующим образом. Если тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соосны, т.е. их главные оси совпадают, то достаточно задать только две тройки главных инвариантов этих тензоров. Нетрудно доказать, что скалярное произведение двух симметричных тензоров второго ранга перестановочно тогда и только тогда, когда эти тензоры соосны; наоборот, если скалярное произведение двух тензоров перестановочно, то эти тензоры соосны.

Введем в рассмотрение антисимметричный тензор

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=-\mathbf{r}\times\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{\times} \quad (61)$$

который иногда называют коммутатором тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Вектор $\mathbf{r}$ характеризует несоосность тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и будет называться вектором несоосности. Из (61) вытекает тождество

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}, \quad (62)$$

которое будет широко использоваться ниже без ссылки на него. Легко убедиться, что из уравнений (60) и (61) выводится уравнение для вектора несоосности

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{m}\times\mathbf{r}. \quad (63)$$

Общее решение уравнений (60) и (63) имеет вид

$$\mathbf{r}(s)=\mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{A}(s)=\mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{Q}^{T}(s\mathbf{m}), \\ \mathbf{B}(s)=\mathbf{Q}(s\mathbf{m})\cdot\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{Q}^{T}(s\mathbf{m}).$$

В принципе, нетрудно выписать девять независимых интегралов системы (60) и (63). Например, таковыми являются первые девять инвариантов из списка (46). Добавление к ним еще одного интеграла заведомо приводит к системе интегралов, между которыми существует функциональная связь. Однако характер этой связи не всегда позволяет однозначно выразить добавленный интеграл через уже введенные. Собственно, именно требование однозначного выражения всех инвариантов через базисную систему инвариантов и вносит главную трудность в решение проблемы инвариантов. С примером такого рода мы уже встречались, когда рассматривали систему трех векторов. Эту проблему в общем случае довольно трудно формализовать. Фактически она решена только при рассмотрении полиномиальных инвариантов. Однако использование исключительно полиномиальных инвариантов не имеет под собой никаких физических оснований. Существенным недостатком использования полиномиальных инвариантов является то, что часто приходится использовать переполненную систему инвариантов. Кроме того, инварианты, эквивалентные с чисто алгебраической точки зрения, отнюдь не эквивалентны с физической точки зрения. Например, система инвариантов, указанная в списке (46), заведомо не слишком удачна. Действительно, эти инварианты нельзя задавать независимо друг от друга. Пусть, например, $\mathrm{tr}\mathbf{A}^2=0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}=\mathbf{0}$. Поэтому предпочтительнее пользоваться так называемыми главными инвариантами симметричного тензора второго ранга. Именно их мы и возьмем в качестве первых шести инвариантов системы двух симметричных тензоров второго ранга

$$I_1^A=\mathrm{tr}\,\mathbf{A}, \quad I_2^A=\frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2-\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2)\right], \quad I_3^A=\det\mathbf{A},$$

$$I_1^B=\mathrm{tr}\,\mathbf{B}, \quad I_2^B=\frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\mathbf{B})^2-\mathrm{tr}\,\mathbf{B}^2)\right], \quad I_3^B=\det\mathbf{B}. \quad (64)$$

Система инвариантов (64) однозначно определяет собственные числа A_k и B_k тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Как известно, главные инварианты можно задавать произвольно и независимо друг от друга. Пусть даны две системы тензоров ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$) и ($\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$). Если инварианты (64) у этих двух систем совпадают, то и сами тензоры совпадают с точностью до ортогонального преобразования

$$\mathbf{A}=\mathbf{Q}_A\cdot\mathbf{A}_*\cdot\mathbf{Q}_A^{T}, \quad \mathbf{B}=\mathbf{Q}_B\cdot\mathbf{B}_*\cdot\mathbf{Q}_B^{T}.$$

Обратимся к рассмотрению вектора несоосности (61). Нетрудно установить формулу для модуля вектора несоосности

$$r^2=\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}^2)-\mathrm{tr}\left[(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2\right] \quad (65)$$

Покажем, что если рассматривается система двух соосных тензоров, то она фиксируется с точностью до жесткого поворота заданием инвариантов (64) и условия $r = 0$. Действительно, в этом случае имеем

$$\mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T \cdot \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}_B^T - \\ - \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}_B^T \cdot \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T = \mathbf{0}.$$

Отсюда немедленно вытекают два равенства

$$\mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_* = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_* - \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0},$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_A^T \cdot \mathbf{Q}_B. \qquad (66)$$

Из первого из этих уравнений видим, что тензор $\mathbf{Q}$ принадлежит к группе симметрии тензора $\mathbf{B}_*$, а из второго равенства видим, что этот же тензор принадлежит и к группе симметрии тензора $\mathbf{A}_*$. Поэтому имеем равенства

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{Q}_B \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{Q}_B = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{S},$$

где ортогональный тензор $\mathbf{S}$ принадлежит к группам симметрии обоих тензоров $\mathbf{A}_*$ и $\mathbf{B}_*$. В обоих случаях имеем

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T, \quad \mathbf{B} = \mathbf{Q}_A \cdot \mathbf{B}_* \cdot \mathbf{Q}_A^T,$$

что и требовалось показать. Таким образом, инвариант (65) имеет четкий физический смысл и его нужно добавить к списку инвариантов (64). Из соображений здравого смысла все инварианты, которые необходимо добавить к списку (64), должны обращаться в нуль при обращении вектора несоосности (61) в нулевой вектор. Последнее имеет место при обращении инварианта (65) в нуль. Осталось найти еще два инварианта, которые фиксируют положение вектора несоосности относительно тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Для этого достаточно указать еще один независимый вектор, характеризующий несоосность тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. В качестве кандидатов на эту роль можно рассмотреть четыре вектора. Два из них определяются формулами

$$\left(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}\right)_\times = \mathrm{tr}\mathbf{A}\,\mathbf{r} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}, \quad \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2\right)_\times = \mathrm{tr}\mathbf{B}\,\mathbf{r} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}.$$

Можно убедиться, что инварианты, образованные с помощью этих двух векторов не решают проблемы. Больший интерес представляет вектор

$$\boldsymbol{\rho} = \left[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2\right]_\times = \mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{r} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}. \qquad (67)$$

Наконец, можно рассмотреть вектор

$$\left[\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}^2\right]_\times = (\mathrm{tr}\mathbf{A}\mathrm{tr}\mathbf{B})\mathbf{r} - [\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}\mathrm{tr}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathrm{tr}\mathbf{A}] \cdot \mathbf{r}.$$

Видим, что этот вектор является линейной комбинацией трех предыдущих и может не рассматриваться. Если оба тензора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не вырождены, то можно выбрать любой из трех векторов $\left(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}\right)_\times$, $\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2\right)_\times$ и $\boldsymbol{\rho}$. Но если хотя бы один из тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ вырожден, то ситуация меняется. Более того, эти векторы не равнозначны, если тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют одинаковый собственный вектор $\mathbf{m}$. В этом случае из (61) следует, что вектор несоосности сонаправлен с вектором $\mathbf{m}$, т.е. $\mathbf{r} = r\,\mathbf{m}$. Поэтому имеем

$$\left(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}\right)_\times = (\mathrm{tr}\mathbf{A} - A_m)\, r\,\mathbf{m},$$

$$\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2\right)_\times = (\mathrm{tr}\mathbf{B} - B_m)\, r\,\mathbf{m}.$$

Эти векторы не дают нам новой информации и не добавляют ничего к инвариантам (64) и (65). Вектор (67) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\boldsymbol{\rho} = \left[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2\right]_\times = [\mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - A_m B_m]\, r\,\mathbf{m},$$

т.е. этот вектор уже содержит новую информацию. В частности, он фиксирует новый инвариант $\mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Поэтому в качестве двух оставшихся инвариантов можно выбрать следующие два

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\rho} = \mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\, r^2 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r},$$

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} = [\mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]^2\, r^2 - 2\mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} + \\ + \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}. \qquad (68)$$

Обратим внимание на существование тождества, вытекающего из (62),

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}. \qquad (69)$$

На первый взгляд кажется, что вместо инвариантов (68) можно взять инварианты

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}. \qquad (70)$$

Нетрудно убедиться, что инварианты (70) не решают проблемы. Действительно, пусть один из тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ является диадой. Например, пусть $\mathbf{B} = B\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$. Тогда имеем

$$\mathbf{r} = B\,\mathbf{m} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} = 0.$$

В этом случае инварианты (70) нам ничего не дают и остаются только инварианты (64) и (65), которых недостаточно, чтобы зафиксировать систему тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с точностью до жесткого поворота. Убедиться в этом можно, если рассмотреть случай двух диад. Инварианты (68) сводятся в рассматриваемом случае к заданию двух инвариантов

$$r^2 \quad \text{и} \quad \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}).$$

Нетрудно убедиться, что задание этих инвариантов в совокупности с инвариантами (64) полностью решает проблему, когда один из тензоров системы является диадой. Кажется очевидным, что девять инвариантов (64), (65) и (68) решают проблему во всех случаях, хотя полное доказательство этого факта требует довольно утомительных вычислений. Отметим только следующее обстоятельство. Если вектор несоосности найден, то он тождественно удовлетворяет тождеству (69). Однако если заданы только инварианты (65) и (68), то тождество (69) нужно выдвигать в качестве дополнительного условия. Это обстоятельство станет ясным, если заметить, что в инварианты (68), помимо вектора $\mathbf{r}$ входит инвариант $\mathrm{tr}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, который отдельно не задается. Подчеркнем, однако, что использование тождества (69) отнюдь не эквивалентно заданию дополнительного инварианта, поскольку это условие действует внутри каждой из систем тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$ в отдельности.

Теперь необходимо показать, что задание девяти инвариантов (64), (65) и (68) фиксирует систему тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с точностью до жесткого поворота. Доказательство этого факта приведем только для случая, когда одна система тензоров может быть получена из другой путем непрерывного перехода. Иными словами, проблема идентификации систем тензоров не рассматривается. Пусть даны две системы тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$. По ним вычисляются векторы $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{r}_*$, $\boldsymbol{\rho}_*$. Задание инвариантов (65) и (68) определяет векторы $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho}$ с точностью до жесткого поворота

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{P}\cdot\mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\rho}_* = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\rho}_*, \quad \det\mathbf{P} = 1.$$

Задание инвариантов (64) определяет тензоры $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ с точностью до ортогонального преобразования

$$\mathbf{A}_* = \mathbf{Q}_A\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_A^T, \quad \mathbf{B}_* = \mathbf{Q}_B\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}_B^T.$$

Сделаем замену переменных

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{Q}_B = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}_2.$$

По определению вектора несоосности (61) имеем

$$\mathbf{A}_*\cdot\mathbf{B}_* - \mathbf{B}_*\cdot\mathbf{A}_* = -\mathbf{r}_*\times\mathbf{E}.$$

Подставляя сюда вышеприведенные представления, после простых преобразований получаем уравнение

$$\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_1^T\cdot\mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}_2^T - \mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}_2^T\cdot\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_1^T = -\mathbf{r}\times\mathbf{E}.$$

Обратим внимание, что это уравнение не содержит тензор поворота $\mathbf{P}$ и утверждает симметрию некоего тензора $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T, \quad \mathbf{D} \equiv \mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_1^T\cdot\mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}_2^T - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}.$$

Это уравнение эквивалентно одному векторному уравнению

$$\mathbf{D}_\times = \left(\mathbf{Q}_1\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{Q}_1^T\cdot\mathbf{Q}_2\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}_2^T\right)_\times - \mathbf{r} = \mathbf{0}. \qquad (71)$$

Используя определение (67), получаем уравнение

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{r} = (\mathrm{tr}\,\mathbf{D})\,\mathbf{r}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{D} = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}_*\cdot\mathbf{B}_*) - \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \quad (72)$$

Уравнения (71) и (72) служат для определения тензоров $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$. Рассмотрим непрерывное преобразование от системы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ к системе $\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$, определяемое тензорами $\mathbf{P}(s)$, $\mathbf{Q}_1(s)$ и $\mathbf{Q}_2(s)$, причем значение параметра $s = 0$ отвечает системе $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, а значение параметра $s = 1$ соответствует системе $\mathbf{A}_*$, $\mathbf{B}_*$. Нетрудно убедиться, что тензоры

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{S}_r\cdot\mathbf{S}_{AB}\cdot\mathbf{S}_A, \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{S}_r\cdot\mathbf{S}_{AB}\cdot\mathbf{S}_B, \qquad (73)$$

где ортогональные тензоры $\mathbf{S}_A$, $\mathbf{S}_B$, $\mathbf{S}_{AB}$ и $\mathbf{S}_r$ суть произвольные элементы симметрии тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и вектора $\mathbf{r}$ соответственно, являются решением уравнений (71) и (72). Действительно, при преобразовании (73) для тензора $\mathbf{D}$ имеем представление

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}_r\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_r^T - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{D} = 0.$$

Вычисляя векторный инвариант тензора $\mathbf{D}$, получаем

$$\mathbf{D}_\times = \left(\mathbf{S}_r\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_r^T\right)_\times - \mathbf{r} = (\det\mathbf{S}_r)\mathbf{S}_r\cdot\mathbf{r} - \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Иными словами, уравнение (71) выполнено. Осталось выяснить при каких условиях выполнено уравнение (72). Имеем цепочку равенств

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{S}_r\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_r^T\cdot\mathbf{r} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{r} =$$
$$= \mathbf{S}_r\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}_r^T\cdot\mathbf{r} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{r} = [(\det\mathbf{S}_r)\mathbf{S}_r - \mathbf{E}]\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{r}.$$

Из этого равенства видим, что уравнение (72) выполнено тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{S}_r = \mathbf{E}$, либо вектор $\mathbf{r}$ является собственным вектором тензора $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = \lambda\,\mathbf{r}.$$

Последняя альтернатива весьма редка, но она встречается. Например, если тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ являются диадами. В типичном случае реализуется первая альтернатива $\mathbf{S}_r = \mathbf{E}$.

Можно доказать, что представления (73) являются наиболее общим решением уравнений (71) и (72). К сожалению, доказательство требует довольно утомительного анализа частных случаев и потому здесь не приводится. Укажем только идею доказательства. Рассматриваем тензоры $\mathbf{P}(s)$, $\mathbf{Q}_1(s)$ и $\mathbf{Q}_2(s)$

как непрерывные функции параметра s, дифференцируем уравнения (71) и (72) по этому параметру и исключаем производные от тензоров поворота с помощью уравнений Пуассона

$$\frac{d\mathbf{Q}_1}{ds} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1, \quad \frac{d\mathbf{Q}_2}{ds} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2.$$

Не уменьшая общности можно считать, что "угловые" скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ постоянны. Поэтому получившиеся уравнения можно записать при $s = 0$ и использовать начальные условия для тензоров поворотов. В результате вместо уравнений (71) и (72) получим следующие линейные уравнения для скоростей

$$[(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}_1) \cdot \mathbf{B} + \\ + \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}_2)]_\times = \mathbf{0}. \quad (74)$$

$$2\,[\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2)]\,\mathbf{r} = [(\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}_1) \cdot \mathbf{B} + \\ + \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}_2)] \cdot \mathbf{r}. \quad (75)$$

Получили систему двух линейных однородных уравнений относительно "угловых" скоростей $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Она всегда имеет тривиальные решения, но возможны и нетривиальные решения, связанные с симметриями тензоров **A** и **B**. Анализ сводится к нахождению общего решения уравнений (74) и (75) и последующему нахождению тензоров поворота по найденным угловым скоростям.

7 Базисные инварианты системы трех тензоров.

В качестве последнего примера рассмотрим систему трех симметричных тензоров второго ранга **A**, **B** и **C**. С прикладной точки зрения этот случай не очень интересен, но он наиболее активно обсуждался в литературе [5], [3], [17], [11], [12], [13], [14], [18]. Окончательное решение проблемы определения функционального базиса для инвариантов системы трех тензоров, видимо, так и не было получено в литературе. В работах [13], [14] приводится система базисных инвариантов, состоящая из 21 инварианта. Однако в работе [18] приведен пример, показывающий неполноту этой системы базисных инвариантов. Поэтому в работах [11], [12] приводится значительно большее число инвариантов, которые предлагаются в качестве базиса. Ниже излагается другое решение проблемы базисных инвариантов.

Основное уравнение теории инвариантов (17) в данном случае имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}\right)^T \cdot\cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{A}) + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{B}}\right)^T \cdot\cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{B}) + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{C}}\right)^T \cdot\cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{C}) = 0, \quad (76)$$

где **d** есть произвольный вектор.

Характеристическая система для (76) описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \mathbf{A} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{A}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{B} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{B}, \\ \frac{d\mathbf{C}}{ds} = \mathbf{C} \times \mathbf{d} - \mathbf{d} \times \mathbf{C}. \quad (77)$$

Система (77) имеет восемнадцатый порядок и ровно семнадцать независимых интегралов. С физической точки зрения ясно, что только пятнадцать из этих интегралов не зависят от произвольного вектора **d**. Формально строгое доказательство этого утверждения требует утомительных вычислений. Тем не менее, трудно усомниться в его правильности, поскольку оно очевидно. Поэтому ограничимся только тем, что выпишем систему инвариантов, которая, по нашему мнению, наиболее удобна. С этой целью введем в рассмотрение векторы

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_\times, \quad \mathbf{r}_2 = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})_\times, \quad \mathbf{r}_3 = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})_\times; \quad (78)$$

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \left[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2\right]_\times, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = \left[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^2\right]_\times, \\ \boldsymbol{\rho}_3 = \left[(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})^2\right]_\times. \quad (79)$$

Выпишем теперь систему из девятнадцати инвариантов, которая заведомо является переполненной

$$I_1^A = \operatorname{tr}\mathbf{A}, \quad I_2^A = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{A}^2)\right], \quad I_3^A = \det\mathbf{A},$$
$$I_1^B = \operatorname{tr}\mathbf{B}, \quad I_2^B = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{B})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{B}^2)\right], \quad I_3^B = \det\mathbf{B},$$
$$I_1^C = \operatorname{tr}\mathbf{C}, \quad I_2^C = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr}\mathbf{C})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{C}^2)\right], \quad I_3^C = \det\mathbf{C},$$
$$I_1^{AB} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1, \quad I_2^{AB} = \mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1, \quad I_3^{AB} = \boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1,$$
$$I_1^{AC} = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2, \quad I_2^{AC} = \mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2, \quad I_3^{AC} = \boldsymbol{\rho}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2,$$
$$I_1^{BC} = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_3, \quad I_2^{BC} = \mathbf{r}_3 \cdot \boldsymbol{\rho}_3, \quad I_3^{BC} = \boldsymbol{\rho}_3 \cdot \boldsymbol{\rho}_3, \quad (80)$$

Здесь выписаны восемнадцать инвариантов. При этом нельзя забывать о существовании тождеств

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}_1,$$
$$\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_2,$$
$$\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_3.$$

К инвариантам (80) следует добавить еще один

$$I_{ABC} = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_\times] \cdot [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_\times]. \quad (81)$$

Этот инвариант играет роль, аналогичную роли смешанного произведения трех векторов. Другие инварианты типа (81) можно не учитывать, ибо они выражаются через уже известные. Например,

$$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})_\times = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})_\times - \mathrm{tr}\mathbf{C}\,\mathbf{r}_1 + \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}_1.$$

Система инвариантов (80), (81) включает девятнадцать инвариантов, хотя нужно только пятнадцать. Если, например, тензор $\mathbf{A}$ имеет различные собственные числа, то последние три инварианта в системе (80) можно отбросить. Тогда останется шестнадцать инвариантов, задание которых необходимо для фиксации системы трех тензоров с точностью до жесткого поворота в системе отсчета. При этом инвариант (81) не существеннен, если рассматриваются непрерывные "деформации" рассматриваемой системы тензоров.

Если все собственные числа тензоров $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ различны, то вместо последних десяти инвариантов в системе (80), (81) можно использовать следующие шесть

$$\mathrm{I}_{10} = \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1,\quad \mathrm{I}_{11} = \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_2,\quad \mathrm{I}_{12} = \mathbf{r}_3\cdot\mathbf{r}_3,$$
$$\mathrm{I}_{13} = \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2,\quad \mathrm{I}_{14} = \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_3,\quad \mathrm{I}_{15} = \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_3,$$
$$\mathrm{I}_{16} = \mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)\,. \qquad (82)$$

Между последними семью инвариантами имеется одна связь. Очевидный недостаток системы инвариантов (82) в том, что она становится недостаточной, если, например, один из трех тензоров рассматриваемой системы тензоров является шаровым. Возможны и другие вырожденные случаи.

Приведем для сравнения систему инвариантов, предложенную в работах [13], [14]

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A},\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{B},\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{B}^2,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{B}^3,$$
$$\mathrm{tr}\,\mathbf{C},\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{C}^2,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{C}^3,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B},\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{C},\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{C}\cdot\mathbf{B},$$
$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B},\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^2,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^2,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^2,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{C}^2\cdot\mathbf{B},$$
$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{C},\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}^2,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{C}^2,\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{C}^2\cdot\mathbf{B}^2. \qquad (83)$$

Неполнота системы инвариантов (83) вполне очевидна и быстро была обнаружена [16, 18]. Однако природа неполноты этой системы инвариантов так и не была описана в известных работах. Не было установлено какие именно элементы в системе трех тензоров не фиксируются инвариантами (83). Поэтому остается неясным, сколько именно инвариантов необходимо добавить к системе (83). Как отмечается в работе [4] к системе инвариантов (83) следует добавить всего один инвариант

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}), \qquad (84)$$

чтобы система инвариантов (83) - (84) была полна, хотя строгое доказательство этого утверждения так и не было приведено. В работах [11, 12] предлагается использовать еще несколько инвариантов в дополнение к (83) - (84). С другой стороны, система инвариантов (83) - (84) заведомо содержит лишние инварианты. По мнению автора, приемлемое решение этой проблемы невозможно в отрыве от контекста рассматриваемой задачи механики. Использование переполненной системы инвариантов приводит к появлению в теории лишних материальных постоянных, которые принципиально невозможно найти экспериментально.

В работе [18] С. Ривлин привел следующий пример двух систем трех тензоров

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{i}\otimes\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\otimes\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\otimes\mathbf{k},$$
$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{E} - \mathbf{k}\otimes\mathbf{k} + \mathbf{i}\otimes\mathbf{k} + \mathbf{k}\otimes\mathbf{i} - \mathbf{j}\otimes\mathbf{k} - \mathbf{k}\otimes\mathbf{j},$$
$$\mathbf{C}_1 = 2(\mathbf{E} - \mathbf{k}\otimes\mathbf{k}) + \mathbf{i}\otimes\mathbf{j} + \mathbf{j}\otimes\mathbf{i} + \mathbf{i}\otimes\mathbf{k} + \mathbf{k}\otimes\mathbf{i}; \quad (85)$$
$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1,\quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1,$$
$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{E} - \mathbf{2}\,\mathbf{k}\otimes\mathbf{k})\cdot\mathbf{B}_1\cdot(\mathbf{E} - \mathbf{2}\,\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}). \qquad (86)$$

Следует обратить внимание, что тензор $\mathbf{B}_2$ получен из тензора $\mathbf{B}_1$ с помощью элемента симметрии тензора $\mathbf{A}_1$. С. Ривлин отмечает, что для обеих систем тензоров (85) и (86) инварианты (83) совпадают, но при этом существуют инварианты, которые не совпадают. Например,

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{S}_1) = 5,\quad \mathrm{tr}\,(\mathbf{G}_2\cdot\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{S}_2) = 7.$$

Это означает, что системы тензоров (85) и (86) не переводятся одна в другую поворотом. Покажем, что инварианты (80) и (81) для систем (85) и (86) различаются, т.е. система (85) не переводится в систему (86) посредством операции поворота. С этой целью вычислим векторы (78). Для системы тензоров (85) имеем

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j},\quad \mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},\quad \mathbf{r}_3 = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k},$$
$$\boldsymbol{\rho}_1 = 2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k},\quad \boldsymbol{\rho}_2 = -5\mathbf{i}+8\mathbf{j}-9\mathbf{k},\quad \boldsymbol{\rho}_3 = -2\mathbf{j}+6\mathbf{k},$$
$$(\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{C}_1)_\times = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Для системы тензоров (86) имеем

$$\mathbf{r}_1 = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j},\quad \mathbf{r}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},\quad \mathbf{r}_3 = -2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$
$$\boldsymbol{\rho}_1 = -2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k},\quad \boldsymbol{\rho}_2 = -5\mathbf{i}+8\mathbf{j}-9\mathbf{k},\quad \boldsymbol{\rho}_3 = 2\mathbf{i}-6\mathbf{k},$$
$$(\mathbf{A}_2\cdot\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{C}_2)_\times = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Видим, что векторы несоосности для рассматриваемых систем тензоров существенно различаются. Существенно различаются и инварианты (82). В то же время системы инвариантов (80), (81) различаются только в последнем инварианте.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00514).

Список литературы

1. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М.: ГТИИ, 1948.
2. *Вейль А.* Классические группы и их инварианты. М.: .
3. *Спенсер Э.* Теория инвариантов. М.: Мир, 1974.
4. *Boehler J.R. (ed.)* Applications of tensor functions in solid mechanics. Springer – Verlag Wien – New York, 1987.
5. *Spenser A.J.M.* Isotropic polinomial invariants and tensor functions/ in[4], pp.141–169.
6. *Zheng Q.S.* Theory of representations for tensor functions — A unified invariant approach to constitutive equations. Appl. Mech. Rev. vol.47 , №11. pp.545–587.
7. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
8. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975.
9. *Жилин П.А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001.
10. *Жилин П.А.* Основные уравнения неклассической теории оболочек. // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ, N386, 1982, с.29–46.
11. *Spenser A.J.M. and Rivlin R.S.* (1958) The theory of matrix polinomials and its applications to the mechanics of isotropic continia. In [17] p. 1071 – 1098.
12. *Spenser A.J.M. and Rivlin R.S.* (1958) Finite integrity bases for five or fewer symmetric 3×3 matrices. In [17] p. 1099 – 1110.
13. *Wang C.C.* On Representations for Isotropic Functions, Part I and Part II. Arch. Rat. Mech. An., 33 (1969): pp.249–287.
14. *Wang C.C.* A New Representation Theorem for Isotropic Functions, Part I and Part II. Arch. Rat. Mech. An., 36 (1970): pp. 166–223.
15. *Wang C.C.* Corrigendum. Arch. Rat. Mech. An., 43 (1971): pp. 392–395.
16. *Smits G.F.* On a Fundamental Error in Two Papers of C.C. Wang. Arch. Rat. Mech. An., 36 (1970): pp. 161–165.
17. *G.I. Barenblat and D.D. Joseph (editors)* Collected Papers of R.S. Rivlin. Vol.I (p. 1 – 1424) and II (p. 1425 – 2828). Springer – Verlag New York, Inc. 1997.
18. *Rivlin R.S.* Red herring and sundry unidentified fish in nonlinear continuum mechanics. In [17] p. 2765 – 2782.
19. *Альтенбах Х., Жилин П.А.* Общая теория упругих простых оболочек. // Успехи механики Advances in mechanics - Warszawa, Polska, 1988, No 4, c.107–148.
20. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
21. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М.:ИЛ,1947.

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

20 июля 2003

Zhilin P.A.
The modified theory of the tensor symmetry and tensor invariants

УДК 539.3
Жилин П.А. Модифицированная теория симметрии тензоров и их инвариантов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2003. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред.

Классическая теория симметрии тензоров и теория тензорных инвариантов применима только для так называемых евклидовых (полярных) тензоров. Между тем, этот случай в приложениях встречается относительно редко, если не считать случая одного симметричного тензора. Значительно чаще встречаются случаи, когда, например, один вектор системы является полярным, а другой аксиальным, как это имеет место в электродинамике. В теории обобщенного континуума Коссера рассматривается ситуация, когда одна мера деформации является полярным тензором, а вторая мера деформации является аксиальным тензором. Чтобы включить эти случаи в рассмотрение, необходимо модифицировать существующую теорию симметрии, что и сделано в данной работе. Подход, использованный в статье, является в известной мере новым, хотя отдельные аспекты теории ранее рассматривались в теории непрерывных групп. В основе построений лежит новое определение инварианта тензора, которое для евклидовых тензоров переходит в классическое. Далее выводится уравнение в частных производных производных первого порядка, интегралы которого дают все инварианты рассматриваемой системы тензоров. Формулируется теорема о минимальном числе функционально независимых инвариантов, составляющих функциональный базис на множестве инвариантов. Приводятся примеры конкретных систем тензоров.

Ил. 0. Табл. 0. Библиогр. 21.