Введение

Теория тонких стержней в истории развития механики и математической физики сыграла выдающуюся роль. Достаточно сказать, что именно в теории стержней (нитей) впервые в истории возникли дифференциальные уравнения, как обыкновенные, так и в частных производных. И, разумеется, нельзя забывать, что второй закон динамики был открыт Л. Эйлером при разработке им теории стержней. Последняя зародилась в XVII в. (Г. Галилей, Я. Бернулли), интенсивно развивалась в XVIII в. (Л. Эйлер, Д. Бернулли, Ж. Даламбер) и в XIX в. (Г. Клебш, Г. Кирхгоф). Значительный вклад в механику внесли исследования по теории стержней, проведенные в XX столетии. Будучи старейшей теорией в механике сплошных сред, теория тонких стержней остается одной из самых полезных и в теоретическом, и в практическом отношениях. Именно теория тонких стержней являлась, и является поныне, тем полигоном, на котором испытывались многие методы механики сплошных сред. Можно сказать, что теория стержней является мостом, соединяющим механику дискретных и непрерывных систем. Как известно, механика дискретных систем описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в которых в качестве независимой переменной фигурирует время t, меняющееся в интервале $0 \leq t < \infty$. Соответственно основной математической проблемой в механике дискретных систем является решение задачи с начальными данными, т. е. решение задачи Коши, которая, как правило, имеет единственное решение. Механика сплошных сред описывается уравнениями в частных производных, в которых в качестве независимых переменных выступают три пространственных координаты и время. В теории стержней фигурируют всего две независимых переменных: одна пространственная координата (обычно длина дуги упругой линии), а второй координатой является время. С одной стороны, наличие всего одной пространственной координаты сильно упрощает ситуацию в сравнении с общим случаем. С другой стороны, именно в теории стержней оказывается возможным исследовать весьма замысловатые пространственные равновесные конфигурации, а также пространственные формы движения. Важной особенностью тонкого стержня является то, что при малых деформациях он допускает весьма большие перемещения. Например, первоначально прямой стержень можно свернуть в кольцо. При этом деформации стержня останутся пренебрежимо малыми. Теорию тонких стержней можно разделить на два обширных раздела: статику и динаделом механики. Например, линейная теория равновесия тонких прямолинейных стержней составляет содержание курса сопротивления материалов. В связи с этим не может быть и речи о том, чтобы в небольшом односеместровом курсе полно охватить даже основные результаты этой теории. Впрочем, по мнению автора, в настоящее время в этом и нет никакой необходимости, ибо возможности решения многих проблем теории стержней заложены в существующие стандартные пакеты программ. Фактически главной проблемой современных исследователей является не проблема решения уже поставленных задач, а общее понимание основных принципов построения теории. Необходимость в этом возникает каждый раз, когда приходится менять существующие постановки задач, включая в них те или иные дополнительные факторы. Целью данного курса является последовательное изложение теории тонких упругих стержней на основе фундаментальных законов механики. Особенностью излагаемой теории стержней является систематическое использование тензора поворота, позволяющего наиболее естественным образом описать повороты поперечных сечений стержня. Кроме того, тензор поворота оказывается удобным при рассмотрении задач совместной динамики стержня и сопряженного с ним твердого тела. Эта задача важна, например, при анализе динамики ультрацентрифуг. Существует множество проблем, в которых заранее нельзя сказать, какие факторы можно не учитывать, а какие необходимо принимать во внимание. Знание общей теории, из которой могут быть получены те ли иные частные теории, для современного инженера-исследователя является необходимостью.

1. Модель стержня и его движения

Моделью тонкого стержня является оснащенная кривая. Необходимые нам элементы теории кривых в пространстве были изложены в третьей главе книги [3]. Ниже они будут использоваться без дополнительных ссылок. Чтобы задать кривую в пространстве необходимо определить вектор-функцию скалярного аргумента

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad 0 \le s \le l, \tag{1.1}$$

где s есть длина дуги кривой; l — длина кривой.

Кривую (1.1) будем называть несущей кривой и определим для нее естественный трехгранник Френе $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}\}$, где векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ суть единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали соответственно. Наряду с введенными обозначениями будем применять следующие: