Нелинейная теория стержней и ее приложения*

Аннотация

Доклад посвящен обсуждению динамической теории тонких пространственно изогнутых и естественно закрученных стержней. Предлагаемая теория включает в себя все известные варианты теории стержней, но обладает более широкой областью применимости. Для плоских упругих кривых определены все модули упругости. Значительное внимание в докладе уделено анализу ряда классических задач, включая те из них, решение которых ведет к парадоксальным результатам. В частности, подробно рассмотрена знаменитая эластика Эйлера и показано, что наряду с известными равновесными конфигурациями в ней существуют и динамические равновесные конфигурации. При этом форма упругой линии не меняется, а изогнутый стержень совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси. Энергия деформации при этом не меняется. Под-черкнем, что речь не идет о движениях стержня как жесткого целого, поскольку заделанный торец стержня остается неподвижным. Отсюда следует, что изогнутая равновесная конфигурация в эластике Эйлера является, вопреки общепринятой точке зрения, неустойчивой. С другой стороны, этот вывод не подтверждается экспериментальными данными. Поэтому возникает парадоксальная ситуация, которая требует своего решения. Аналогичная ситуация, известная под названием парадокса Николаи, возникает при кручении стержня торцевым моментом. В этом случае эксперимент показывает, что крутящий момент, оказывает стабилизирующее действие, что находится в резком противоречии с теорией.

1 Введение

Основы теории тонких упругих стержней были заложены Л. Эйлером. Будучи старейшей теорией в механике сплошных сред, теория тонких стержней остается одной из самых полезных и в теоретическом, и в практическом отношениях. Линейная теория стержней составляет отдельный предмет, который изучается во всех технических вузах и обрел, можно сказать, каноническую форму. Не столь благополучно обстоит дело с нелинейной теорией стержней. С одной стороны, в ней получено огромное число частных результатов. С другой стороны, большая их часть, полученная с 1744

*Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Труды XXIV летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”, Санкт-Петербург, 1997. С. 313–337.

по 1916 годы, в настоящее время трудна для восприятия, т.к. изложена на уже устаревшем языке и разбросана по труднодоступным изданиям. Отсутствие современной монографии по нелинейной теории стержней, с достаточной полнотой освещающей предмет, является весьма заметным пробелом в механике сплошных сред и сильно затрудняет дальнейший прогресс в этой области. Между тем, многие аспекты обсуждаемой теории еще не исследованы. Особенно это относится к пространственным формам движения и равновесия упругих стержней.

Целью данной работы является последовательное изложение нелинейной теории тонких упругих стержней. Дается компактная форма основных уравнений, удобных для математического исследования, и показываются некоторые примеры их применения. Особенностью излагаемой теории стержней является систематическое использование тензора поворота, позволяющего наиболее естественным образом описать повороты поперечных сечений стержня. Кроме того, тензор поворота оказывается удобным при рассмотрении задач совместной динамики стержня и сопряженного с ним твердого тела. Заметим, что общепринятой нелинейной теории стержней не существует. Изложенной в работе теорией авторы пользуются уже более десяти лет и имели возможность убедиться в ее достоинствах. Первоначальный интерес авторов к уточненной теории был связан со следующим обстоятельством. Известно, что решения целого ряда задач динамики стержней приводят к парадоксальным или не вполне ясным результатам, сущность которых хотелось бы осознать полнее. Приведем простой пример. Рассмотрим динамическую задачу для консольного стержня, нагруженного торцевым мертвым моментом. Если модуль мертвого момента мал, и малы начальные отклонения, то можно, казалось бы, воспользоваться уравнениями малых колебаний скрученного стержня. Поступив таким образом, мы получим хорошо поставленную задачу, решения которой малы по норме и не предвещают никаких неприятностей. Но стоит учесть в этой задаче нелинейные члены, как для сколь угодно малой величины крутящего момента и для сколь угодно малых начальных условий мы получим экспоненциально растущие во времени решения. Это явление получило название парадокса Николаи. Аналогичное явление имеет место и для многих других типов торцевых моментов. Означает ли это обстоятельство невозможность использования линеаризованных уравнений? Очень не хотелось бы так думать. А это означает необходимость поиска строгих критериев того, когда можно использовать линейный подход, а когда нельзя, и почему. Для анализа подобного рода необходимо располагать строгой внутренне непротиворечивой теорией стержней. Между тем в литературе подобные задачи решаются на основе заведомо приближенных уравнений, и остается неясным, какие факторы и за что отвечают.

2 Основные уравнения нелинейной динамики упругих стержней

Нелинейная теория стержней, не учитывающая деформацию поперечного сдвига была построена Г. Кирхгофом и усовершенствована А. Клебшем. Эта теория представлена в книге А. Лява [1]. Ниже воспроизводятся основные уравнения нелинейной динамики упругих стержней [2], вывод которых опирается на идеи работ [3, 4]. Отличие этих уравнений от классических заключается в учете деформации поперечного сдвига и инерции вращения. Кроме того используется современная тензорная символика. При игнорировании поперечного сдвига и инерции вращения излагаемая теория переходит в классическую.

В отсчетной конфигурации упругая линия стержня определяется заданием вектора $\mathbf{r}(s) = s\boldsymbol{\tau}$, $0 \le s \le l$, где $\boldsymbol{\tau}$ — орт недеформированной оси стержня, s — материальная координата в недеформированном состоянии, l — длина недеформированного стержня. В актуальной конфигурации положение точек стержня определяется вектором $\mathbf{R}(s,t)$, где t — время. Ориентация поперечного сечения стержня в точке s и момент времени t определяется заданием тензора поворота $\mathbf{P}(s,t)$

$$\mathbf{P}(s,t)\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(s,t) = \mathbf{E}, \qquad \det\mathbf{P}(s,t) = 1 .$$

В отсчетной конфигурации $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, а в начальный момент времени $\mathbf{P}(s,0) = \mathbf{P}_0(s)$. Для первоначально прямолинейных стержней уравнения движения имеют вид

$$\mathbf{N}'(s,t) + \rho\mathbf{F}(s,t) = \rho\ddot{\mathbf{R}}(s,t), \qquad \left(\dot{f} \equiv \partial f/\partial t, \quad f' \equiv \partial f/\partial s\right) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{M}'(s,t) + \mathbf{R}'(s,t)\times\mathbf{N}(s,t) + \rho\mathbf{L}(s,t) = \rho(\,\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\Theta}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\omega}\,)^{\cdot}, \tag{2.2}$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ — векторы внутренних усилий и моментов; $\mathbf{F}$ и $\mathbf{L}$ — векторы массовых плотностей внешних сил и моментов; ρ — массовая плотность в отсчетной конфигурации; $\rho\boldsymbol{\Theta}$ — линейная плотность тензора инерции стержня. В (2.1)–(2.2) считается, что упругая линия проходит через центры масс поперечных сечений.

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(s,t)$ поворота поперечных сечений стержня находится по уравнению Пуассона [5, 6]

$$\dot{\mathbf{P}}(s,t) = \boldsymbol{\omega}(s,t)\times\mathbf{P}(s,t) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\right]_{\times}, \qquad (\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})_{\times} \equiv \mathbf{a}\times\mathbf{b}. \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение векторы деформации: $\mathbf{E}$ — вектор деформации растяжения–поперечного сдвига, $\boldsymbol{\Phi}$ — вектор деформации изгиба–кручения. Они определяются формулами

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}' - \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}, \qquad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{P}. \tag{2.4}$$

Если векторы $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ равны нулю, то стержень движется как жесткое целое. Наоборот, если стержень испытывает только смещение как жесткое целое, то $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ равны нулю. Векторы деформации удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{E} = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}', \qquad \dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\omega}', \quad \left(\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}\right). \tag{2.5}$$

Для замыкания системы уравнений (2.1)–(2.5) необходимо задать определяющие уравнения, т.е. связь векторов усилий и моментов с векторами деформации. При этом необходимо иметь уверенность, что определяющие уравнения согласованы с уравнением баланса энергии.

$$\frac{d}{dt}\int_{s_1}^{s_2}\rho\,(\mathcal{K} + U)\,ds = \int_{s_1}^{s_2}\rho\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega})\,ds + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega})\Big|_{s_1}^{s_2}, \tag{2.6}$$

где $\mathcal{K}$ и U — массовые плотности кинетической и внутренней энергий соответственно. Для $\mathcal{K}$ имеем

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}\,,$$

где

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta_1\,\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2\,\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3\,\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}\,, \quad \boldsymbol{\Theta} = \Theta_1\left(\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}\right) + \Theta_3\,\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}\,, \tag{2.7}$$

$\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ — главные оси инерции поперечного сечения. Второе из выражений (2.7) является частным случаем первого, когда $\Theta_1 = \Theta_2$. Так будет для стержней с круговым поперечным сечением или если последнее имеет форму правильного многоугольника.

В уравнении (2.6) не учтены термомеханические эффекты.

После стандартных преобразований, учитывающих (2.1)–(2.2) и (2.5), получаем локальную форму уравнения баланса энергии

$$\rho\dot{\mathrm{U}} = \mathbf{N} \cdot \left(\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}\right) + \mathbf{M} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}\right)\,. \tag{2.8}$$

Примем, что внутренняя энергия зависит только от векторов деформации $\mathbf{E}$, $\boldsymbol{\Phi}$ и тензора поворота $\mathbf{P}$, т.е.

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}\left(\mathbf{E}\,,\ \boldsymbol{\Phi}\,,\ \mathbf{P}\right).$$

Понятно, что внутренняя энергия не должна меняться при наложении на данную конфигурацию жесткого смещения или жесткого поворота. Рассмотрим однопараметрическое семейство тензоров поворота $\mathbf{Q}(\alpha)$, не зависящих ни от s, ни от t. Наряду с конфигурацией $\mathbf{R}\,(s,t)$ и $\mathbf{P}\,(s,t)$ рассмотрим конфигурацию $\mathbf{R}_*\,(s,t)$ и $\mathbf{P}_*\,(s,t)$, определенную выражением

$$\mathbf{R}_*\,(s,t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{Q}\,(\alpha) \cdot \left[\mathbf{R}\,(s,t) - \mathbf{R}\,(0,t)\right], \quad \mathbf{P}_*\,(s,t) = \mathbf{Q}\,(\alpha) \cdot \mathbf{P}\,(s,t)\,.$$

Согласно (2.4) для векторов деформации имеем

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{R}'_* - \mathbf{P}_* \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}\,(\alpha) \cdot \mathbf{E}\,(s,t)\,,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_* = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}_*\right]_{\times} = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\right]_{\times} = \mathbf{Q}\,(\alpha) \cdot \boldsymbol{\Phi}\,(s,t)\,.$$

Инвариантность внутренней энергии относительно жестких смещений означает

$$\mathrm{U}\left(\mathbf{E}_*,\ \boldsymbol{\Phi}_*,\ \mathbf{P}_*\right) = \mathrm{U}\left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}\,,\ \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Phi}\,,\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}\right) = \mathrm{U}\left(\mathbf{E}\,,\ \boldsymbol{\Phi}\,,\ \mathbf{P}\right). \tag{2.9}$$

Для тензора $\mathbf{Q}\,(\alpha)$ примем

$$\frac{d}{d\alpha}\mathbf{Q}\,(\alpha) = \boldsymbol{\eta}(\alpha) \times \mathbf{Q}\,(\alpha)\,, \qquad \mathbf{Q}\,(0) = \mathbf{E}\,, \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\zeta}\,.$$

Дифференцируя (2.9) по α и полагая затем $\alpha = 0$, получаем тождество

$$-\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathbf{E}} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi}\right) \cdot \boldsymbol{\zeta} + \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathbf{P}}\right)^{\mathsf{T}} \cdot\cdot\, \left(\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{P}\right) = 0. \tag{2.10}$$

Это равенство должно выполняться для любых векторов ζ. Теперь мы в состоянии вычислить производную от внутренней энергии по времени, входящую в левую часть (2.8)

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{dU}{d\mathbf{\Phi}} \cdot \dot{\mathbf{\Phi}} + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}}\right)^{T} \cdot\cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}).$$

Используя тождество (2.10) при $\zeta = \boldsymbol{\omega}$ и исключая из последнего равенства последнее слагаемое, получаем

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \cdot \left(\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}\right) + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} \cdot \left(\dot{\mathbf{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Phi}\right).$$

С учетом последнего равенства локальное уравнение баланса энергии принимает вид

$$\left(\rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{N}\right) \cdot \left(\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}\right) + \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} - \mathbf{M}\right) \cdot \left(\dot{\mathbf{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Phi}\right) = 0.$$

Это уравнение должно выполняться для произвольных значений векторов $\dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}$ и $\dot{\mathbf{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Phi}$, что возможно тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Коши–Грина

$$\mathbf{N} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}}, \qquad \mathbf{M} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}}, \tag{2.11}$$

где, напомним, ρ — массовая плотность в отсчетной конфигурации. Таким образом, чтобы получить замкнутую теорию упругих стержней, необходимо задать функцию $U(\mathbf{E}, \mathbf{\Phi}, \mathbf{P})$, удовлетворяющую уравнению (2.10), которое удобнее переписать в другой форме, если учесть тождество

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}}\right)^{T} \cdot\cdot (\zeta \times \mathbf{P}) = -\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{T}\right)_{\times} \cdot \zeta.$$

Тогда вместо (2.10) с учетом произвольности вектора ζ получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{E}} \times \mathbf{E} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Phi}} \times \mathbf{\Phi} + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{T}\right)_{\times} = \mathbf{0}.$$

Это уравнение в частных производных первого порядка, общим интегралом которого является произвольная функция $U\left(\mathbf{P}^{T} \cdot \mathbf{E},\ \mathbf{P}^{T} \cdot \mathbf{\Phi}\right)$. Простейшая форма для U имеет вид квадратичной формы

$$\rho U = \frac{1}{2}\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{T} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2}\, \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^{T} \cdot \mathbf{\Phi}, \tag{2.12}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ симметричные положительно определенные тензоры 2-го ранга, заданные в отсчетной конфигурации и не зависящие от деформаций стержня, т.е. они могут быть вычислены по данным линейной теории. Плотность энергии (2.12) переходит в классическую [1, с.417] при игнорировании деформации поперечного сдвига. Однако энергия (2.12) применима только для достаточно малых деформаций. Например, она не способна описать эффект Пойнтинга — укорочение стержня при закручивании. Тензоры упругости $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ в общем случае имеют вид

$$\mathbf{A} = A_1\, \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + A_2\, \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + A_3\, \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \qquad \mathbf{C} = C_1\, \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + C_2\, \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + C_3\, \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3,$$

где A_3 — жесткость на растяжение; A_1 и A_2 — жесткости на поперечный сдвиг; C_3 — жесткость на кручение; C_1 и C_2 — жесткости на изгиб. В дальнейшем будет рассматриваться случай трансверсально-изотропных тензоров упругости $A_1 = A_2$ и $C_1 = C_2$

$$\mathbf{A} = A_3\,\boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau} + A_1\,(\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau})\,, \qquad \mathbf{C} = C_3\,\boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau} + C_1\,(\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau})\,. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.12) в (2.11), получаем

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{E}\,, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}\,. \tag{2.14}$$

Переход к теории без учета деформации поперечного сдвига происходит в пределе $A_1 \to \infty$, $A_2 \to \infty$. Вектор усилия при этом должен оставаться конечным. Отсюда следует, что должно выполняться равенство

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{a} = 0 \quad \mathbf{a} : \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = (1+e)\,\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = e\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\,, \tag{2.15}$$

где $e = dS/ds - 1$ — относительное удлинение упругой линии. В этом случае вместо первого из соотношений (2.14) мы должны принять равенство

$$\mathbf{N} = A_3\,e\,\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau} + \mathbf{Q}\,, \qquad \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0, \tag{2.16}$$

где вектор перерезывающих сил $\mathbf{Q}$ находится из уравнений движения. При этом энергия (2.12) принимает вид

$$\rho U = \frac{1}{2}A_3\,e^2 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}\,, \qquad e = \mathbf{R}'\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau} - 1\,. \tag{2.17}$$

Весьма популярна теория, не учитывающая не только деформацию поперечного сдвига, но и растяжение. В этом случае имеем

$$e = 0\,, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\,, \qquad \rho U = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}\,. \tag{2.18}$$

Вектор усилий $\mathbf{N}$ находится из уравнений движения.

К выписанным уравнениям следует добавить краевые условия. Здесь нужно ставить по шесть краевых условий на каждом торце стержня. Например, для защемленного края имеем

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{E}\,.$$

Для свободного торца имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{0}\,.$$

Возможны и многие другие типы краевых условий.

В некоторых случаях классическое приближение для энергии деформации (2.12) может оказаться недостаточным, и нужно учитывать более высокие степени векторов деформации. С точностью до членов 3-го порядка энергию деформации можно записать в виде

$$\rho U = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\Phi}\cdot\tilde{\mathbf{D}}\cdot\boldsymbol{\Phi} + \mathbf{E}\cdot\tilde{\mathbf{D}}_2\cdot\mathbf{E}) + \boldsymbol{\Phi}\cdot(\mathbf{E}\cdot\tilde{\mathbf{D}}_1\cdot\mathbf{E} + \boldsymbol{\Phi}\cdot\tilde{\mathbf{D}}_3\cdot\boldsymbol{\Phi}).$$

Для первоначально прямолинейных стержней легко доказать, что $\tilde{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{0}$ и $\tilde{\mathbf{D}}_3 = \mathbf{0}$. Кроме того, поскольку вектор деформации обычно мал, то учет слагаемых третьего порядка по $\mathbf{E}$ кажется излишним, т.е. можно принять $\tilde{\mathbf{D}}_2 = \mathbf{0}$. Таким образом, следующее за (2.12) приближение для энергии можно принять в виде [2]

$$\rho U = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}\cdot\left(\mathbf{E}\cdot\tilde{\mathbf{D}}\right)\cdot\boldsymbol{\Phi}\,, \tag{2.19}$$

где тензор третьего ранга $\tilde{\mathbf{D}}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{D}} = \otimes_1^3\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\,, \tag{2.20}$$

где введено обозначение

$$\otimes_1^k\mathbf{P}\cdot\mathbf{S} \equiv \otimes_1^k\mathbf{P}\cdot\left(S^{i_1\ldots i_k}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{i_k}\right) \equiv S^{i_1\ldots i_k}\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_{i_1}\right)\otimes\ldots\otimes\left(\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_{i_k}\right).$$

Общий вид трансверсально-изотропного тензора третьего ранга дается формулой

$$\mathbf{D} = D_1\boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau} + D_2\boldsymbol{\tau}\otimes(\mathbf{E}-\boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau}) + D_3[\mathbf{d}_1\otimes\boldsymbol{\tau}\otimes\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2\otimes\boldsymbol{\tau}\otimes\mathbf{d}_2 + (\mathbf{E}-\boldsymbol{\tau}\otimes\boldsymbol{\tau})\otimes\boldsymbol{\tau}]\,, \tag{2.21}$$

где $|\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_2| = 1$, $\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_2 = 0$, $\mathbf{d}_1\cdot\boldsymbol{\tau} = \mathbf{d}_2\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$, $(\mathbf{d}_1\times\mathbf{d}_2)\cdot\boldsymbol{\tau} = 1$.

Модуль D_1 легко определяется из экспериментов по кручению и равен $D_1 = C_3$ — см. [2]. Таким образом, следующее приближение для энергии деформации можно записать в виде

$$\begin{aligned}\rho U = {}&\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\boldsymbol{\Phi} + 2D_3\left(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\Phi}\right)\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau} + \\ &+\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\left[D_2\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi} + (C_3 - D_2 - 2D_3)\left(\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{2.22}$$

Анализ теории стержней с энергией (2.22) до сих пор не проводился. Соотношения упругости для сил и моментов при принятии (2.22) записываются в форме

$$\begin{aligned}\mathbf{N} = {}&\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{E} + \left[D_2\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Phi} + (C_3 - D_2 - 2D_3)\left(\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)^2\right]\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau} + 2D_3\left(\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\cdot\boldsymbol{\Phi}\,, \\ \mathbf{M} = {}&\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\boldsymbol{\Phi} + 2D_2\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\boldsymbol{\Phi} + \\ &+\left[2D_3\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\Phi} + 2\left(C_3 - D_2 - 2D_3\right)\left(\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\right]\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau} + 2D_3\left(\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\mathbf{E}\,.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Эти выражения радикально упрощаются при принятии допущения $D_2 = D_3 = 0$, но не вполне ясно насколько это корректно.

3 Равновесие консольного стержня, нагруженного мертвым моментом

В качестве простой иллюстрации рассмотрим одну из немногих задач, допускающих точное элементарное решение по нелинейной теории. Примем, что в (2.1)–(2.2) $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Краевые условия имеют вид

$$s = 0: \quad \mathbf{R} = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{P} = \mathbf{E}; \qquad s = l: \quad \mathbf{N} = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{M} = \mathbf{L}\,, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{L} = \mathrm{const}$ и не зависит от деформации.

Уравнения статики (2.1)–(2.2), соотношения (2.14) и условия (3.1) дают

$$\mathbf{N}' = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \mathbf{0}\,, \ \mathbf{M} = \mathbf{L}\,, \ \mathbf{E} = \mathbf{0}\,, \ \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}\,. \tag{3.2}$$

Второе из соотношений (2.14) запишем в обращенной форме

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{L}\,. \tag{3.3}$$

Легко строится первый интеграл уравнения (3.3)

$$h = \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{L} = \mathrm{const}. \tag{3.4}$$

Чтобы убедиться, что это действительно первый интеграл (3.3), достаточно продифференцировать h по координате, воспользоваться уравнением Пуассона (2.4) и самим уравнением (3.3)

$$h' = \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\Phi} \times \underbrace{\mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{L}}_{\boldsymbol{\Phi}}) - \frac{1}{2}(\underbrace{\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}}_{\boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{L} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Phi}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Phi}) \cdot \mathbf{L} = 0.$$

Тензор поворота $\mathbf{P}$ в общем случае определяется тремя параметрами, например, углами Эйлера. Интеграл (3.4) показывает, что только два из трех параметров являются независимыми. Поэтому достаточно указать двухпараметрический тензор $\mathbf{P}$, тождественно удовлетворяющий интегралу энергии (3.4). Для тензора $\mathbf{C}$ общего вида тензор $\mathbf{P}$ строится относительно сложно [6]. Но для трансверсально изотропного тензора $\mathbf{C}$ вида (2.13) тензор $\mathbf{P}$ определяется немедленно и имеет вид

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}\left(\psi(s)\hat{\mathbf{L}}\right) \cdot \mathbf{Q}\left(\varphi(s)\boldsymbol{\tau}\right), \qquad \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|, \tag{3.5}$$

где используется стандартное для данной работы обозначение

$$\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{m}) \equiv (1 - \cos\alpha)\,\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos\alpha\,\mathbf{E} + \sin\alpha\,\mathbf{m} \times \mathbf{E}\,, \qquad |\mathbf{m}| = 1 \tag{3.6}$$

для тензора поворота на угол α вокруг вектора $\mathbf{m}$.

Тензор (3.5) тождественно удовлетворяет (3.4) при любых значениях углов $\psi(s)$ и $\varphi(s)$ в силу равенств

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}\left(\psi\hat{\mathbf{L}}\right) = \mathbf{L}\,, \qquad \mathbf{Q}(\varphi\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{\mathsf{T}}(\varphi\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{C}^{-1}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{C}$ определен равенством (2.13).

Вектор изгиба–кручения $\boldsymbol{\Phi}$, отвечающий тензору поворота (3.5) — см. [2, 6] выражается формулой

$$\boldsymbol{\Phi} = \psi'\hat{\mathbf{L}} + \varphi'\mathbf{Q}\left(\psi\hat{\mathbf{L}}\right) \cdot \boldsymbol{\tau}\,. \tag{3.8}$$

Теперь уравнение (3.3) с учетом (3.5) и (3.7) принимает вид

$$\psi'\hat{\mathbf{L}} + \varphi'\mathbf{Q}\left(\psi\hat{\mathbf{L}}\right) \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}\left(\psi\hat{\mathbf{L}}\right) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

или после умножения на $\mathbf{Q}^{T}\big(\psi\hat{\mathbf{L}}\big)$ слева имеем

$$\psi'\hat{\mathbf{L}} + \varphi'\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{L}\,.$$

В скалярной форме это уравнение равносильно двум

$$\psi' + \varphi'\cos\theta = 2h/L\,, \qquad \psi'\cos\theta + \varphi' = \frac{L\cos\theta}{C_3}\,, \tag{3.9}$$

где $L \equiv |\mathbf{L}|$, $\quad \hat{\mathbf{L}}\cdot\boldsymbol{\tau} = \cos\theta$, $\quad 2h = \mathbf{L}\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{L} = \frac{1}{C_3}L^2\cos^2\theta + \frac{1}{C_1}L^2\sin^2\theta$,

θ — угол между направлением $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\tau}$.

Решая (3.9), находим углы ψ и φ

$$\psi' = \frac{L}{C_1}\,, \qquad \varphi' = \left(\frac{L}{C_3} - \frac{L}{C_1}\right)\cos\theta\,. \tag{3.10}$$

Вектор $\mathbf{R}(s)$ находится по (3.2) и (3.10)

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}\big(\beta s\hat{\mathbf{L}}\big)\cdot\boldsymbol{\tau} = (1-\cos\beta s)\cos\theta\,\hat{\mathbf{L}} + \cos\beta s\,\boldsymbol{\tau} + \sin\beta s\,\hat{\mathbf{L}}\times\boldsymbol{\tau}\,, \quad \beta = L/C_1$$

или после интегрирования

$$\beta\mathbf{R} = (\beta s - \sin\beta s)\cos\theta\,\hat{\mathbf{L}} + \sin\beta s\,\boldsymbol{\tau} + (1-\cos\beta s)\,\hat{\mathbf{L}}\times\boldsymbol{\tau}\,. \tag{3.11}$$

легко видеть, что (3.11) определяет винтовую линию, т.е. линию, навитую на цилиндр радиуса $R_c = 1/\beta$, ось которого направлена вдоль вектора $\hat{\mathbf{L}}$. Радиусы кривизны и кручения, а также шаг H винтовой линии, определяются формулами

$$R_1^{-1} = \beta\sin\theta\,, \qquad R_2^{-1} = \beta\cos\theta\,, \qquad H = 2\pi\cos\theta/\beta\,. \tag{3.12}$$

Если вектор $\hat{\mathbf{L}}$ ортогонален $\boldsymbol{\tau}$, то винтовая линия превращается в дугу окружности. Если, кроме того, параметр $\beta l = 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$, то стержень сворачивается в k–витковую окружность. Обратим внимание, что следует различать понятия кручения стержня и кручения упругой линии. Радиус кручения упругой линии дается второй из формул (3.12). В то время как кручение стержня находится по вектору изгиба–кручения следующим образом (у Лява [1] оно определено без учета деформации поперечного сдвига). Вектор $\boldsymbol{\tau}$ есть нормаль к поперечному сечению недеформированного стержня. Вектор $\mathbf{D} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}$ есть нормаль к поперечному сечению деформированного стержня. Имеем представления

$$\mathbf{D}' = \boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{D} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{D})\,\mathbf{D} + \mathbf{D}\times\mathbf{D}'\,.$$

Величина $\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{D}$ называется кручением стержня, а обратная к ней величина — радиусом кручения. В данной задаче $\mathbf{D} = \mathbf{R}'$. Поэтому в данной задаче имеем

$$R_k^{-1} = \boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{R}' = \left[\psi'\hat{\mathbf{L}} + \varphi'\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{Q}^{T}\big(\psi\hat{\mathbf{L}}\big)\right]\cdot\mathbf{Q}\big(\psi\hat{\mathbf{L}}\big)\cdot\boldsymbol{\tau} = \psi'\cos\theta + \varphi'\,.$$

Итак, радиус кручения стержня R_k определяется формулой

$$R_k^{-1} = \frac{L\cos\theta}{C_3} \neq R_2^{-1} = \frac{L}{C_1}\cos\theta\,.$$

Допустим, что внешний торцевой момент $\mathbf{L}$ мал по величине

$$\left|\frac{Ll}{C_3}\right| \ll 1\,, \qquad \left|\frac{Ll}{C_1}\right| \ll 1\,.$$

В этом случае в полном решении можно ограничиться только главными членами разложения

$$\mathbf{R}(s) = s\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\,\beta s^2 \hat{\mathbf{L}} \times \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{6}\,\beta^2 s^3 \cos\theta\, \boldsymbol{\tau} \times \left(\hat{\mathbf{L}} \times \boldsymbol{\tau}\right)\,,$$

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = \frac{L}{C_1}\,\hat{\mathbf{L}} + \left(\frac{L}{C_3} - \frac{L}{C_1}\right)\cos\theta\,\boldsymbol{\tau} + \frac{Ls}{C_1}\left(\frac{L}{C_3} - \frac{L}{C_1}\right)\cos\theta\,\hat{\mathbf{L}} \times \boldsymbol{\tau}$$

Линейные по L/C_1 и L/C_3 слагаемые в этих выражениях даются линейной теорией, а квадратичные по ним слагаемые малы, но не вполне ясно, когда их можно игнорировать, т.к. они ортогональны линейным слагаемым и качественно меняют характер решения — плоская кривая превращается в пространственную.

4 Условия потенциальности внешних воздействий

Чтобы не загромождать изложение несущественными деталями, в дальнейшем считаем, что один конец стержня защемлен: $\mathbf{R}(0,t) = \mathbf{0}$, $\mathbf{P}(0,t) = \mathbf{E}$. Тогда мощность внешних воздействий на стержень определяется выражением

$$W = \int\limits_{s_1}^{s_2} \rho\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega}\right) ds + \mathbf{N}(l,t)\cdot\mathbf{v}(l,t) + \mathbf{M}(l,t)\cdot\boldsymbol{\omega}(l,t)\,. \tag{4.1}$$

Определение: внешние воздействия называются потенциальными, если существуют такие функции векторов положений и тензоров поворота $\Pi_1(\mathbf{R},\mathbf{P})$ и $\Pi_2(\mathbf{R},\mathbf{P})$, что справедливы равенства

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega} = -\frac{d}{dt}\,\Pi_1(\mathbf{R},\mathbf{P})\,, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{N}(l,t)\cdot\mathbf{v}(l,t) + \mathbf{M}(l,t)\cdot\boldsymbol{\omega}(l,t) = -\frac{d}{dt}\,\Pi_2\left(\mathbf{R}(l,t)\,,\mathbf{P}(l,t)\right),$$

где векторы усилия $\mathbf{N}(l,t)$ и момента $\mathbf{M}(l,t)$ считаются заданными функциями $\mathbf{R}(l,t)$ и $\mathbf{P}(l,t)$. Поскольку условия потенциальности для обоих случаев в (4.2) выписываются одинаково, то в дальнейшем будем рассматривать только первое из этих выражений, причем будем писать $\Pi_1 = \Pi$. Вычислим производную по времени от функции $\Pi(\mathbf{R},\mathbf{P})$

$$\dot{\Pi}(\mathbf{R},\mathbf{P}) = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{R}}\cdot\dot{\mathbf{R}} + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{P}}\right)^{T}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{P}}\,.$$

Кроме того, с учетом (2.3) имеем

$$\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{L}\cdot\left[\dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^{T}\right]_{\times} = \frac{1}{2}\,\left(\mathbf{L}\times\mathbf{P}\right)^{T}\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{P}}\,.$$

Подставляя эти выражения в (4.2), получаем

$$\left(\mathbf{F} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}\right) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \left[\frac{1}{2}\mathbf{L} \times \mathbf{P} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}}\right] \cdot\cdot \dot{\mathbf{P}} = 0\,. \tag{4.3}$$

Получили линейную форму скоростей, которая для всех мыслимых движений должна обращаться в нуль. Конечно, отсюда нельзя заключить, что коэффициенты при скоростях должны обращаться в нуль, поскольку не все скорости здесь независимы. В самом деле, из уравнения Пуассона следует

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tr}\left(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\right) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^{\mathsf{T}} \cdot\cdot \dot{\mathbf{P}} = 0 \qquad \mathbf{A}:\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}.$$

Поэтому (4.3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}\,, \qquad \frac{1}{2}\mathbf{L} \times \mathbf{P} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}\,.$$

Умножая второе из этих равенств на $\mathbf{P}^{\mathsf{T}}$ справа и вычисляя векторный инвариант от обеих частей получившегося равенства, получаем искомые условия потенциальности

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}\,, \qquad \mathbf{L} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\right)_{\times}\,. \tag{4.4}$$

Здесь учтены тождества

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E})_{\times} = -2\,\mathbf{a}\,, \qquad \mathbf{A}_{\times} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{A}:\ \mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}.$$

Условие потенциальности силы вполне стандартно, но условие потенциальности момента, видимо, ранее не встречалось. Задание П, как функции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}$, возможно, но не всегда удобно. Часто бывает удобнее пользоваться вектором поворота [6]. Напомним его определение. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота представим в форме

$$\mathbf{P} = (1 - \cos\theta)\,\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos\theta\,\mathbf{E} + \sin\theta\,\mathbf{m} \times \mathbf{E}\,, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}$ — неподвижный вектор тензора $\mathbf{P}$, θ — угол поворота. Тензору поворота (4.5) отвечает угловая скорость [5, 6]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\,\mathbf{m} + \sin\theta\,\dot{\mathbf{m}} + (1 - \cos\theta)\,\mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}\,. \tag{4.6}$$

Вектором поворота называется вектор $\boldsymbol{\theta}$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{m}\,, \qquad \mathbf{P} = \exp\left(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}\right).$$

Вторая из этих формул, являющаяся перефразировкой теоремы Эйлера (4.5), устанавливает связь между тензором поворота и вектором поворота. Через вектор поворота угловая скорость выражается формулой

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathbf{E} + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}\,\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\,\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}\right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \mathbf{P}(\theta) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}\,, \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \left[\frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathbf{E} - \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E} + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\,\boldsymbol{\theta}\otimes\boldsymbol{\theta}\right]\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}\,.$$

Потенциалы Π_1 и Π_2 в (4.2) можно рассматривать как функции $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{\theta}$. Тогда вместо (4.3) получим

$$\left(\mathbf{F} + \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{R}}\right)\cdot\dot{\mathbf{R}} + \left[\mathbf{L}\cdot\mathbf{P}(\theta) + \frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right]\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}} = 0\,.$$

Здесь уже все скорости линейно независимы и условия потенциальности состоят в обращении коэффициентов при скоростях в нули

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{R}}\,,\qquad \mathbf{L} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\theta}}\cdot\mathbf{P}^{-1}(\theta)\,. \tag{4.8}$$

Второе из этих выражений можно записать в виде

$$\mathbf{L} = -\left[\frac{\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\,\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\theta}\times\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\theta}} + \frac{2(1-\cos\theta)-\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)\,\theta^2}\left(\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{\theta}\right]. \tag{4.9}$$

Выражение (4.9) внешне выглядит сложнее, чем (4.4), но его фактическое использование часто оказывается проще. Оно сильно упрощается для так называемых изотропных потенциалов таких, что

$$\Pi(\mathbf{P}) = \Pi\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\right) = F(\operatorname{tr}\mathbf{P})\,,\qquad \mathbf{Q}:\ \mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \mathbf{E}\,, \tag{4.10}$$

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}) = \Pi(\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\theta}) \quad\Rightarrow\quad \Pi = F(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta})\,. \tag{4.11}$$

В случае (4.10) формула (4.4) может быть преобразована следующим образом

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{P}} = F'(\operatorname{tr}\mathbf{P})\,\frac{d\operatorname{tr}\mathbf{P}}{d\mathbf{P}} = F'(\operatorname{tr}\mathbf{P})\,\mathbf{E}\,,$$

где штрих означает производную по аргументу $\operatorname{tr}\mathbf{P}$.

Учтем теперь формулы

$$\operatorname{tr}\mathbf{P} = 1 + 2\cos\theta\,,\qquad \mathbf{P}_{\times} = -2\sin\theta\,\mathbf{m} = \frac{d\operatorname{tr}\mathbf{P}}{d\theta}\,\mathbf{m}$$

и перепишем (4.4) в виде

$$\mathbf{L} = \left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{P}}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\right)_{\times} = F'(\operatorname{tr}\mathbf{P})\left(\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\right)_{\times} = -F'(\operatorname{tr}\mathbf{P})\,\frac{d\operatorname{tr}\mathbf{P}}{d\theta}\,\mathbf{m} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{L} = -\frac{d\mathcal{F}}{d\theta}\,\mathbf{m}\,,\qquad F(\operatorname{tr}\mathbf{P}) = \mathcal{F}(\theta)\,. \tag{4.12}$$

Если для $\mathcal{F}(\theta)$ принять простейшее выражение

$$\mathcal{F}(\theta) = -L\,\theta \quad\Rightarrow\quad \mathbf{L} = L\,\mathbf{m}\,, \tag{4.13}$$

то для $\mathbf{L}$ получаем выражение момента, предложенное в работе [7].

В случае (4.11) выражение (4.9) резко упрощается и принимает вид

$$\mathbf{L} = -2\Pi'(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta})\,\boldsymbol{\theta}\,, \tag{4.14}$$

где штрих означает производную по аргументу $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}$.

Чтобы получить момент (4.13), достаточно принять, что $\Pi = -L\sqrt{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}}$.

Из последнего выражения видим, что энергия $\Pi = -L\,|\boldsymbol{\theta}|$ не слишком удачна, т.к. она имеет угловую точку в нуле. Рассмотрим поэтому другой вид консервативного момента, определяемого энергией

$$\Pi = -L\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\,. \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в (4.9), получаем

$$\mathbf{L} = L\left[\frac{\theta\sin\theta}{2\,(1-\cos\theta)}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\tau} + \frac{2\,(1-\cos\theta)-\theta\sin\theta}{2\,(1-\cos\theta)\,\theta^2}\,(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{\theta}\right]. \tag{4.16}$$

При чистом кручении стержня вектор поворота $\boldsymbol{\theta} = \theta\,\boldsymbol{\tau}$, а вектор момента определяется простым выражением

$$\mathbf{L} = L\,\boldsymbol{\tau}\,.$$

В этом случае модуль момента не зависит от поворота, но в общем случае (4.16) модуль потенциального момента (4.16) зависит от угла поворота $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$

$$|\mathbf{L}|^2 = \frac{L^2\,(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})^2}{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}} + \frac{L^2\left[\theta^2 - (\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})^2\right]}{2\,(1-\cos\theta)}\,. \tag{4.17}$$

Очевидно, что для потенциальных внешних воздействий, согласно (2.6) и (4.2), имеем интеграл энергии

$$\int\limits_{s_1}^{s_2}[\rho\,(\mathcal{K}+U) + \Pi_1(\mathbf{R},\boldsymbol{\theta})]\,ds \;+\; \Pi_2\,(\mathbf{R}\,(l,t)\,,\boldsymbol{\theta}\,(l,t)) = const\,. \tag{4.18}$$

5 Прямолинейные равновесные конфигурации консольного стержня

Рассмотрим консольный стержень, нагруженный силами и моментами на незакрепленном торце. Краевые условия

$$s = 0: \qquad \mathbf{R}(0,t) = \mathbf{0}\,, \qquad \mathbf{P}(0,t) = \mathbf{E}\,; \tag{5.1}$$

$$s = l: \qquad \mathbf{N}\,(l,t) = -a_1F\boldsymbol{\tau} - a_2\mathbf{P}\,(l,t)\cdot\boldsymbol{\tau}\,, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{M}\,(l,t) = b_1L\boldsymbol{\tau} + b_2L\mathbf{P}\,(l,t)\cdot\boldsymbol{\tau} + b_4\mathbf{L}_3 + b_3L\frac{\boldsymbol{\tau} + \mathbf{P}\,(l,t)\cdot\boldsymbol{\tau}}{\sqrt{2[1+\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{P}\,(l,t)\cdot\boldsymbol{\tau}]}}\,. \tag{5.3}$$

В (5.2)–(5.3) учтены наиболее популярные типы торцевых нагружений. Мертвая сила: $a_1 \neq 0$. Следящая сила: $a_2 \neq 0$. Мертвый момент: $b_1 \neq 0$. Следящий момент: $b_2 \neq 0$. Полукасательный момент: $b_3 \neq 0$. Потенциальный момент: $b_4 \neq 0$. Считается, что остальные a_i и b_k равны нулю. В литературе полукасательный момент относят к потенциальным, но это верно только приближенно. В качестве потенциального будем рассматривать моменты порождаемые потенциалами

$$\Pi = -L\sqrt{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}}\,, \quad \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{R}' > 0\,, \quad \mathbf{L} = L\boldsymbol{\theta}/|\boldsymbol{\theta}|\,, \tag{5.4}$$

$$\Pi = -L\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}\,, \quad \mathbf{L} = L\left[\frac{\theta\sin\theta}{2\,(1-\cos\theta)}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\tau} + \frac{2\,(1-\cos\theta)-\theta\sin\theta}{2\,(1-\cos\theta)\,\theta^2}\,(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\tau})\,\boldsymbol{\theta}\right]. \tag{5.5}$$

Моменты, порождаемые этими потенциалами, определены выражениями (4.13) и (4.16) соответственно. Условие $\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{R}' > 0$ исключает из рассмотрения чистый изгиб стержня.

Равновесные конфигурации находятся как решения уравнений

$$\mathbf{N}' = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}'\times\mathbf{N} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{N} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{E}\,, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^{\mathsf{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}\,,$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{R}' - \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\,, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{P} \tag{5.6}$$

при краевых условиях (5.1)–(5.3).

Убедимся, что задача (5.1)–(5.6) имеет решение вида

$$\mathbf{R} = [s + u(s)]\,\boldsymbol{\tau}\,, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}\,(\psi(s)\boldsymbol{\tau}) \quad \Rightarrow$$
$$\mathbf{E} = u'\boldsymbol{\tau}\,, \quad \boldsymbol{\Phi} = \psi'\boldsymbol{\tau}\,, \quad \mathbf{N} = A_3 u'\boldsymbol{\tau}\,, \quad \mathbf{M} = C_3\psi'\boldsymbol{\tau}\,. \tag{5.7}$$

Подставляя (5.7) в уравнения статики (5.4), получаем

$$A_3\,u(s) = -\,(a_1 + a_2)\,Fs\,, \qquad C_3\,\psi(s) = (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)\,Ls \tag{5.8}$$

В равновесной конфигурации (5.6)–(5.8) стержень остается прямолинейным, но оказывается сжатым и скрученным. Имеются ли в задаче (5.1)–(5.5) другие решения и каково их число? Полный ответ не известен. Следующий важный вопрос: устойчива ли конфигурация (5.6)–(5.8)? В общем случае ответ и на этот вопрос не получен, хотя много частных результатов в рамках нерастяжимого стержня известно уже давно [8, 9, 10]. Здесь мы рассмотрим частный случай о чисто моментном нагружении $(a_1 = a_2 = 0)$. Имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}\,, \qquad \mathbf{M} = \mathrm{const}. \tag{5.9}$$

Пришли к задаче, аналогичной задаче о нагружении стержня мертвым моментом, но здесь постоянный момент $\mathbf{M}$ заранее неизвестен и подлежит определению. Каков бы ни был момент $\mathbf{M}$ первая часть решения этой задачи совпадает с тем, что было изложено в п.3. Поэтому можем написать

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\left(\psi\hat{\mathbf{M}}\right)\cdot\mathbf{Q}\,(\varphi\boldsymbol{\tau})\,, \quad \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/M\,, \quad M = |\mathbf{M}|\,, \tag{5.10}$$

где

$$\psi(s) = \frac{Ms}{C_1}\,, \qquad \varphi(s) = \left(\frac{Ms}{C_3} - \frac{Ms}{C_1}\right)\cos\theta\,, \quad \cos\theta \equiv \hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau}\,. \tag{5.11}$$

Осталось определить момент $\mathbf{M}$. Рассмотрим отдельные случаи.

5.1 Нагружение мертвым моментом $(b_1 = 1,\ b_2 = b_3 = b_4 = 0)$

В этом случае $\mathbf{M} = L\boldsymbol{\tau}$, т.е. $M = |L|$, $\hat{\mathbf{M}} = \pm\boldsymbol{\tau}$. Выбор знака у $\hat{\mathbf{M}}$ безразличен и прямолинейная конфигурация единственна.

5.2 Нагружение следящим моментом $(b_2 = 1,\ b_1 = b_3 = b_4 = 0)$

В этом случае $\mathbf{M} = L\mathbf{P}(l)\cdot\boldsymbol{\tau}$. Подставляя сюда (5.10), получаем $\mathbf{M} = L\mathbf{Q}\left(\psi(l)\hat{\mathbf{M}}\right)\cdot\boldsymbol{\tau} \Rightarrow \mathbf{M}\cdot\hat{\mathbf{M}} = L\hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau} \Rightarrow M = |L|$, $\hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau} = \pm 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{M}} = \pm\boldsymbol{\tau}$. Легко убедиться, что и в этом случае прямолинейная конфигурация (5.6)–(5.8) единственна.

5.3 Нагружение полукасательным моментом $(b_3 = 1,\ b_1 = b_2 = b_4 = 0)$

В этом случае прямолинейная конфигурация единственна при условии, что

$$|L| \neq (2k+1)\,\pi C_1/l\,. \tag{5.12}$$

В самом деле для полукасательного момента имеем равенство

$$\mathbf{M} = \frac{L\,(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{P}(l)\cdot\boldsymbol{\tau})}{\sqrt{2\,[1 + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{P}(l)\cdot\boldsymbol{\tau}]}} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{M}| = |L|\,.$$

Для направляющего вектора $\hat{\mathbf{M}}$ имеем ($L > 0$)

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{(1+\cos\alpha l)\,\boldsymbol{\tau} + (1-\cos\alpha l)\cos\theta\,\hat{\mathbf{M}} + \sin\alpha l\,\hat{\mathbf{M}}\times\boldsymbol{\tau}}{\sqrt{2\left(1+\cos^2\theta+\cos\alpha l\sin^2\theta\right)}}\,,$$

где $\alpha l = Ll/C_1$, $\cos\theta = \hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau}$.

Если $\sin\alpha l \neq 0$, то $\hat{\mathbf{M}}\times\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ и $\hat{\mathbf{M}} = \pm\boldsymbol{\tau}$. Легко убедиться, что при любом выборе знака мы имеем одну и ту же прямолинейную равновесную конфигурацию. Если $\sin\alpha l = 0$, $\cos\alpha l = 1$, то $\hat{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\tau}$ и мы опять приходим к прямолинейной конфигурации.

Если справедливы равенства

$$\sin\alpha l = 0\,, \quad \cos\alpha l = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha l = (2k+1)\,\pi \quad (k = 0, 1, \ldots)\,, \tag{5.13}$$

то получаем

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}\,\hat{\mathbf{M}}\,.$$

Следовательно, при $\cos\theta > 0$ вектор $\hat{\mathbf{M}}$ может быть любым, а при $\cos\theta < 0$ решения не существует, т.е. остается только решение $\hat{\mathbf{M}} = \pm\boldsymbol{\tau}$. В случае (5.13) тензор поворота (5.10) принимает вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\left[(2k+1)\,\pi\,\frac{s}{l}\,\hat{\mathbf{M}}\right]\cdot\mathbf{Q}\left[(2k+1)\,\pi\left(\frac{C_1}{C_3} - 1\right)\frac{s}{l}\,\boldsymbol{\tau}\right].$$

Равновесные конфигурации находятся интегрированием соотношения

$$\mathbf{R}'(s) = \left[1 - \cos\frac{(2k+1)\pi s}{l}\right] \left(\hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\hat{\mathbf{M}} + \cos\frac{(2k+1)\pi s}{l}\,\boldsymbol{\tau} + \sin\frac{(2k+1)\pi s}{l}\,\hat{\mathbf{M}}\times\boldsymbol{\tau} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{R}'(l) = 2\left(\hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau}\right)\hat{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\tau}, \quad \hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau} > 0\,. \tag{5.14}$$

Интегрируя (5.14), получаем винтовую линию, а точнее семейство винтовых линий, т.к. вектор $\hat{\mathbf{M}}$ остается неопределенным.

Решения (5.14) появляются только для дискретных значений момента, определяемых равенством (5.13). Таким образом, если игнорировать эти дискретные значения момента, то прямолинейная конфигурация стержня, нагруженного полукасательным моментом единственна.

5.4 Нагружение потенциальным моментом

Если принять потенциал (5.4), то для краевого момента $\mathbf{L}$ имеем $\mathbf{L} = L\,\boldsymbol{\theta}(l)/|\boldsymbol{\theta}(l)|$, т.е. $\mathbf{L}$, а стало быть и $\mathbf{M} = \mathbf{L}$, направлен по неподвижному вектору тензора $\mathbf{P}(l)$

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{Q}\left(\psi(l)\hat{\mathbf{M}}\right)\cdot\mathbf{Q}\left(\varphi(l)\boldsymbol{\tau}\right) = \hat{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{Q}\left(\varphi(l)\boldsymbol{\tau}\right),$$

т.е. вектор $\hat{\mathbf{M}}$ является неподвижным вектором тензора поворота $\mathbf{Q}\left(\varphi(l)\boldsymbol{\tau}\right)$. Если $\varphi(l) \neq 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$, то вектор $\hat{\mathbf{M}}$ находится однозначно и равен $\hat{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\tau}$. Случай $\hat{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\tau}$ по существу ничего не меняет.

Если $\varphi(l) = 0$, то при $\mathbf{L} \neq 0$ имеем $\hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$. Но этот случай очевидно исключен условием $\boldsymbol{\theta}(l)\cdot\mathbf{R}'(l) > 0$. Поэтому рассмотрим случай

$$\varphi(l) = \left(\frac{Ml}{C_3} - \frac{Ml}{C_1}\right)\left(\hat{\mathbf{M}}\cdot\boldsymbol{\tau}\right) = \left(\frac{1}{C_3} - \frac{1}{C_1}\right) l\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\tau} = 2\pi k \quad (k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{5.15}$$

Видим, что и здесь, как и в случае с полукасательным моментом для каждого значения $\mathbf{M}$, удовлетворяющего (5.15), появляется свое семейство винтовых линий.

Практического значения выявленная неединственность, видимо, не имеет, т.к. она появляется только при больших значениях краевого момента $\mathbf{L}$, когда материал стержня находится далеко за пределами упругости.

Для потенциала (5.5) исследование числа решений в принципе проводится аналогично, но выливается в анализ очень громоздких уравнений. Поэтому этот анализ оставляем в стороне. Усложняется этот анализ и в том случае, когда действует комбинация рассмотренных моментов. То, что здесь могут возникнуть нетривиальные ситуации, видно уже из приведенного анализа: для мертвого и следящего моментов, взятых по отдельности, решение единственно, но для их комбинации (полукасательного момента) решение не единственно.

6 Нерастяжимый гибкий стержень

Подавляющее большинство результатов, полученных в нелинейной теории стержней, относятся к случаю, когда игнорируются деформации растяжения и поперечного сдвига, а также инерция вращения. Полная система уравнений в этом случае имеет вид

$$\mathbf{N}' + \rho\mathbf{F} = \rho S\ddot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}'\times\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^{T}\cdot\boldsymbol{\Phi}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi}\times\mathbf{P}\,. \tag{6.1}$$

Здесь мы имеем девять неизвестных функций: шесть координат векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{N}$ и три параметра, определяющие тензор поворота. Далее в этом пункте будем рассматривать частный случай безынерционного стержня $(\rho S = 0)$ с трансверсально изотропным тензором упругости $\mathbf{C}$. Если, кроме того, распределенная нагрузка отсутствует $(F = 0)$, то ситуация упрощается еще больше, поскольку $\mathbf{N} = \mathrm{const}$. Фактически теперь остается только три неизвестных — параметры, определяющие тензор поворота. Вектор $\mathbf{R}$ находится по третьему уравнению системы (6.1) квадратурой. Очень часто при анализе этого случая ссылаются на аналогию, установленную Г.Кирхгофом в 1859 г., между уравнениями твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести. Следует, однако, иметь в виду, что, строго говоря, эта аналогия справедлива только в том случае, если вектор $\mathbf{N}$ равен нулю. Дело в том, что в динамике твердого тела заданы начальные условия, т.е. при $t = 0$ заданы тензор поворота и вектор угловой скорости. Для консольного стержня вектор поворота при $s = 0$ задан, но вектор момента при $s = 0$ известен только в том случае, если $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Поэтому теорема единственности для решений задачи Коши в динамике твердого тела в задаче об изгибе с кручением тонкого стержня уже не применима. Имеются и другие весьма заметные отличия. В целом задачи теории стержней оказываются значительно более сложными, чем задачи динамики твердого тела.

Согласно третьему и пятому уравнению системы (6.1) имеем

$$\mathbf{R}'' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{R}' \quad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{R}')\, \mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \qquad \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{R}'' = 0. \tag{6.2}$$

Второе из этих соотношений выражает представление Пуассона для вектора изгиба–кручения. Если тензор упругости $\mathbf{C}$ определяется формулой (2.13), то для момента $\mathbf{M}$ имеем

$$\mathbf{M} = C_1\, \boldsymbol{\Phi} + (C_3 - C_1)\, (\mathbf{R}' \cdot \boldsymbol{\Phi})\, \mathbf{R}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = C_3\, \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{R}'. \tag{6.3}$$

Подставляя (6.3) во второе уравнение системы (6.1) и проецируя получившееся уравнение на $\mathbf{R}'$ с учетом последнего соотношения из (6.2), получаем интеграл Пуассона (1816)

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = C_3\, \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{R}' = C_3\, \Omega = \mathrm{const}, \tag{6.4}$$

т.е. крутящий момент в стержне при действии только торцевых нагрузок сохраняет постоянное по длине стержня значение. Тогда имеем представления

$$\boldsymbol{\Phi} = \Omega\, \mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \qquad \mathbf{M} = C_3\, \Omega\, \mathbf{R}' + C_1\, \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \qquad \Omega = \mathrm{const}. \tag{6.5}$$

Для безынерционного стержня в отсутствии распределенных внешних сил вектор $\mathbf{N}$ сохраняет постоянное значение

$$\mathbf{N}\,(s,t) = \mathbf{N}\,(t) = \mathrm{const}\,(s)\ . \tag{6.6}$$

Краевые условия примем в виде

$$s = 0: \qquad \mathbf{R}\,(0,t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}\,(0,t) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}'\,(0,t) = \boldsymbol{\tau}; \tag{6.7}$$

$$s = l: \qquad \mathbf{N}\,(l,t) = -a_1 F \boldsymbol{\tau} - a_2 F \mathbf{R}'\,(l,t) - a_3 m \ddot{\mathbf{R}}\,(l,t)\,, \tag{6.8}$$

$$\mathbf{M}(l,t) = L\,\mathbf{R}'(l,t)\,. \tag{6.9}$$

Здесь мы сохраняем только следящий момент, поскольку это едва-ли не единственный случай, который легко осуществляется экспериментально. Кроме того, все основные "неприятности", отмеченные во введении имеют место при действии следящего момента (6.9). В (6.8) включен инерционный член $m\ddot{\mathbf{R}}(l,t)$. Это означает, что к незакрепленному торцу стержня присоединено точечное тело с массой m.

В дополнение к интегралу Пуассона (6.4) имеются еще два очевидных интеграла

$$\mathbf{M}(s,t)\cdot\mathbf{N}(t) = A(t)\,, \tag{6.10}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{\Phi}(s,t)\cdot\mathbf{P}(s,t)\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^{T}(s,t)\cdot\mathbf{\Phi}(s,t) + \mathbf{R}'(s,t)\cdot\mathbf{N}(t) = H(t)\,. \tag{6.11}$$

Согласно (6.5) и (6.9) имеем

$$C_3\Omega\,\mathbf{R}'(l,t) + C_1\mathbf{R}'(l,t)\times\mathbf{R}''(l,t) = L\mathbf{R}'(l,t) \;\;\Rightarrow\;\; C_3\Omega = L\,, \quad \mathbf{R}''(l,t) = \mathbf{0}\,. \tag{6.12}$$

Введем естественный базис на упругой линии: $\mathbf{R}'$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b} = \mathbf{R}'\times\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к кривой, $\mathbf{b}$ — бинормаль, т.е.

$$\mathbf{R}''(s,t) = \frac{1}{\rho(s,t)}\,\mathbf{n}(s,t)\,, \qquad |\mathbf{n}| = 1\,, \quad \mathbf{b} = \mathbf{R}'\times\mathbf{n}\,. \tag{6.13}$$

Последнее равенство в (6.12) показывает, что кривизна упругой линии $1/\rho(l,t)$ на незакрепленном торце стержня равна нулю. С учетом (6.5) и (6.12) интегралы (6.10) и (6.11) можно переписать в виде

$$\frac{C_1}{\rho(s,t)}\,\mathbf{b}(s,t)\cdot\mathbf{N}(t) = L\,(T(l,t) - T(s,t))\,, \tag{6.14}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{C_1}{\rho^2(s,t)} = T(l,t) - T(s,t)\,, \qquad T(s,t) \equiv \mathbf{R}'(s,t)\cdot\mathbf{N}(t)\,, \tag{6.15}$$

где $T(s,t)$ — продольная сила в стержне.

Выражения векторов изгиба–кручения и момента (6.5) с учетом (6.12), (6.14) и (6.15) можно переписать в виде

$$\mathbf{\Phi}(s,t) = \frac{L}{C_3}\,\mathbf{R}'(s,t) + \frac{1}{\rho(0,t)}\sqrt{\frac{T(l,t) - T(s,t)}{T(l,t) - T(0,t)}}\;\mathbf{b}(s,t)\,, \tag{6.16}$$

$$\mathbf{M}(s,t) = L\,\mathbf{R}'(s,t) + \frac{C_1}{\rho(0,t)}\sqrt{\frac{T(l,t) - T(s,t)}{T(l,t) - T(0,t)}}\;\mathbf{b}(s,t)\,, \tag{6.17}$$

Кроме того, из (6.14) и (6.15) при $\rho^{-1}(s,t)$ не равном тождественно нулю следует, что

$$\frac{L}{2\rho(s,t)} = \mathbf{b}(s,t)\cdot\mathbf{N}(t)\,. \tag{6.18}$$

Из (6.14)–(6.17) видно сколь важную роль играет продольная сила в стержне. Таким образом, проекция уравнения моментов на $\mathbf{R}'$ дает нам интеграл Пуассона (6.4), проекция на $\mathbf{N}$ дает интеграл (6.10) и проекция на $\mathbf{\Phi}$ дает интеграл энергии (6.11).

Если векторы $\mathbf{R}'$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{\Phi}$ линейно независимы, т.е. если выполнено неравенство

$$\frac{1}{\rho(0,t)}\sqrt{\frac{T(l,t)-T(s,t)}{T(l,t)-T(0,t)}}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}\neq 0\,,$$

то уравнение моментов $\mathbf{M}'+\mathbf{R}'\times\mathbf{N}=\mathbf{0}$ выполнено полностью. Впрочем, проекция этого уравнения на нормаль $\mathbf{n}$ дает еще одно полезное тождество

$$\frac{3L}{2\rho^3(s,t)}+\frac{C_1}{\rho(0,t)}\sqrt{\frac{T(l,t)-T(s,t)}{T(l,t)-T(0,t)}}\,(\mathbf{R}'\times\mathbf{R}'')\cdot\mathbf{R}'''=0\,, \tag{6.19}$$

из которого видно, что при $L=0$ кручение упругой линии отсутствует.

Дальнейшее интегрирование уравнений нерастяжимого стержня в общем случае едва ли имеет смысл, т.к. даже уже полученные интегралы опираются на допущения типа: если кривизна не равна нулю тождественно, если продольная сила в стержне не постоянна и т.д. Поэтому в дальнейшем ограничимся анализом конкретных частных случаев.

Важно подчеркнуть следующее. Несмотря на то, что для нерастяжимого стержня получено большое количество частных результатов, тем не менее в общем случае не доказана даже разрешимость основных уравнений (6.1) при краевых условиях (6.7)–(6.9).

7 Эластика Эйлера. Нагружение следящей силой

Эластикой Эйлера принято называть задачу (6.1), (6.7)–(6.9) при $a_1=1$, $a_2=a_3=0$, $L=0$. Плоские формы равновесия в этой задаче хорошо изучены еще Л.Эйлером. Покажем, что равновесных конфигураций, отличных от плоских, не существует. Согласно (6.5) и (6.12) в эластике Эйлера для момента имеем

$$\mathbf{M}=C_1\,\mathbf{R}'\times\mathbf{R}''. \tag{7.1}$$

Если $\mathbf{M}=\mathbf{0}$, т.е. если $\mathbf{R}''=\mathbf{0}$, имеем только прямолинейную равновесную конфигурацию $\mathbf{R}=s\boldsymbol{\tau}$. Поэтому рассмотрим случай $\mathbf{R}''\neq\mathbf{0}$. Интеграл (6.10) принимает вид

$$\mathbf{M}(s,t)\cdot\mathbf{N}(t)=-C_1F(\mathbf{R}'\times\mathbf{R}'')\cdot\boldsymbol{\tau}=\mathbf{0}.$$

Это означает, что векторы $\mathbf{R}'(s)$, $\mathbf{R}''(s)$ и $\boldsymbol{\tau}$ лежат в одной плоскости. Поскольку $\mathbf{R}''(s)\neq\mathbf{0}$, то справедливо разложение

$$\mathbf{R}''(s)=\mu\boldsymbol{\tau}+\lambda\mathbf{R}'(s)=\mu\,[\,\boldsymbol{\tau}-(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{R}')\,\mathbf{R}'\,]\,,\qquad \mu\neq 0\,. \tag{7.2}$$

Уравнение моментов с учетом (7.1) дает

$$\mathbf{R}'\times[\,C_1\mathbf{R}'''-F\boldsymbol{\tau}]=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad C_1\mathbf{R}'''=F\boldsymbol{\tau}+q(s)\mathbf{R}'(s)\,,$$

т.е. вектор $\mathbf{R}'''$ также лежит в плоскости, натянутой на $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{R}'$. Если $\mathbf{R}'' \neq \mathbf{0}$, то для бинормали $\mathbf{b}$ можем написать

$$\mathbf{b} = \rho\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \rho\mu\mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau}, \tag{7.3}$$

где учтено (7.2). Дифференцируя (7.3) по s и вновь используя (7.2), получаем

$$\mathbf{b}' = (\rho\mu)'\mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau} + \rho\mu\mathbf{R}'' \times \boldsymbol{\tau} = \left[\,(\rho\mu)' - \rho\mu^2\,(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{R}')\,\right]\mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau}.$$

Проецируя это выражение на $\mathbf{b}$ с учетом (7.3) и учитывая, что $\mathbf{b}'$ ортогонален $\mathbf{b}$, т.к. $|\mathbf{b}| = 1$, получаем

$$(\rho\mu)' - \rho\mu^2\,(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{R}') = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b} = \mathrm{const}.$$

Итак, вектор бинормали к упругой линии постоянен не только по модулю, но и по направлению, т.е. равновесная конфигурация, если она существует и отлична от прямолинейной, является плоской.

Для вектора $\mathbf{R}'(s)$ имеем выражение

$$\mathbf{R}'(s) = \mathbf{Q}\,(\theta(s)\,\mathbf{b}\,)\cdot\boldsymbol{\tau} = \cos\theta\,\boldsymbol{\tau} + \sin\theta\,\mathbf{b}\times\boldsymbol{\tau},$$

т.к. $\mathbf{R}'$ всегда принадлежит плоскости, ортогональной $\mathbf{b}$ и, следовательно может поворачиваться только вокруг $\mathbf{b}$. Для угла нутации получаем известную задачу

$$C_1\,\theta'' + F\sin\theta = 0, \qquad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0. \tag{7.4}$$

Решение задачи (7.4) также хорошо известно: при $F < 0$, т.е. при растяжении имеем только тривиальное решение $\theta = 0$; при $F > 0$, т.е. при сжатии стержня, нетривиальные решения появляются при $F \geq \pi^2 C_1/4l^2$. Число дополнительных решений растет с ростом величины F. Таким образом, все множество решений в эластике Эйлера исчерпывается двухпараметрическим множеством тензоров поворота

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\,(\theta_k(s)\,\mathbf{b}), \qquad \mathbf{b} = \mathbf{Q}\,(\psi\boldsymbol{\tau})\cdot\mathbf{b}_0, \qquad \psi = \mathrm{const}(s), \tag{7.5}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$; n определяется величиной $F > 0$, $\theta_0 = 0$. Решение зависит от одного вектора $\mathbf{b}_0$: $|\mathbf{b}_0| = 1$, $\mathbf{b}_0\cdot\boldsymbol{\tau} = 0$ и одного параметра ψ, который может зависеть, например, от временеподобного параметра. Определение вектора положений по равенству $\mathbf{R}' = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\tau}$ не изменится, если вместо тензора (7.5) рассмотреть тензор

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\,(\theta_k\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{Q}\,(\varphi(s)\,\boldsymbol{\tau}).$$

Вычисляя для этого тензора вектор изгиба–кручения, получаем

$$\boldsymbol{\Phi} = \theta'\,\mathbf{b} + \varphi'\,\mathbf{R}' \quad \Rightarrow \quad \varphi' = 0,$$

что немедленно следует из (6.16). Поэтому (7.5) дает максимально полное выражение для тензора поворота в эластике Эйлера.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть $F > \pi^2 C_1/4l^2$, т.е. пусть F превышает эйлерову критическую силу. Тогда согласно вышесказанному имеем, как минимум, две равновесных конфигурации: прямолинейная и плоско–изогнутая. Считается, что прямолинейная конфигурация неустойчива и изогнутая — устойчива, хотя это последнее утверждение, строго говоря, никем не доказано. Обычно доказательства подменяются энергетическими рассуждениями, но они не вполне убедительны, т.к. хотя энергия и достигает минимума в изогнутой равновесной конфигурации, но этот минимум не изолирован, что хорошо видно из выражений (7.5): имеется не одна, а континуум равновесных конфигураций, т.е. налицо ситуация типа нейтрального равновесия.

Нагружение стержня торцевой следящей силой $(a_2=1,\ a_1=a_3=0,\ L=0.)$ мало отличается от эластики Эйлера по характеру исследования, но результаты анализа оказываются другими. Здесь также, как в эластике Эйлера, доказывается, что равновесные конфигурации могут быть только плоскими. Различие получается в задаче нахождения угла нутации θ. Вместо (7.4) получаем задачу

$$C_1\,\theta'' + F\sin(\theta - \theta(l)) = 0\,, \qquad \theta(0) = 0\,, \quad \theta'(l) = 0\,,$$

или после замены переменной $\psi = \theta - \theta(l)$

$$C_1\,\psi'' + F\sin\psi = 0\,, \qquad \psi(l) = 0\,, \quad \psi'(l) = 0\,. \tag{7.6}$$

Для функции $\psi(s)$ получили задачу Коши, а не краевую задачу типа (7.4). Известно, что задача Коши (7.6) имеет только нулевое решение $\psi(s) = 0$, т.е. $\theta(s) = \theta(l)$. Но при $s = 0$ угол θ равен нулю и, следовательно, он равен нулю при всех s. Таким образом, при нагружении стержня следящей силой имеем только прямолинейную равновесную конфигурацию.

8 Нагружение стержня мертвой силой и следящим моментом

Рассмотрим консольный стержень, нагруженный мертвой силой и следящим моментом, т.е. в (5.2)–(5.3) примем: $a_1 = 1$, $b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = b_3 = b_4 = 0$. Докажем, что в этом случае равновесная конфигурация (5.8) единственна. Будем рассматривать растяжимый стержень с учетом деформации поперечного сдвига. Обращая первое из соотношений (2.14) с учетом равенства $\mathbf{N}=-F\boldsymbol{\tau}$, получаем

$$\mathbf{R}' = \alpha\,\mathbf{m} - F\boldsymbol{\tau}/A_1\,, \qquad \mathbf{m} \equiv \mathbf{P}(s)\cdot\boldsymbol{\tau}\,, \qquad \alpha \equiv 1 + \left(\frac{F}{A_1} - \frac{F}{A_3}\right)\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\tau}\,. \tag{8.1}$$

Уравнение моментов принимает вид

$$\mathbf{M}' + \alpha F\,\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{m} = \mathbf{0}\,. \tag{8.2}$$

Для вектора изгиба–кручения имеем представление Пуассона

$$\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathbf{m})\,\mathbf{m} + \mathbf{m}\times\mathbf{m}' \quad\Rightarrow\quad \mathbf{M} = C_3\,(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\Phi})\,\mathbf{m} + C_1\,\mathbf{m}\times\mathbf{m}'\,. \tag{8.3}$$

Из второго выражения (8.3) получаем $\mathbf{M}\cdot\mathbf{m}' = 0$. Учитывая это равенство и проецируя (8.2) на $\mathbf{m}$, получаем интеграл Пуассона

$$\mathbf{M}'\cdot\mathbf{m} = (\mathbf{M}\cdot\mathbf{m})' - \mathbf{M}\cdot\mathbf{m}' = 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{M}\cdot\mathbf{m} = C_3\,\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\Phi} = C_3\,\Omega = \mathrm{const}. \tag{8.4}$$

По краевому условию $\mathbf{M}(l) = L\,\mathbf{m}(l)$ и (8.3)–(8.4) получаем $C_3\,\Omega = L$. Кроме того, из (8.3) получаем условие $\mathbf{m}'(l) = \mathbf{0}$.

Итак, получили

$$\mathbf{M} = L\,\mathbf{m} + C_1\,\mathbf{m}\times\mathbf{m}', \qquad \boldsymbol{\Phi} = \frac{L}{C_3}\,\mathbf{m} + \mathbf{m}\times\mathbf{m}', \qquad \mathbf{m}'(l) = \mathbf{0}. \tag{8.5}$$

Проецируя (8.2) на $\boldsymbol{\tau}$ и учитывая (8.5), получаем интеграл

$$L\,\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\tau} + C_1\,(\mathbf{m}\times\mathbf{m}')\cdot\boldsymbol{\tau} = L \quad\Rightarrow\quad \mathbf{m}(l)\cdot\boldsymbol{\tau} = 1 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{m}(l) = \boldsymbol{\tau}. \tag{8.6}$$

Первая часть первого из соотношений (8.6) следует, если (8.6) записать при $s = 0$. Обратим внимание, что последнее равенство в (8.6) справедливо только при $\mathbf{L} \neq 0$. Умножая (8.2) скалярно на $\boldsymbol{\Phi}$, получаем интеграл энергии, который с учетом (8.5)–(8.6) можно записать в виде

$$C_1\,|\mathbf{m}'|^2 = -F\,(1-\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\tau})\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{F}{A_1} - \frac{F}{A_3}\right)(1+\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\tau})\right]. \tag{8.7}$$

Записывая это выражение при $s=0$ и учитывая условие $\mathbf{m}(0)=\boldsymbol{\tau}$, получаем, что $\mathbf{m}'(0) = \mathbf{0}$. Подставляя первое из выражений (8.5) в (8.2), получаем задачу Коши

$$C_1\,\mathbf{m}\times\mathbf{m}'' + L\,\mathbf{m}' + \alpha F\,\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{m} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{m}(0) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{m}'(0) = \mathbf{0},$$

которая имеет единственное решение

$$\mathbf{m}(s) = \boldsymbol{\tau} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P}(s)\cdot\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}\,(\psi(s)\,\boldsymbol{\tau}). \tag{8.8}$$

Теперь по (8.1) получаем

$$\mathbf{R}' = \left(1 - \frac{F}{A_3}\right)\boldsymbol{\tau} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{R} = \left(1 - \frac{F}{A_3}\right)s\,\boldsymbol{\tau}.$$

В результате пришли к равновесной конфигурации (5.8). Поскольку при этом использовались только необходимые условия, то этим доказывается единственность конфигурации (5.8).

В данной задаче можно отметить два любопытных обстоятельства. Первое. Когда мы решаем задачу при краевых условиях $\mathbf{N}(l) = -F\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}(l) = L\,\mathbf{P}(l)\cdot\boldsymbol{\tau}$, то можно ожидать, что из решения при $L \neq 0$ при предельном переходе $L \to 0$ мы получим решение задачи $\mathbf{N}(l) = -F\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}(l) = \mathbf{0}$. Однако это не совсем так. Если $L \neq 0$, то решение задачи единственно. Если же $L = 0$, то мы имеем дело с эластикой Эйлера и неединственными решениями. Разгадка "парадокса" в том, что при сколь–угодно малом $L \neq 0$, мы имеем по (8.6) равенство $\mathbf{m}(l) = \boldsymbol{\tau}$, которое не обязано выполняться при $L = 0$. Оно и не выполняется в эластике Эйлера. Второе обстоятельство объяснить труднее и оно заключается в следующем. Вообразим себе, что консольный стержень нагружен мертвой силой $\mathbf{N} = -F\boldsymbol{\tau}$, где $F > \pi^2 C_1/4l^2$, т.е. F больше эйлеровой критической. В этом случае имеются, как минимум, две равновесных конфигурации: прямолинейная и изогнутая. Рассмотрим искривленную равновесную конфигурацию. Допустим, что к незакрепленному торцу в дополнение к мертвой силе прикладывается сколь–угодно малый следящий момент. При этом равновесие нарушается и стержень приходит в движение. Если стержень был изогнут достаточно сильно, то близких равновесных конфигураций не существует. Поэтому возможна альтернатива: либо а) под действием сколь–угодно малого момента стержень перескочет в далеко отстоящую прямолинейную равновесную конфигурацию, что интуитивно мало вероятно, либо б) стержень придет в безостановочное движение. В последнем случае важно было бы установить характер этого движения: затухающее (стремление к прямолинейной равновесной конфигурации), нарастающее по амплитуде (неустойчивость) или, наконец, стационарные вращения. Задачи подобного типа до сих пор не исследованы.

9 Стационарные движения в эластике Эйлера

Известна роль, которую играют, например, в динамике твердого тела стационарные движения. Покажем, что они возможны и в динамике упругих стержней. В п.7 было найдено общее выражение для тензора поворота — формула (7.5) — в эластике Эйлера. Рассмотрим динамическую задачу для нерастяжимого упругого стержня

$$\mathbf{N}' = \rho S \ddot{\mathbf{R}}\,, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}\,, \quad \mathbf{M} = C_1 \boldsymbol{\Phi} + (C_3 - C_1)\, \mathbf{R}' \, (\mathbf{R}' \cdot \boldsymbol{\Phi})\,. \tag{9.1}$$

Стационарные движения определяются тензором поворота вида

$$\mathbf{P}(t,s) = \mathbf{Q}(\psi(t)\,\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{Q}(\theta(s)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi(t)\,\boldsymbol{\tau})\,, \qquad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0\,. \tag{9.2}$$

Вектор изгиба–кручения $\boldsymbol{\Phi}$, отвечающий (9.2), имеет вид

$$\boldsymbol{\Phi} = \theta'(s)\, \mathbf{Q}(\psi(t)\,\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{e} \equiv \theta'(s)\, \mathbf{e}_*(t)\,, \qquad \mathbf{e}_*(t) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0\,. \tag{9.3}$$

Согласно (9.1) имеем

$$\mathbf{R}' = \cos\theta\, \boldsymbol{\tau} + \sin\theta\, \mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' \cdot \mathbf{e}_* = 0\,. \tag{9.4}$$

Имеем очевидные формулы

$$\dot{\mathbf{e}}_* = \dot{\psi}\, \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{e}_*\,, \qquad \ddot{\mathbf{e}}_* = \ddot{\psi}\, \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{e}_* - \dot{\psi}^2 \mathbf{e}_*\,.$$

Поскольку ищутся стационарные движения, то примем, что

$$\dot{\psi} = \omega = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{e}}_* = -\omega^2 \mathbf{e}_*\,, \qquad \ddot{\mathbf{R}}' = -\omega^2 \sin\theta\, \mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau}\,. \tag{9.5}$$

Дифференцируя первое из уравнений (9.1) по s и используя (9.2)–(9.5), получаем

$$\mathbf{N}'' = \rho S \omega^2 \sin\theta\, \mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau}\,, \qquad \mathbf{N}'|_{s=0} = \mathbf{0}\,. \tag{9.6}$$

Последнее из этих условий вытекает из первого уравнения системы (9.1)

Из (9.6) и краевого условия $\mathbf{N}(l) = -Q\boldsymbol{\tau}$ следуют два интеграла

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_* = 0\,, \qquad \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} = -Q\,.$$

Следовательно, общее выражение для $\mathbf{N}(s,t)$ имеет вид

$$\mathbf{N}(s,t) = -Q\,\boldsymbol{\tau} + T(s,t)\,\mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau}\,.$$

Подставляя это выражение в (9.6), получаем

$$T''(s,t) = -\rho S\omega^2 \sin\theta(s)\,. \tag{9.7}$$

Интегрируя это соотношение с учетом краевых условий, получаем выражение

$$T(s,t) = \rho S\omega^2 \left[\int\limits_0^l ds_1 \int\limits_0^{s_1} \sin\theta(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^s ds_1 \int\limits_0^{s_1} \sin\theta(\xi)\,d\xi\right],$$

из которого видим, что на самом деле поперечная сила $T(s,t)$ должна зависеть только от s. Итак, окончательно имеем

$$\mathbf{N}(s,t) = -Q\,\boldsymbol{\tau} + T(s)\,\mathbf{e}_*(t) \times \boldsymbol{\tau}\,, \qquad T''(s) = -\rho S\omega^2 \sin\theta(s)\,. \tag{9.8}$$

Используя полученные выше выражения, второму из уравнений (9.1) придаем вид

$$C_1\theta'' + \cos\theta\, T + Q\,\sin\theta = 0\,. \tag{9.9}$$

Получили систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Краевые условия для нее имеют следующий вид

$$s = 0: \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad T'(0) = 0;$$
$$s = l: \qquad \theta'(l) = 0 \;\;(\Leftrightarrow\; \mathbf{M}(l) = \mathbf{0}\;), \qquad T(l) = 0 \;\;(\Leftrightarrow\; \mathbf{N}(l) = -Q\,\boldsymbol{\tau}\;)\,. \tag{9.10}$$

Исключая из (9.9) и (9.10) поперечную силу $T(s)$, получаем нелинейную спектральную задачу Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{d^2\theta}{d\xi^2}\right] + 2q\,\frac{d^2\mathrm{tg}\,\theta}{d\xi^2} - \lambda^2\sin\theta = 0\,, \qquad 0 < \xi < 1\,, \tag{9.11}$$

где

$$2q = \frac{Q\,l^2}{C_1}\,, \quad \lambda^2 = \frac{\rho S\omega^2 l^4}{C_1}\,, \quad s = \xi l\,, \quad \theta = \theta(\xi)\,. \tag{9.12}$$

Краевые условия для (9.11) следуют из (9.10) и (9.9)

$$\xi = 0: \qquad \theta(0) = 0\,, \qquad \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\cos\theta}\,\frac{d^2\theta}{d\xi^2}\right] + 2q\,\frac{d\,\mathrm{tg}\,\theta}{d\xi} = 0;$$
$$\xi = l: \qquad \frac{d\theta}{d\xi} = 0\,, \qquad \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 2q\,\sin\theta = 0\,. \tag{9.13}$$

Стационарные вращения консольного стержня, нагруженного мертвой силой, существуют, если существуют такие $\lambda^2 > 0$, при которых задача (9.11), (9.13) имеет нетривиальное решение $\theta(\xi) \neq 0$. Строгое доказательство разрешимости задачи

(9.11)–(9.13) в настоящее время отсутствует. Приведем ее асимптотический анализ, справедливый для относительно малых углов $\theta(\xi)$. Введем обозначения

$$\theta(\xi) = \mu\gamma(\xi,\mu), \qquad \mu = \max_{\xi\in[0,1]} |\theta(\xi)|, \qquad |\gamma| \le 1. \tag{9.14}$$

Будем искать малые решения задачи (9.11)–(9.13) в виде разложений

$$\gamma(\xi,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(\xi)\,\mu^k, \qquad \lambda^2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\mu^k. \tag{9.15}$$

Подставляя (9.15) в (9.11) и (9.13), приходим к задаче

$$\left[\gamma^{IV} + 2q\gamma'' - \lambda^2\gamma\right] + \mu^2\left[\frac{\operatorname{tg}\mu\gamma}{\mu}\left(2\gamma'\gamma''' + \gamma''^2\right) + \gamma'^2\gamma'' - \frac{\lambda^2}{\mu^2}\left(\frac{\sin\mu\gamma}{\mu} - \gamma\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4q\,\sin\mu\gamma}{\mu\,\cos^2\mu\gamma}\gamma'^2\right] + \mu^4\left[\frac{2\operatorname{tg}^2\mu\gamma}{\mu^2}\gamma'^2\gamma''\right] = 0, \qquad f' \equiv df/d\xi, \tag{9.16}$$

$$\xi = 0: \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma''' + 2q\gamma' + \mu^2\left[\frac{\operatorname{tg}\mu\gamma}{\mu}\gamma'\gamma'' + 2q\,\frac{1-\cos\mu\gamma}{\mu^2\cos\mu\gamma}\gamma'\right] = 0;$$

$$\xi = 1: \quad \gamma'(1) = 0, \quad \gamma'' + 2q\gamma + 2q\mu^2\left[\frac{\sin\mu\gamma - \mu\gamma}{\mu^3}\right] = 0. \tag{9.17}$$

В (9.16)–(9.17) разложения всех выражений, стоящих в квадратных скобках начинаются с членов порядка $O(1)$. Для главных членов асимптотических разложений (9.15), получаем линейную спектральную задачу

$$\gamma_0^{IV} + 2q\gamma_0'' - a_0\gamma_0 = 0,$$

$$\xi = 0: \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_0''' + 2q\gamma_0' = 0; \qquad \xi = 1: \quad \gamma_0' = 0, \quad \gamma_0'' + 2q\gamma_0 = 0. \tag{9.18}$$

Эта спектральная задача хорошо изучена.

Список литературы

[1] Ляв А. Математическая теория упругости. М.-Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.

[2] Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга // Депонировано ВИНИТИ N1912-В87 Деп., 20 с.

[3] Zhilin P.A. Mechanics of Deformable Directed Surfaces. Int. J. Solids Structures, 1976, vol. 12, pp.635-648.

[4] Жилин П.А. Основные уравнения неклассической теории оболочек // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ, N 386, 1982, с.29-46.

[5] Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики твердого тела // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ, 1992, N 443, с.100-121.

[6] Zhilin P.A. A New Approach to the Analisis of Free Rotations of Rigid Bodies. ZAMM Z. angew. Math. Mech. 76 (1996), 4. pp.187-204.

[7] Жилин П.А., Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ. 1994. N 448. с.47-56.

[8] Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.

[9] Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1961. 339 с.

[10] Циглер Г. Основы теории упругой устойчивости. М.: МИР, 1971. 192 с.