

# ВЕКТОРЫ И ТЕНЗОРЫ ВТОРОГО РАНГА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

П.А. ЖИЛИН

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>6</b>
<b>1 Введение</b>	<b>7</b>
1.1 Вводные замечания . . . . .	7
1.2 Основные этапы развития механики . . . . .	8
1.3 Механика и высшее техническое образование . . . . .	13
<b>2 Ретроспективный взгляд на тензорное исчисление</b>	<b>15</b>
2.1 Тензорное исчисление или тензорный язык? . . . . .	15
2.2 Арифметический подход к тензорному исчислению . . . . .	17
2.3 Прямой тензорный язык . . . . .	22
<b>3 Векторы в трехмерном пространстве</b>	<b>26</b>
3.1 Системы отсчета и системы координат. Движения . . . . .	26
3.2 Скаляры или тензоры нулевого ранга . . . . .	33
3.3 Полярные и аксиальные векторы . . . . .	35
3.4 Основные операции с векторами . . . . .	39
3.5 Примеры . . . . .	46
3.6 Базис. Взаимный базис. Замена базиса . . . . .	50
3.7 Обобщенные символы Кронекера . . . . .	60
3.8 Векторные функции скалярного аргумента . . . . .	66
3.8.1 Дифференцирование векторных функций . . . . .	66
3.8.2 Кривые в трехмерном пространстве . . . . .	70
3.9 Криволинейные системы координат . . . . .	73
3.9.1 Общие соотношения . . . . .	73
3.9.2 Дериационные формулы. Ковариантное дифференцирование	76
3.9.3 Ортогональные системы координат . . . . .	78
3.9.4 Цилиндрическая система координат . . . . .	79
3.9.5 Сферическая система координат . . . . .	80
3.10 Скалярные функции векторного аргумента . . . . .	81

<b>4</b>	<b>Тензоры второго ранга</b>	<b>87</b>
4.1	Необходимость введения тензоров второго ранга . . . . .	87
4.2	Прямое произведение векторных пространств . . . . .	90
4.3	Тензорное произведение векторных пространств . . . . .	91
4.4	Операции с тензорами второго ранга . . . . .	94
4.5	Симметричные и антисимметричные тензоры . . . . .	98
4.6	Координаты тензора второго ранга . . . . .	105
4.7	Линейные функции векторов и тензоры второго ранга . . . . .	107
4.8	Ортогональные тензоры . . . . .	113
4.9	Теорема Эйлера . . . . .	121
4.10	Правило квазикоммутативности поворотов . . . . .	125
4.11	Спектральное и полярное разложение тензоров . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Кинематика: описание движений</b>	<b>133</b>
5.1	Системы отсчета и системы координат . . . . .	133
5.2	Кинематика точки. Траектория. Скорость и ускорение . . . . .	136
5.3	Частные случаи движения материальной точки . . . . .	140
5.3.1	Прямолинейное движение . . . . .	140
5.3.2	Равномерное движение по прямой . . . . .	142
5.3.3	Колебательное движение материальной точки по прямой	143
5.3.4	Сложное движение материальной точки вдоль двух ортогональных меж,	
5.3.5	Движение материальной точки по окружности . . . . .	147
5.3.6	Равномерное движение материальной точки по спирали .	148
5.4	Траекторное описание движения материальной точки . . . . .	149
5.4.1	Пример 1. Движение частицы по окружности — траекторное описание	150
5.4.2	Пример 2. Полет камня в поле силы тяжести . . . . .	152
5.5	Движение спутника Земли по круговой орбите . . . . .	156
5.6	Движение тела в центральном поле тяготения . . . . .	158
5.7	Абсолютно твердое тело . . . . .	163
5.8	Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела . . . . .	167
5.9	Тензор поворота и вектор поворота . . . . .	174
5.10	Вектор поворота . . . . .	179
5.11	Вектор малого поворота . . . . .	183
5.12	Неоднозначность суждений о векторе поворота . . . . .	184
5.13	Плоские движения твердого тела . . . . .	186
5.14	Теорема о представлении тензора поворота . . . . .	189
5.15	Дифференцирование тензоров второго ранга . . . . .	194
5.16	Угловая скорость . . . . .	195

5.17	Тензор спина и вектор угловой скорости . . . . .	197
5.18	Определение поворота по угловой скорости . . . . .	201
5.19	Вращение вокруг фиксированной оси . . . . .	204
5.20	Связь угловой скорости с вектором поворота . . . . .	208
5.21	Угловая скорость композиции поворотов . . . . .	212
5.22	Распределение скоростей и ускорений в абсолютно твердом теле	217
5.23	Качение цилиндра по плоскости . . . . .	221
5.24	Качение конуса по конусу . . . . .	223
5.24.1	Классическое решение . . . . .	224
5.24.2	Альтернативное решение . . . . .	225
5.24.3	Определение поворотов в классическом решении . . . . .	230
5.25	Шарнир Гука . . . . .	231
5.26	Сложное движение материальной точки . . . . .	237
5.27	Сложные движения абсолютно твердого тела . . . . .	241
5.28	Относительные повороты . . . . .	243
5.29	Замена систем отсчета . . . . .	245
5.30	Принцип материальной объективности . . . . .	253
5.31	Движущиеся среды. Материальная производная . . . . .	263

**Литература****269**

# Предисловие

Книга является первой частью слегка обработанного конспекта лекций по курсу теоретическая механика, который читается автором студентам физико-механического факультета. Автору приходилось учитывать противоречивые требования. С одной стороны, это современный курс повышенного типа, читаемый будущим инженерам-механикам-исследователям на протяжении второго, третьего и четвертого семестров. С другой стороны, при чтении курса автор мог рассчитывать только на то, что студенты владеют математикой в объеме школьной программы. Отсюда предельно упрощенный стиль изложения. Кроме того, лекции по основам векторного исчисления читались автором параллельно с лекциями по теоретической механике, т.е. материал глав 1 — 4 и главы 5 книги излагался параллельно. Поэтому не следует удивляться, что относительно сложный материал главы 4 сменяется элементарным изложением начала главы 5. Несмотря на учебный характер монографии, она содержит и новые результаты, полученные в последние десять лет.

Автор многим обязан своему Учителю — Анатолию Исаковичу Лурье. Именно под влиянием Учителя формировалось научное мировоззрение автора, его любовь к механике и приверженность к прямому тензорному языку. Автор выражает благодарность профессору В.А. Пальмову за неизменную научную поддержку, в том числе и при работе над этим курсом. Автор благодарен академику РАН Н.Ф. Морозову, профессору Д.А. Индейцеву и профессору П.Е. Товстику за помощь, важность которой может оценить только сам автор.

Наконец, автор должен выразить глубокую благодарность ЗАО АКИБ “Почтобанк” (г. Пермь) за финансирование издания данной книги.

Разумеется, ответственность за все неточности и другие недостатки данной книги полностью лежит на авторе.

# Глава 1

## Введение

### 1.1 Вводные замечания

Представляемая вниманию читателя книга является первой частью полного курса по теоретической механике. Автор видел свою задачу в том, чтобы на общедоступном языке изложить основные понятия и фундаментальные законы современной рациональной механики, а также показать, что в настоящее время механика динамично развивается и расширяет сферу своего влияния. В минувшем столетии механика испытала как взлеты, так и серьезные затруднения. С одной стороны, механике принадлежит выдающаяся роль в развитии современной техники. С другой стороны, механика оказалась неспособной дать удовлетворительное описание целого ряда явлений микромира. В результате сложилось мнение об ограниченности механики, хотя причины упомянутой ограниченности долго оставались невыясненными. В данном курсе автор надеется показать, что механика уже преодолела затянувшийся кризис. Однако для этого необходимо более четко вводить все исходные понятия и формулировать основные законы. Главное изменение в механике связано с введением спинорных движений и переходом на фундамент эйлеровой механики, являющейся мощным развитием ньютоновской механики. Автор уверен, что молодое поколение станет свидетелем вторжения механики в ранее недоступные для нее области физики, включая электричество и магнетизм, а также атомную физику.

Для достижения поставленной цели совершенно необходимо, чтобы читатель свободно владел векторно-тензорным языком, причем не только на формальном уровне, как это часто имеет место при подмене образования обучением, но на уровне интуитивных образов. Изучающий должен видеть, как живут реальные объекты, и в какой мере их свойства отражены в используемых для их описания тензорных образах. По этой причине весь этот вводный

том посвящен векторно-тензорному языку и может изучаться независимо от остальной части курса. Важность усвоения векторного языка нельзя недооценивать. В книгу включен материал, владение которым является обязательным для будущих инженеров-механиков-исследователей и крайне желательным для всех, получающих техническое образование. Книга вполне пригодна для самостоятельного изучения. По существу, материал книги составляет краткий курс векторного и тензорного исчисления, поскольку кинематика не только является удобным объектом для освоения тензорного языка, но и позволяет естественным образом ввести ряд важных идей, например основную идею теории непрерывных групп. Правда, некоторые вопросы, например теория симметрии тензоров, будут изложены только во второй части курса при изучении тензоров инерции. Несмотря на элементарность используемого языка, в книге излагаются вопросы, которые, как правило, выпадают из учебников, но крайне важны для инженеров и физиков. В частности, в книге проводится строгое различие между понятиями системы отсчета и системы координат. Видимо, впервые дается строгое определение аксиальных векторов и тензоров. Новым является изложение теории поворотов (спинорных движений) твердых тел. Доказана новая теорема о представлении тензора поворота, которая включает в себя все существующие представления тензора поворота и добавляет к ним новые. Новым является изложение теоремы об угловой скорости композиции поворотов. Дается более точное изложение замены системы отсчета и уточняется формулировка принципа материальной объективности. При изложении кинематики подробно рассматриваются прикладные задачи, в том числе и классические. Однако получаемые решения, как правило, являются более полными, нежели приводимые в учебниках. Например, впервые приведено полное решение старой задачи о шарнире Гука, который известен всем автомобилистам.

## 1.2 Основные этапы развития механики

*Этот пункт введения может быть пропущен теми, кто хочет ограничиться изучением только данного тома.*

Механика, наряду с математикой, является древнейшей и наиболее разработанной рациональной наукой, направленной на исследование природных и техногенных явлений. Решения первых задач механики восходят к Архимеду. Достаточно вспомнить знаменитый принцип рычага Архимеда, закон Архимеда о телах, погруженных в жидкость и т.д. Современная рациональная механика начала развиваться после появления трудов Галилео Галилея, Я.

Бернулли, И. Бернулли, Х. Гюйгенса и др. Новый импульс к развитию механики был дан И. Ньютоном, который определил механику как науку первых принципов. До Ньютона механика являла собой обширный набор частных результатов, относящихся к решению конкретных задач и мало связанных между собой. Более того, наличие каких-либо связей между этими задачами даже не предполагалась. По Ньютону механика должна быть построена на основе первых принципов, формулируемых в виде аксиом. Все остальное должно следовать из этих аксиом. В качестве возможных аксиом И. Ньютон сформулировал три знаменитых ныне закона. Вообще говоря, сам Ньютон считал, что этих законов недостаточно и нужны дополнительные законы. После провозглашения Ньютоном программы построения механики на основе первых принципов, все последующие исследования стали концентрироваться в указанном направлении. В результате произошло быстрое становление механики как самостоятельной фундаментальной науки. Реализация программы Ньютона принадлежит, главным образом, Леонарду Эйлеру. Прежде всего, Л. Эйлер перевел механику на язык дифференциальных уравнений и разработал теорию их интегрирования. К 1765 году была построена наука, которая в настоящее время известна под именем ньютоновской механики. Л. Эйлер был создателем многих разделов механики и математики. В частности, он был создателем теории тонких упругих стержней. Именно в этой теории впервые отчетливо проявилась принципиальная ограниченность ньютоновской механики, хотя в замаскированной форме эта неполнота присутствовала уже в динамике абсолютно твердого тела — еще одном разделе механики, впервые разработанном Л. Эйлером. Здесь уместно напомнить, что Я. Бернулли, после вывода уравнений равновесия гибких нитей (1694),<sup>1</sup> вплоть до своей смерти в 1705 году, безуспешно пытался вывести уравнение изгиба стержня. Эта задача, как бы по наследству, перешла к Л. Эйлеру. Даже Эйлеру понадобилось почти столетие, чтобы выяснить истинную причину неудачи Я. Бернулли. И только в 1771 году Л. Эйлер установил, что ньютоновская механика принципиально неполна. Заметим, что ньютоновская механика — это механика трансляционных движений, управление которыми осуществляется силами. Но в Природе существует еще один тип движения (спиновое движение), которое не сводится к трансляционному. Соответственно, наряду с силами, в механике необходимо рассматривать еще один тип воздействий, а именно моменты, которые в общем случае не сводятся к понятию момента

---

<sup>1</sup>Это было первое дифференциальное уравнение в истории науки. Уравнения с частными производными также впервые появились в механике: уравнение поперечных колебаний струны (Ж. Даламбер, 1749) и уравнения гидромеханики (Л. Эйлер, 1755).



силы. Поэтому *в механике, помимо уравнения баланса сил, необходимо постулировать еще один закон — уравнение баланса моментов*. Собственно, этот закон был открыт еще Архимедом в форме принципа рычага. Известно множество попыток доказать принцип рычага на основе уравнения баланса сил. Видимо, последняя попытка такого рода была предпринята Лагранжем уже после смерти Эйлера. Лагранж полагал, что ему удалось доказать принцип рычага. Отсюда следовало, что уравнение баланса моментов может быть доказано в рамках ньютоновской механики. Поэтому Ж. Лагранж считал, что нет нужды выдвигать дополнительный постулат. Эта ошибка Лагранжа задержала развитие механики, по меньшей мере, на столетие и вызвала глубокие негативные последствия в современной теоретической физике. Возвращаясь к Л. Эйлеру, отмечаем, что в не вполне осознанной форме Эйлер использовал уравнение баланса моментов еще раньше, при выводе уравнений динамики твердого тела. Примерно так же поступали многие исследователи при использовании принципа рычага, в правильности которого, разумеется, никто не сомневался. Однако в теории стержней подобный прием не срабатывал. Напомним, что в то время теория напряжений в трехмерных средах еще не существовала. Стержень рассматривался, как упругая линия, лишенная толщины. Поэтому ввести момент как момент силы было невозможно, и его пришлось ввести как самостоятельную сущность. В 1776 году Л. Эйлер дает окончательную формулировку фундаментальных законов механики в виде двух независимых постулатов: законов динамики Эйлера. Глубина и мощь эйлеровой механики была полностью осознана только во второй половине XX-го века. Объясняется это просто. Возможности даже ньютоновой механики столь велики, что она позволяет решать огромное множество важных теоретических и практических задач. Ограниченность ньютоновой механики существенно проявляется только при описании явлений микромира. По этой причине основное внимание уделялось развитию именно ньютоновской механики. Удобную форму представления основных уравнений ньютоновской механики, применительно к ограниченному классу задач, разработал Ж. Лагранж. Несмотря на свою ограниченность, схема Лагранжа нашла широкое применение при анализе как теоретических, так и практических проблем. Достоинство схемы Лагранжа состоит в ее краткости и легкости в изучении. Как известно, достоинства при их необоснованном продолжении легко превращаются в недостатки. Так и произошло с механикой Лагранжа. Многие забыли, что лагранжева форма механики — это всего лишь красивая одежда для некоей части механики. И эта одежда скрыла истинное содержание механики. Далеко идущее развитие схемы Лагранжа

было предложено У.Р. Гамильтоном в работе, опубликованной в 1834 году. Гамильтонов формализм нашел широкое применение в квантовой механике. Подход Лагранжа–Гамильтона пользуется большой популярностью у математиков, но в классической механике так и не привел к каким-либо существенно новым результатам. Дальнейшее развитие механики связано с построением механики сплошных сред, в которой гамильтонов формализм в общем случае не применим. Начало этому направлению дали исследования Л. Эйлера по гидромеханике (1755) и теории стержней (1771–1776). В 1822 году О. Коши разрабатывает линейную теорию упругости. Дальнейший прогресс в развитии механики практически полностью связан с построением механики сплошных сред. В фундаментальном плане XIX-й век отметился формулировкой двух фундаментальных законов, получивших названия первого и второго законов термодинамики. Первый закон термодинамики или уравнение баланса энергии был сформулирован Дж. Грином в 1839 году. Вторым законом термодинамики или неравенство производства энтропии рождался в великих муках, имел множество формулировок и, наконец, утвердился в механике в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема–Трусделла. ***Два закона динамики Эйлера и два начала термодинамики составили каркас, внутри которого и строится современная механика.*** Важно подчеркнуть, что упомянутый каркас не определяет конкретных моделей механических систем, создание которых равносильно решению проблемы замыкания отмеченной выше системы уравнений. Иными словами, необходимы дополнительные уравнения, которые принято называть определяющими и которые устанавливают связи между основными переменными, входящими в фундаментальные законы. Типичными примерами определяющих уравнений в механике являются закон всемирного тяготения и обобщенный закон Гука. Долгое время считалось, что установление определяющих уравнений является задачей экспериментальной механики. Это правильно в том смысле, что эксперимент является неустранимым звеном при построении определяющих уравнений. Тем не менее, в настоящее время уже ясно, что построение определяющих уравнений является теоретической проблемой, которая принципиально не может быть решена методами экспериментальной механики. Строгая теория определяющих уравнений была разработана только во второй половине минувшего столетия. Как уже отмечалось, спинорные движения и новые законы динамики были введены Эйлером в период с 1766г. по 1783г., когда он вновь жил и работал в Санкт-Петербурге. Странно, но эти важнейшие работы Л. Эйлера, изданные на латинском языке в Вестнике Санкт-Петербургской академии наук, до сих пор не переведены ни на один другой язык и долго оставались

неизвестными большинству ученых. Тем не менее, мысль о необходимости введения спинорных движений приходила в голову многим ученым, особенно в связи с попытками построить теорию электромагнетизма. Первая такая попытка была предпринята Мак-Келлогом в 1839 году. Однако он исходил из неверного представления о спинорном движении как роторе вектора скорости. Идея о необходимости введения спинорных движений ясно выражена в вербальной форме у Дж. Максвелла, но реализовать эту идею Максвелл не успел. На стыке XIX-го и XX-го веков о необходимости введения спинорных движений говорили лорд Кельвин (в связи с проблемами электромагнетизма) и Х. Лоренц (в связи с объяснением аномального эффекта Зеемана). В кинематику сплошных сред спинорные движения впервые были введены П. Дюгемом (1893). В относительно полной, хотя и не совершенной, форме спинорные движения в механику сплошных сред были введены Э. и Ф. Коссера (1906, 1907, 1909). Поэтому книга [91] считается началом теории микрополярных сред, т.е. сред, частицы которых обладают как трансляционными, так и вращательными степенями свободы. Тем не менее, и эта книга оказалась невостребованной учеными того времени, поскольку в ней отсутствовали новые приложения, а приложения к теории стержней, пластин и оболочек казались не достаточно убедительными. Трехмерные теории микрополярных сред начали интенсивно развиваться только в последние сорок лет, когда учет независимых вращательных степеней свободы оказался необходимым в теории жидких кристаллов и теории ферромагнитных материалов.

Заключая этот пункт, отмечаем, что современная механика обладает огромными возможностями, которые должны стать достоянием не только относительно небольшого числа теоретиков, но и широкого круга научных сотрудников и инженеров. Важно осознать, что механика это не теория каких бы то ни было конкретных явлений. Механика — это метод исследования Природы. Ни один из фундаментальных постулатов механики принципиально не может быть ни установлен, ни опровергнут опытным путем. Именно поэтому пределы применимости механики, совпадают с пределами применимости классической логики. Все объекты в механике определены как математические структуры, а математика является основным языком, используемым в механике. Вместе с тем, язык, т.е. математика, никоим образом не определяет содержания механики как науки. Поэтому, вопреки устоявшейся моде, при изложении механики следует избегать излишнего математизирования. Что касается собственно учебников по теоретической механике, то они должны претерпеть существенные изменения, связанные с переходом на фундамент эйлеровой механики.

### 1.3 Механика и высшее техническое образование

В настоящее время механика лежит в основе расчетов на прочность, колебания и устойчивость всех конструкций и строительных сооружений. Уже поэтому ее роль в подготовке инженеров чрезвычайно велика. Но этим не исчерпывается значение механики. Можно утверждать, что механика составляет стержень всего технического образования, если, конечно, образование не путать с обучением.

В подтверждение сказанному обратимся к урокам истории. К началу XIX века в России сформировалось слаборазвитое школьное образование, высшее образование было представлено двумя молодыми университетами, а система высшего технического образования не существовала вовсе. Отставание России в области образования от ведущих стран мира измерялось многими столетиями. В то же время, в геополитическом отношении Россия являлась активнейшим участником общеевропейского процесса. Поэтому преодоление научно-технического отставания России стало жизненной необходимостью. И, как всегда в истории России, времени на это было не дано. Именно в таких условиях принималось решение о развитии в России собственной системы высшего технического образования. При этом Россия не могла использовать пути, по которому шло становление высшего образования в европейских странах, поскольку для этого требовались необозримо большие сроки. В России был реализован принципиально новый проект высшего технического учебного заведения, который, в конечном счете, стал образцом для всего мира. Здесь не место для обсуждения замечательных особенностей этого проекта. Достаточно напомнить, что к 1960 году высшее техническое образование в России стало одним из лучших в мире, хотя и в других странах оно также бурно развивалось. Важнейшей особенностью российского вуза являлся упор на механику и механические дисциплины. Дело здесь не только в том, что механика является основой многих технических специальностей. Механика играет важнейшую роль в самом процессе образования, поскольку это единственная (остающаяся таковой и поныне) рациональная наука первых принципов, в которой многообразные проблемы техники и строительства рассматриваются дедуктивным методом на основе немногих начальных принципов. Именно механика позволяет будущим инженерам активно овладеть основными математическими понятиями, ибо только в механике имеется точное, почти взаимно однозначное, соответствие между абстрактными символами и реальными объектами. Еще Т. Гобс говорил, что понимание — это способность за символами видеть реальные объекты. Именно в развитии этой способности и

проявляется роль механики в техническом образовании. И именно поэтому российские инженеры всегда славились органичным сочетанием интуитивного мышления с достаточно высокой математической подготовкой. При этом важно понимать, что отнюдь не математика является движущей силой в механике. Наоборот, именно механика являлась и является основным поставщиком новых объектов и моделей для математики.

К сожалению, в настоящее время механика в значительной мере утратила свои образовательные функции и проявилось это в том, что в последние четыре десятилетия сформировалась тенденция к значительному сокращению объема механики в образовательных программах технических вузов и университетов всего мира. В существующих учебниках практически не обсуждаются основные понятия (пространство, время, системы отсчета, силы, моменты, энергия и т.д.) и фундаментальные принципы механики, последовательное изложение которых требует достаточно много времени. Ясно прослеживается стремление авторов учебников торопливо упомянуть основные принципы и поскорее перейти к изложению решений конкретных задач, ибо именно в решении конкретных проблем заключены сердцевина и стержень всей механики как науки. Именно здесь сосредоточены наиболее блистательные достижения. Поэтому изложение решений конкретных проблем является наиболее сильной стороной существующих книг по механике. Но акцент на решении конкретных проблем и пренебрежение изложением основных принципов механики ведут к двум негативным следствиям. Во-первых, это ведет к подмене образования обучением, т.е к откату на несколько столетий назад и возврату к традициям университетов средних веков. Во-вторых, это ведет к неправильному использованию основных принципов механики в нетрадиционных и нетривиальных ситуациях, например, при описании закономерностей микромира. В результате чего сложилось мнение о том, что механика имеет ограниченную сферу применения и, следовательно, не является фундаментальной наукой со всеми вытекающими отсюда следствиями. Для России снижение роли механики в техническом образовании чревато разрушением всей системы технического образования. Только очень богатые страны могут позволить себе пренебречь теоретическими идеями и создавать технические конструкции на основе натурного эксперимента.

При написании этой книги автор исходил из убеждения, что в техническом образовании альтернативы механике не существует. При этом механика рассматривается как фундаментальная наука первых принципов, применимая к описанию всех феноменов как природных, так и техногенных.

## Глава 2

# Ретроспективный взгляд на тензорное исчисление

*Глава носит ознакомительный характер. В ней дается краткая историческая справка и схематическое обсуждение основных понятий. Начинаящим не следует долго задерживать свое внимание на этой главе. Все необходимое для последовательного изложения предмета содержится в последующих главах.*

### 2.1 Тензорное исчисление или тензорный язык?

Язык является основным средством общения между людьми, а также способом хранения и выражения информации. Многообразие языков не поддается описанию. Существует язык чисел — это сложный символический язык, которым пользовались полумифические сущности вроде Пифагора; овладеть им дано очень немногим. Существует множество интонационных языков, используемых на бытовом уровне. Языки такого рода наиболее распространены. Между этими двумя полюсами расположен широкий спектр других языков: язык музыки, язык поэзии, языки живописи и т.д. Вместе с тем, существуют способы хранения и кодирования информации, которые можно назвать языками только условно. К таковым псевдоязыкам относятся, например, языки программирования. В истинных языках действует, по терминологии древних мыслителей, Закон Соответствия или Закон Аналогий. Сущность этого закона заключается в следующем. В истинном языке каждому “слову” (звуку, музыкальной фразе, цветосочетанию, термину и т.д.) соответствуют интуитивные образы. Одному и тому же слову могут отвечать несколько и даже бесконечно много интуитивных образов, но все они имеют единую основу, т.е. носят объективный характер. Собственно говоря, именно интуитивные образы и порождают тот или иной язык.

По мнению автора, тензорное исчисление является истинным языком, в основе которого лежат интуитивные (визуальные) образы, хорошо знакомые даже тем, кто никогда не слышал слов вектор или тензор. В математизированной науке XX века интуитивное мышление перестало играть ту важную роль, которую оно играло в прошлые века. Тем не менее, автор убежден, что интуитивное мышление не просто помогает в решении многих проблем, но является единственным источником новых идей и новых физических теорий. Знания, полученные на основе интуитивного мышления, можно использовать в рациональной науке только при наличии подходящего языка. Для физических и технических наук таковым является тензорный язык, владение которым необходимо любому человеку, решившему посвятить себя исследованию физико-технических проблем. Существует мнение, что тензорный язык и тензорные формы тех или иных уравнений являются просто удобными обозначениями, позволяющими экономно излагать некоторые разделы научного знания. Это является глубоким заблуждением. Фактически развитие рациональной механики необходимо сопровождалось развитием, не всегда осознанным, тензорного языка, процесс становления которого был очень длительным и трудным. Например, понятие вектора было введено Саймоном Стевином (S. Stevin) в 1580 году, но первые учебники по механике, использующие векторный язык, появились только в начале XX века [74, 101]. Более подробно о становлении тензорного языка будет сказано ниже. Тензорный язык в относительно полном объеме стал применяться в некоторых книгах по механике только в последней четверти XX века. К сожалению, в книгах по теоретической физике вплоть до настоящего времени используется исключительно координатная форма тензорного исчисления, но не тензорный язык. Впрочем, этому есть объяснения. Физики предпочитают работать с четырехмерными многообразиями, для которых многие атрибуты тензорного языка просто отсутствуют. Равно как отсутствуют и интуитивные образы, присущие тензорному языку.

Хочется верить, что уже в ближайшее время тензорный язык или, лучше в данном контексте сказать, тензорное исчисление в полном объеме войдет в компьютерные программы символьных вычислений. Это не только облегчит труд исследователей, но и заметно снизит затраты машинного времени на решение разного рода проблем. Достаточно успешные попытки такого рода уже предпринимаются, но результаты еще далеки от желаемых, особенно в отношении их унификации.

Отличие тензорного языка от тензорного исчисления полностью осознают только те, кто имеют дело с постановками новых задач и построениями

новых теорий. В тех случаях, когда речь идет о решениях пусть даже и новых задач, но в рамках уже устоявшихся моделей и сформировавшихся теорий, вышеупомянутые различия часто становятся малозаметными. Впрочем, и здесь многое определяется степенью владения тензорным языком. Когда в рассмотрение вводится новая модель, то, как правило, используется следующая цепочка рассуждений. Имеется интуитивный (визуальный) прообраз. Ему сопоставляется некий тензор или система тензоров. Этому тензору, в свою очередь, сопоставляется интуитивный (визуальный) образ. Сравнивая между собой интуитивные образ и прообраз, немедленно убеждаемся, что они различаются и часто весьма существенно. Теперь исследователю предстоит решить, насколько существенными для поставленных целей являются эти различия, и в какой мере введенный им образ учитывает свойства прообраза. Ситуации такого рода многократно встретятся на страницах данной книги.

Существует мнение, что в каждой науке содержится ровно столько науки, сколько в ней содержится математики. Это всего лишь шутка, но, к сожалению, многими она воспринимается вполне серьезно. Может быть, главным недостатком науки XX века является то, что она переполнена словами-фантомами и понятиями-фантомами, за которыми не стоит никакой реальности. Пользуясь этими фантомами можно строить многочисленные и часто весьма красивые теории. Но, если говорить о физических теориях, то ни одна из них не принесла осязаемых плодов. Теория плодотворна только тогда, когда ей удается описать хотя бы небольшую часть реальности. Единственной возможностью восприятия реальности человеком является интуиция. Еще Сократ сказал, что при истинном познании “душа взбирается на высочайшую наблюдательную башню бытия”. Для построения новой физической теории интуитивный прообраз того, что мы собираемся описать, абсолютно необходим. Тензорный язык является в настоящее время единственным переводчиком, позволяющим переводить язык Природы на язык математических образов.

Итак, не только исчисление тензоров, но тензорный язык со всеми его атрибутами является предметом обсуждения в данной книге.

## 2.2 Арифметический подход к тензорному исчислению

Немного известно об истории развития современного человечества. Но кое-что все же известно. Неизвестно в точности, когда были открыты числа. Но достоверно известно, что числа, как самостоятельные и самодостаточ-



ные структуры, стали рассматриваться во времена Пифагора, т.е. немногим больше двух с половиной тысячелетий тому назад. Это было удивительное время. Человечество начинало осваивать дар логического мышления. Например, знаменитая теорема Пифагора является первым фактом, доказанным средствами логики. Возможность что-то доказывать, а не просто авторитетно утверждать, резко изменила взгляды интеллектуальной части человеческого сообщества. Логические рассуждения стали чрезвычайно популярными, но научиться правильно их применять было совсем не просто. Именно в то время появилось большинство знаменитых ныне парадоксов, типа парадоксов Зенона. Желаящим ознакомиться с этим этапом в развитии человечества лучше всего обратиться к сочинениям Платона. Необычайного расцвета достигла софистика, т.е. наука о доказательстве желательных кому-либо положений независимо от того, истинны ли эти положения. Разумеется, все эти доказательства содержали более или менее грубые логические ошибки. Печальной была бы судьба логических методов, если бы не существовало столь удивительное сообщество, как множество чисел. Именно в теории чисел удалось продемонстрировать, что закон и порядок не являются бесплодными мечтами, что возможно подлинное равенство среди заведомо неравных. Рассмотрим, например, множество целых чисел

$$\dots, -100, \dots, -50, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, 50, \dots, 100, \dots$$

Ясно, что все числа этого множества различны, но все они равноправны по своему, так сказать, общественному положению. Если отношение упорядоченности  $\mathbf{a} < \mathbf{b}$  воспринимать, как отношение подчиненный–начальник, то число 50 является весьма большим начальником для числа  $-50$ . Тем не менее, оба эти числа совершенно равноправны, ибо у каждого из них в точности одинаковое количество начальников и подчиненных. Не об этом ли мечтали сочинители разного рода общественных отношений в человеческом сообществе? Другой пример. Выпишем, например, число

$$1470369258$$

Если внимательно присмотреться к этому числу, то немедленно обнаружится закон, т.е. математическая формула, по которому оно создано. Если присмотреться еще более внимательно, то обнаружатся дополнительные закономерности. При изучении теории чисел было установлено огромное число законов, причем законов истинных, которые можно строго доказать логическими методами. Этих законов было так много, что пифагорейцы полагали их достаточными для описания всех закономерностей, существующих во Вселенной.

Можно, например, вспомнить знаменитый принцип додекаэдра Пифагора, относительно которого считалось, что он управляет всеми процессами, протекающими во Вселенной. По поводу теории чисел можно говорить сколь угодно долго. Для нас здесь важнее всего то, что теория чисел явилась первоосновой всей Рациональной Науки. Неудивительно поэтому стремление ученых многих и многих поколений свести все и вся к числовым отношениям. Таковое стремление не потеряло своей актуальности и в настоящее время. Более того, оно, в известной степени, даже усилилось из-за всеобщей компьютеризации человеческой деятельности. Излишне говорить, что область практического использования чисел чрезвычайно велика. Эта область значительно расширилась после того, как Декарт ввел понятие системы координат и перевел геометрию на аналитический язык. Введение систем координат открыло прямой путь к арифметическому построению тензорного исчисления. Величины, полностью определяемые заданием одного числа, называются скалярами или тензорами нулевого ранга. Объекты, полностью определяемые заданием тройки чисел (координат), меняющихся при замене системы координат по предписанному закону, называются векторами или тензорами первого ранга. Объекты, полностью определяемые заданием девяти чисел (координат), меняющихся по предписанному закону при замене системы координат, называются тензорами второго ранга и т.д. Здесь имеются в виду тензоры в трехмерном пространстве, а цепочку определений можно продолжить до бесконечности. Опустив многие детали и позволив себе некоторые вольности, обсудим только принцип арифметического подхода к построению тензорного исчисления.

Пусть дано множество  $M$  элементов некоей природы. Пусть это множество образует трехмерный континуум. Чтобы сделать множество  $M$  доступным для применения математических методов, его элементы необходимо параметризовать, т.е. каждому элементу множества нужно поставить во взаимно однозначное соответствие тройку чисел. Допустим, что параметризация множества возможна. Система параметризации множества  $M$  называется системой координат на этом множестве. Если возможна одна параметризация множества, то, очевидно, существует бесконечно много других параметризаций этого множества. В самом деле, пусть  $x^m$ ,  $m = 1, 2, 3$  есть параметризация  $M$ , а числа  $x^m$ , называемые координатами, непрерывно заполняют интервалы

$$x_{(1)}^m < x^m < x_{(2)}^m, \quad m = 1, 2, 3. \quad (2.2.1)$$

По условию, каждому элементу  $M$  сопоставлена одна и только одна тройка чисел  $x^m$  и, наоборот, каждой тройке чисел  $x^m$  отвечает один и только один

элемент множества  $M$ . Тогда можно ввести и притом бесконечно большим числом способов новые тройки чисел  $y^m$ ,  $m = 1, 2, 3$ , такие, что

$$y^m = y^m(x^1, x^2, x^3) \iff x^m = x^m(y^1, y^2, y^3), \quad m = 1, 2, 3 \quad (2.2.2)$$

или в других обозначениях

$$x^{m'} = x^{m'}(x^1, x^2, x^3) \iff x^m = x^m(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}), \quad m = 1, 2, 3. \quad (2.2.3)$$

Соотношения (2.2.3) можно записать в локальной форме

$$dx^{m'} = h_p^{m'} dx^p, \quad h_p^{m'} = \partial x^{m'} / \partial x^p, \quad (2.2.4)$$

где по повторяющемуся индексу  $p$  подразумевается суммирование от 1 до 3. Аналогично записывается обратная форма

$$dx^m = h_p^m dx^{p'}, \quad h_p^m = \partial x^m / \partial x^{p'}. \quad (2.2.5)$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$h_p^m h_q^{p'} = \delta_q^m, \quad h_p^{m'} h_q^{p'} = \delta_q^{m'}. \quad (2.2.6)$$

Разумеется, определители матриц  $h_p^m$  и  $h_p^{m'}$  отличны от нуля, что обеспечивает локальную обратимость отображений (2.2.3), которые предполагаются дифференцируемыми по всем переменным нужное число раз.

**Определение:** множество  $M$ , с присоединенным к нему семейством параметризаций (2.2.3), называется гладким дифференцируемым многообразием.

Гладкое дифференцируемое многообразие является исходной конструкцией, в которой задаются разного рода объекты. В частности, именно на этом многообразии определяются объекты, называемые тензорами. Пусть в каждой точке многообразия заданы объекты, зависящие от  $k$  индексов. Они называются объектами  $k$ -го порядка. Зависимость объекта от индексов означает его зависимость от выбора системы координат. Существует два типа объектов первого порядка  $a^m$  и  $b_m$ . Вообще говоря, это разные объекты. Объект  $a^m$  называется контравариантным вектором, если при замене системы координат он преобразуется согласно закону (2.2.4)

$$a^{m'} = h_p^{m'} a^p. \quad (2.2.7)$$

Объект  $b_{m'}$  называется ковариантным вектором, если при замене системы координат он преобразуется по закону (2.2.5)

$$b_{m'} = h_{m'}^p b_p. \quad (2.2.8)$$

Вероятно, читатель уже ощутил некоторый дискомфорт, связанный с употреблением терминов “контравариантный” и “ковариантный”. Действительно, термин “контравариантный” означает “меняющийся противоположно” чему-либо, а термин “ковариантный” означает “меняющийся аналогично” чему-либо. В данном случае совсем неясно противоположно чему меняется контравариантный вектор. Это же можно сказать и о ковариантном векторе. На самом деле контравариантный вектор преобразуется по закону, обратному к закону преобразования базиса, но базисы при координатном (арифметическом) подходе остаются как бы за кадром. Ковариантный вектор преобразуется по закону, совпадающему с законом преобразования базиса. Вернемся к описанию тензоров на многообразии. Объекты второго порядка могут быть четырех различных типов:  $A^{mp}$ ,  $B_{\cdot p}^{\cdot m}$ ,  $C_{\cdot m}^{\cdot p}$ ,  $D_{mp}$ . Пусть при замене системы координат они преобразуются по законам

$$\begin{aligned} A^{m'p'} &= h_s^{m'} h_t^{p'} A^{st}, & B_{\cdot p}^{\cdot m'} &= h_s^{m'} h_p^t B_{\cdot t}^{\cdot s}, \\ C_{\cdot m}^{\cdot p'} &= h_m^s h_t^{p'} C_{\cdot s}^{\cdot t}, & D_{m'p'} &= h_m^s h_p^t D_{st}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Тогда эти объекты называются тензорами второго ранга, причем первый из них называется дважды контравариантным, второй — один раз контравариантным и один раз ковариантным, третий — один раз ковариантным и один раз контравариантным, четвертый — дважды ковариантным. Заметим, что все эти тензоры второго ранга суть разные тензоры. Вполне аналогично вводятся объекты третьего порядка и отвечающие им тензоры третьего ранга. Выписывать их не будем, чтобы не утомлять без особой нужды читателя. В физических теориях обычно работают с многообразиями с метрикой. Для этого на многообразии задают дважды ковариантный, симметричный и положительно определенный тензор второго ранга  $g_{mp} = g_{pm}$  и определяют дифференциальную квадратичную форму такую, что

$$ds^2 = g_{mp} dx^m dx^p. \quad (2.2.10)$$

Тензор  $g_{mp}$  называется метрическим тензором, а величина  $ds$  называется расстоянием между двумя бесконечно близкими точками или длиной контравариантного вектора  $dx^m$ . Введем в рассмотрение взаимный метрический тензор такой, что

$$g_{mp} g^{pq} = \delta_m^q, \quad (2.2.11)$$

где  $\delta_m^q$  есть символ Кронекера. Нетрудно доказать, что взаимный метрический тензор дважды контравариантен, как это указано верхним расположением индексов. Метрический тензор используется, в частности, для образования ассоциированных тензоров или, как говорят, для операции поднятия и

опускания индексов. Например, контравариантному вектору  $\mathbf{a}^m$  можно соотнести ковариантный вектор  $\mathbf{a}_m$ , а ковариантному вектору  $\mathbf{b}_m$  — контравариантный вектор  $\mathbf{b}^m$  по правилу

$$\mathbf{a}_m = g_{mp} \mathbf{a}^p, \quad \mathbf{b}^m = g^{mp} \mathbf{b}_p. \quad (2.2.12)$$

Метрический тензор участвует во множестве других операций. Например, с его помощью определяется скалярное произведение векторов.

Видимо, приведенного фрагмента достаточно для того, чтобы у читателя сложилось ясное представление о координатном (арифметическом) построении тензорного исчисления. В логическом отношении такое построение тензорного исчисления является типичным продуктом человеческого интеллекта. Это исчисление нетрудно освоить и с пользой применять. Профессional обязан свободно владеть координатной формой тензорного исчисления, поскольку на его основе написаны очень многие книги по физике и механике. Начинаящим для освоения координатной формы тензорного исчисления можно рекомендовать две удачно дополняющие друг друга книги [50, 69]. Тем не менее, читатель сам может оценить сколько интуитивных (визуальных) образов возникло в его голове при чтении выше приведенного фрагмента. По мнению автора, при всей своей логической чистоте координатная форма тензорного исчисления не может быть признана истинным языком.

В заключение этого пункта отметим некоторые исторические вехи построения координатной формы тензорного исчисления. К середине XIX века была построена теория матриц [93]. В 1868 году выходит (написана в 1854г.) важнейшая работа Б. Римана [99]. Далее можно указать работы Г. Риччи и Т. Леви-Чивиты [97], Г. Риччи [98] и Я.А. Схоутена [100]. Последующие работы невозможно перечислить. К ним, в частности, относятся многие книги по дифференциальной геометрии и геометрии многообразий.

## 2.3 Прямой тензорный язык

Координатная форма тензорного исчисления была разработана, главным образом, математиками, далекими от сфер деятельности, в которых, собственно, и зарождались первые представления о векторах и тензорах высших рангов. Причем зарождались эти понятия в силу необходимости адекватно отражать интуитивные представления о тех или иных физических объектах. Например, в 1580 году Саймон Стевин, вводя представление о векторе, менее всего думал, если вообще думал, о каких бы то ни было системах координат.

Ему было важно описать понятие силы и доказать правило сложения (правило треугольника) сил. Столетие спустя в 1679 году в письме к Х. Гюйгенсу философ и математик В.Г. Лейбниц писал<sup>1</sup>: “... Я думаю, что мы нуждаемся еще в одном *исчислении*, собственно *геометрическом* или *линейном*, которое давало бы нам возможность выражать непосредственно *положение*, подобно тому, как с помощью алгебры выражают *величину*... Главная же польза состоит в тех заключениях и рассуждениях, которые можно производить при помощи действий над знаками и которые нельзя было бы выразить при помощи фигур (и еще меньше моделей), не увеличивая чрезмерно их количества и не запутывая их введением чрезмерно большого числа точек и линий, поскольку придется делать бесконечное множество бесполезных попыток, между тем как этот метод будет вести к цели верно и без труда. Я думаю, что таким образом можно будет трактовать механику почти как геометрию...” Понадобилось еще два столетия, чтобы эти мысли Лейбница стали реальностью.

Тензоры второго ранга (тензор инерции твердого тела, тензор поворота) впервые были введены Леонардом Эйлером в 1758 году. Хотя термин “тензор” был введен значительно позднее<sup>2</sup>, тем не менее Л. Эйлер работал с этими объектами, как с тензорами. В частности, он использовал представление, известное ныне под названием теоремы о спектральном разложении симметричного тензора второго ранга. Важно подчеркнуть, что Л. Эйлер на формальном уровне не владел многими стандартными ныне методами. Тем не менее, по числу новых фундаментальных результатов ему нет равных в истории человечества, за исключением разве что Архимеда. В огромной степени это объясняется тем, что Л. Эйлер обладал совершенно феноменальной интуицией, т.е. способностью непосредственного визуального восприятия образов вводимых им объектов. В 1788 году Жозеф Лагранж ввел понятие о тензоре малых деформации, а в 1822 году Огюстен Луи Коши, ввел уже вполне систематически представления о тензорных объектах, без которых вообще невозможно описать основные понятия механики упругого континуума (тензор напряжений, тензор деформаций, тензор упругости). Все эти тензоры вводились, как математические формализации ясно выраженных интуитивных представлений, совершенно не связанных с координатными системами.

Все, сказанное выше, имело своей целью подчеркнуть, что исторически тензорное исчисление вводилось именно в качестве языка, отражающего ин-

---

<sup>1</sup> Цитируется по книге [16]

<sup>2</sup> Термин тензор был введен по предложению В. Фогта (W. Voigt) в 1900 году. Но, например, в книге [101], вышедшей в 1913 году, тензором называлось то, что теперь принято называть модулем вектора.

туитивные образы. Неудивительно поэтому, что прямой тензорный язык возник раньше, чем его арифметизированные версии. Впервые систематическое изложение прямого тензорного языка было дано Джошуа Виллардом Гиббсом [92]. Усовершенствованное и несколько расширенное изложение тензорного языка в трактовке Д.В. Гиббса представлено в книге [106]. В России первое изложение прямого тензорного исчисления было представлено в книге [74]. Отметим, что в этих книгах вместо термина “тензорное исчисление” использовался термин “диадное исчисление”. Почти современное изложение прямого тензорного исчисления можно найти в книгах М. Лагалли [38] и Я.С. Дубнова [16, 17]. Обозначения, используемые в двух последних книгах, не прижились, но богатство содержащихся в них результатов и методы получения этих результатов остаются актуальными и в настоящее время. Во всяком случае, книги М. Лагалли и Я.С. Дубнова можно смело рекомендовать современным студентам для первоначального изучения тензорного языка. Конечно, в настоящее время прямое тензорное исчисление представлено в очень многих современных руководствах по полилинейной алгебре и дифференциальной геометрии. Все большее число книг по механике также используют исключительно прямой тензорный язык. В качестве примеров укажем на книги [47, 71, 72, 76, 110]. Многомерные пространства на прямом тензорном языке представлены, например, в книгах [28, 29, 70].

Поскольку прямой тензорный язык является основным предметом обсуждения в данной книге, то здесь мы можем ограничиться только несколькими замечаниями. Исходным объектом при построении прямого тензорного исчисления является векторное ориентированное пространство  $\mathbf{T}_1$ , элементами которого являются векторы

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \quad (2.3.1)$$

воспринимаемые, как направленные отрезки, но отнюдь не совокупности троек чисел. Начинающие должны обратить внимание на то, что в некоторых книгах векторы записываются в виде (2.3.1), но это просто условное обозначение для тройки чисел (координат вектора), которое нельзя воспринимать как направленный отрезок без указания на используемый базис. Далее в рассмотрение вводится специальная конструкция  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_1$ , называемая тензорным произведением двух векторных пространств [79]. Простейшими элементами  $\mathbf{T}_2$  являются упорядоченные пары векторов  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ , называемые диадами [92]. Каждая диада является тензором второго ранга, но не всякий тензор второго ранга является диадой. Элементы  $\mathbf{T}_2$  называются тензорами второго ранга и обозначаются так

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots \quad (2.3.2)$$

Любой тензор второго ранга  $\mathbf{A}$  является конечной совокупностью диад

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \dots + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}. \quad (2.3.3)$$

После специальных мер предосторожности можно рассматривать и бесконечные совокупности диад. Аналогично вводится тензорное произведение  $\mathbf{T}_3$  трех векторных пространств  $\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_1$ , элементами которого являются совокупности упорядоченных троек векторов (триад), которые называются тензорами третьего ранга

$${}^{(3)}\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{p} + \dots \quad (2.3.4)$$

Как правило, индекс в скобках, указывающий ранг тензора, без ущерба для понимания, можно опускать. Легко предугадать, как вводятся тензоры более высоких рангов. Из сказанного видно, что при построении прямого тензорного исчисления никакие координатные системы не привлекаются к рассмотрению, а сами тензоры не зависят от выбора координатной системы. Именно исключение из рассмотрения надстроечных и совершенно необязательных элементов, каковыми являются координатные системы, и делает возможным интуитивное (визуальное) восприятие тензора. От прямой записи тензора нетрудно перейти к его координатному представлению, если в  $\mathbf{T}_1$  ввести базис. В этом случае мы приходим к тензорному исчислению, рассмотренному в предыдущем пункте. Поэтому с чисто математической точки зрения оба подхода совершенно эквивалентны. Тем не менее, различие между обсуждаемыми подходами существует и сводится к следующему. Прямой тензорный язык позволяет легко видеть и предугадывать результаты, которые трудно увидеть в координатной версии тензорного исчисления. С другой стороны, не редки ситуации, когда прямое тензорное исчисление позволяет легко предугадать новый результат, строгое доказательство которого проще получить на основе координатной формы тензорного исчисления, поскольку имеется хорошо разработанная техника работы с объектами, зависящими от индексов. Поэтому свободное владение обеими формами тензорного исчисления совершенно необходимо любому профессиональному исследователю. К счастью, из свободного владения прямой формой вытекает и свободное владение координатной формой, хотя обратное не имеет места.



## Глава 3

# Векторы в трехмерном пространстве

*В физике используется множество различных понятий. Этих понятий так много, что их необходимо как-нибудь классифицировать и некоторым образом упорядочить. Классифицировать можно по определенным признакам. Наиболее общей является классификация по так называемому тензорному признаку, ибо все понятия, описывающие количественные характеристики физических объектов или физических процессов, являются тензорами, но тензорами различных рангов. Тензоры нулевого ранга называются скалярами. Тензоры первого ранга называются векторами. Эти два типа тензоров, хорошо известные из школьных курсов математики и физики, представлены в данной главе. Следующая глава посвящена тензорам второго ранга.*

### 3.1 Системы отсчета и системы координат. Движения

Вселенная являет собой движущуюся материю. Многообразие явлений во Вселенной порождается как многообразием форм существования материи, так и многообразием форм ее движения. Материя, как философская категория, в данной книге не обсуждается, ибо в физике материя представлена вполне конкретными моделями: материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная деформируемая среда, электромагнитное поле и т.д. Все эти модели вводятся определенными математическими структурами и потому могут рассматриваться не только как физические, но и как математические объекты. Аналогично обстоит дело и с движениями. В физике изучают не движения вообще, а движения конкретных моделей. Легко понять, что понятие движения принципиально относительно. Невозможно говорить о движении без четкого указания относительно какого тела рассматривается это движение. В старых версиях классической механики использовалось пред-

ставление об абсолютном пространстве Ньютона, которое легко воспринимается нашей интуицией, как нечто неподвижное и вмещающее в себя все сущее. Движение на уровне интуиции рассматривается относительно этого абсолютного пространства. К сожалению, наш интеллект, т.е. рациональное мышление, не понимает языка интуиции. Нужен специальный переводчик интуитивных представлений на символичный язык, используемый интеллектом. В частности, чтобы использовать абсолютное пространство в рациональной науке необходимо каким-либо образом параметризовать все точки абсолютного пространства, т.е. ввести в нем систему координат. Это одна из центральных проблем физики, неясное решение которой служило и продолжает служить главной причиной многочисленных недоразумений. После непродолжительных размышлений, читатель осознает, что параметризовать точки абсолютного пространства невозможно. Отсюда следует, что оно недоступно для использования в рациональной науке. Поэтому необходимо искать другие тела, относительно которых можно наблюдать движение. Здесь мы ограничимся описанием только первого шага, а именно, введением понятия системы отсчета. Следует подчеркнуть, что для физических теорий вводимое ниже понятие системы отсчета совершенно недостаточно, но оно достаточно для построения векторного и тензорного исчисления. Итак, нам необходимо ввести в рассмотрение тело отсчета. Природа не позаботилась о предоставлении нам какого-либо естественного тела отсчета, и мы вынуждены сотворить его сами. Будем поступать следующим образом. Возьмем маленький пластилиновый шарик (в идеале точку) и поставим на нем метку  $O$ , которая будет рассматриваться в качестве начала в теле отсчета. Возьмем три одинаковые палочки со стрелками на концах. Можно взять палочки-стрелки разной длины, но для краткости мы ограничимся наиболее наглядным случаем. Изучающий без всяких затруднений сможет самостоятельно рассмотреть и другие случаи. Упомянутые выше палочки отметим символами

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}. \quad (3.1.1)$$

В дальнейшем строчными полужирными латинскими буквами будут обозначаться векторы. Но введенные нами объекты векторами не являются — это именно палочки-стрелки. Дело в том, что направление этих палочек не определено и не может быть определено до тех пор пока не введено в рассмотрение тело отсчета. Если же тело отсчета имеется (отличное от того, которое мы сейчас строим), то в нем объекты (3.1.1) уже можно, хотя и с оговорками, считать векторами. Воткнем теперь палочки в пластилиновый шарик так, чтобы углы между ними составляли  $\pi/2$ . В принципе, это не обязательно, но

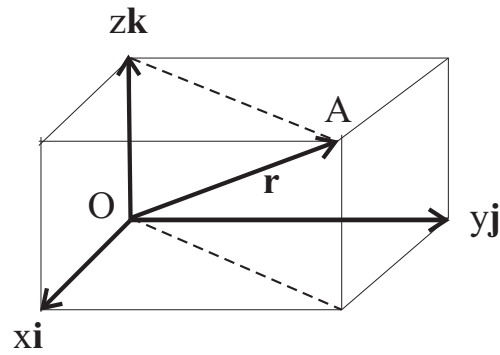


Рис. 3.1: Система отсчета

так проще. В результате, мы получили фигуру

$$\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad (3.1.2)$$

которая в геометрии называется репером. Точка  $O$  в (3.1.2) называется вершиной репера. Присоединим к введенному реперу множество точек, определяемых радиус-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad -\infty < (x, y, z) < +\infty. \quad (3.1.3)$$

Например, к реперу (3.1.2) присоединена точка  $A$  с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Чтобы получить образ точки  $A$ , нужно проделать следующую мысленную операцию. Представим себе, что палочки-стрелки  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  устроены наподобие телескопической антенны у автомобиля. Выдвинем у этих палочек-стрелок нужное число звеньев:  $x\mathbf{i}$  будет иметь  $x$  звеньев,  $y\mathbf{j}$  —  $y$  звеньев и  $z\mathbf{k}$  —  $z$  звеньев. На получившихся палочках-стрелках можно построить параллелепипед. Тогда радиус-вектор (3.1.3) будет расположен на диагонали параллелепипеда, исходящей из вершины репера; его длина будет равна длине диагонали, а его конец будет определять точку  $A$  — см. Рис.3.1. Аналогичным образом к реперу (3.1.2) присоединяется весь бесконечный набор точек, отвечающих всевозможным значениям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  у радиус-вектора (3.1.3). Если мы мысленно повернем или перенесем репер (3.1.2), то вместе с ним повернутся или перенесутся все присоединенные к нему точки таким образом, что их положение относительно репера останется неизменным — см. Рис.3.2. Иными словами, мы построили рукотворную модель абсолютного пространства, но, в отличие от последнего, все точки этого пространства помечены. Поэтому стало возможным наблюдать движение любого тела относительно введенного нами тела отсчета.

**Определение:** Репер (3.1.2) с присоединенным к нему множеством точек (3.1.3) называется телом отсчета.

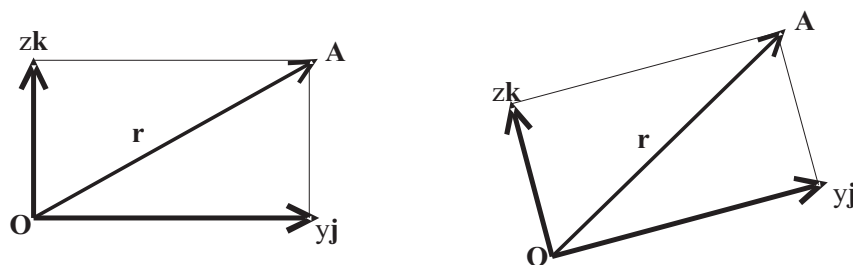


Рис. 3.2: Поворот системы отсчета

Невозможно судить о движении самого тела отсчета. Но наблюдать движение других тел относительно тела отсчета стало возможным. Для описания количественных характеристик движения необходим еще один элемент, а именно часы, позволяющие фиксировать время. Часами называют любой периодический процесс.

**Определение:** Тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.

Репер (3.1.2) и координаты  $x, y, z$  будем называть отсчетными. Они определяют систему отсчета и не подлежат каким-либо заменам. Все вводимые в дальнейшем понятия не имеют никакого смысла вне системы отсчета. К сожалению, как в математической, так и в физической литературе это обстоятельство часто игнорируется, а сами системы отсчета остаются за кадром. В рассмотрение вводятся системы координат и в них определяются те или иные объекты. Однако вводимые системы координат, как правило, ни к чему не прицеплены и существуют как бы сами по себе. Роль системы отсчета ясно очерчена К. Трусделлом [76]: система отсчета это “чистый холст, на котором можно рисовать картины Природы. Этот холст должен быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но никоим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать.” Противоположной точки зрения придерживался А. Эйнштейн [87]. Например, в работе [86] он пишет: “теория вводит два рода физических предметов, а именно: 1) масштабы и часы (т.е. системы отсчета. П.Ж.), 2) все остальное, например, электромагнитное поле, материальную точку и т.д. Это в известном смысле нелогично; собственно говоря, теорию масштабов и часов следовало бы выводить из решений основных уравнений, а не считать ее независимой от них”. Иными словами, считается возможным сначала нарисовать картину Природы, т.е. написать основные уравнения, а только потом подобрать для картины холст. Не сравнивая эти две позиции, просто отмечаем, что в данной книге принята первая точка зрения, традиционная для классической физики и механики.

Подчеркнем еще раз, что введенная выше система отсчета пока еще не то, с чем работают в механике. Об этом речь пойдет немного ниже, а сейчас мы должны остановиться на понятии системы координат.

**Определение:** система идентификации точек системы отсчета называется системой координат в данной системе отсчета.

Все точки системы отсчета уже идентифицированы координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$ , которые мы будем называть отсчетными координатами. Последние играют выделенную роль, ибо определяют как саму систему отсчета, так и точки системы отсчета, присваивая им определенные имена. Наряду с отсчетными координатами можно ввести в рассмотрение и другие координаты, т.е. помимо подлинных имен точек можно присвоить им псевдонимы  $y^1$ ,  $y^2$ ,  $y^3$

$$y^1 = y^1(x, y, z, t), \quad y^2 = y^2(x, y, z, t), \quad y^3 = y^3(x, y, z, t). \quad (3.1.4)$$

Отображение (3.1.4) каждой точке системы отсчета, определяемой координатами  $(x, y, z)$ , сопоставляет в данный момент времени одну и только одну тройку чисел  $(y^1, y^2, y^3)$ . Таким образом, соотношениями (3.1.4) в данной системе отсчета вводится еще одна система координат, которая меняется во времени, т.е. движется относительно системы отсчета. При этом точка, неподвижная в системе отсчета, будет иметь меняющиеся во времени координаты  $y^1, y^2, y^3$ . И наоборот, точка с фиксированными координатами  $y^1, y^2, y^3$  будет двигаться относительно системы отсчета. Преобразования (3.1.4) предполагаются непрерывными и однозначно обратимыми. Иными словами, в данный момент времени тройке чисел  $(y^1, y^2, y^3)$  отвечает одна и только одна тройка чисел  $(x, y, z)$

$$x = f(y^1, y^2, y^3, t), \quad y = g(y^1, y^2, y^3, t), \quad z = h(y^1, y^2, y^3, t). \quad (3.1.5)$$

Заметим, что здесь координаты  $x, y, z$  не зависят от времени, а координаты  $y^1, y^2, y^3$  являются функциями времени. Отсюда, например, следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y^1} \frac{dy^1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y^2} \frac{dy^2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y^3} \frac{dy^3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Соотношения такого рода понадобятся нам в дальнейшем. Вместо координат  $(y^1, y^2, y^3)$  можно было ввести и какие-то другие координаты  $(y^{1'}, y^{2'}, y^{3'})$  такие, что

$$y^{1'} = y^{1'}(x, y, z, t), \quad y^{2'} = y^{2'}(x, y, z, t), \quad y^{3'} = y^{3'}(x, y, z, t). \quad (3.1.6)$$

Подставляя сюда соотношения (3.1.5), получаем

$$y^{1'} = y^{1'}(y^1, y^2, y^3, t), \quad y^{2'} = y^{2'}(y^1, y^2, y^3, t), \quad y^{3'} = y^{3'}(y^1, y^2, y^3, t). \quad (3.1.7)$$

Этими соотношениями устанавливаются замены систем координат в данной системе отсчета. Следует обратить особое внимание на следующие обстоятельства. В соотношениях (3.1.7) отсчетные координаты  $(x, y, z)$  отсутствуют и, тем самым, система отсчета оказалась спрятанной. Отсюда, разумеется, не следует, что о системе отсчета можно позабыть. Сами по себе координаты  $y^k$  не имеют никакого смысла. Если позабыть о существовании соотношений (3.1.4) или (3.1.6), то координаты  $y^k$  повисают в воздухе. Из (3.1.4)–(3.1.6) соотношения (3.1.7) вытекают однозначно. Но из (3.1.7) не следует существование соотношений (3.1.4)–(3.1.6). Поэтому о последних ни в коем случае нельзя забывать.

В данной системе отсчета можно ввести сколь-угодно много различных систем координат, и все они равноправны. Начинающие изучать рациональные теории должны отчетливо осознать различие между понятиями система отсчета и система координат. Недопустимость смешения этих понятий ясно показывает следующее

***Утверждение:** Многие физические величины (скорость, ускорение, кинетическая энергия и другие) зависят от выбора системы отсчета, но ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат в данной системе отсчета.*

К сожалению, во многих книгах и статьях не делается ясного различия между этими понятиями и для них используется термин система координат, причем в одних случаях он имеет смысл системы отсчета, а в других случаях — системы координат. Итак, выше была введена в рассмотрение некая рукотворная конструкция, названная системой отсчета. Ничего нельзя сказать ни о движении, ни о положении, ни об ориентации этой системы отсчета в гипотетическом абсолютном пространстве. Тем не менее, без этой конструкции двигаться дальше так же невозможно, как рисовать вилами на воде. Практически все понятия, используемые в рациональной физике, лишаются всякого физического смысла вне рамок системы отсчета. После введения системы отсчета мы обрели возможность проводить разного рода построения, которые вполне определены, по крайней мере, в данной системе отсчета. В ней мы можем изучать движения тел, вводить векторы и тензоры различных рангов, устанавливать математические формы физических законов. С формально математической точки зрения введенного понятия системы отсчета вполне достаточно для изучения векторно-тензорного языка. Поэтому здесь мы пока остановимся и продолжим обсуждение систем отсчета в первом параграфе пятой главы. С другой стороны, даже начинающему необходимо осознать, почему введенные системы отсчета недостаточны для полноценного

использования в физических теориях, и почему их необходимо превратить в так называемые инерциальные системы отсчета. Понятно, что можно ввести сколь-угодно много различных систем отсчета, и все они будут равноправны. Вообразим себе, что мы сконструировали три совершенно одинаковые системы отсчета. Одну из них установим на крыше здания, другую — на качелях, и, наконец, третью — на каруселях. Допустим, что высоко в небе летит реактивный самолет, оставляя за собой всем хорошо знакомый след. Допустим также, что самолет оставляет свой след в каждой из введенных нами систем отсчета. Только эти следы (траектории), зафиксированные посредством системы отсчета, доступны нам для рационального анализа. Сравним эти траектории между собой. При этом считаем, что самолет не выполняет виражей и фигур высшего пилотажа, а летит по заданию из одного пункта в другой. Тогда в системе отсчета, установленной на крыше здания, траектория будет близка к прямой линии. В системе отсчета, установленной на качелях, плоскость качания которых ортогональна направлению полета, траектория будет иметь вид синусоиды. Наконец, в системе отсчета, установленной на каруселях, траектория будет иметь вид раскручивающейся спирали. Как видим, траектории движения одного и того же объекта в разных системах отсчета представлены кривыми, которые не имеют между собой ничего общего. Вместе с тем, у нас нет серьезных оснований для предпочтения одной из этих систем отсчета какой-либо другой. Иными словами, введя в рассмотрение систему отсчета мы получили возможность описывать движения тел относительно этой системы отсчета, но такое описание не объективно, т.е. оно зависит от нашего произвола. В рациональной науке изучаются законы Природы, т.е. объективные закономерности, а вовсе не наши фантазии. Поэтому введенные нами системы отсчета нельзя применять для построения рациональной физики. Чтобы еще раз подчеркнуть серьезность обсуждаемого вопроса, отметим следующие обстоятельства. Рассмотрим какое-либо тело (материальную точку), которое объективно существует и, стало быть, как-то движется. Выберем теперь произвольным образом вектор-функцию  $\mathbf{R}(t)$ . Нетрудно понять, что всегда найдется такая система отсчета, в которой эта произвольно выбранная функция  $\mathbf{R}(t)$  будет описывать траекторию рассматриваемого и объективно существующего тела. Ясно, что такого рода описания движений тел не доставляют никакого научного (объективного) знания и потому не интересны. До сих пор мы говорили о движении с точки зрения описания положения тела относительно системы отсчета. В этом случае понятие времени играет вспомогательную роль и не очень существенно, как именно измеряется время. Ситуация резко меняется при введении таких

важных характеристик движения, как скорость и ускорение. Скорость характеризуется, в частности, расстоянием, пройденным телом в единицу времени. Эта характеристика имеет смысл только в том случае, если время течет равномерно. Но как определить равномерность хода времени? Кто или что может гарантировать, что длительности всех минут, отсчитываемых по используемым часам, строго одинаковы? При измерении расстояний у нас была принципиальная возможность использовать шаблон длины, посредством которого мы могли удостовериться в одинаковости всех, например, метров в нашей системе отсчета. К несчастью, мы принципиально лишены возможности изготовить шаблон единицы времени. Эту центральную для физики проблему подробно анализировал А. Пуанкаре в работе [67], в которой он ясно показал условность, т.е. необъективность, понятия равномерности хода времени. Это, в свою очередь, показывает условность понятий скорости и ускорения, что нельзя понимать иначе, как катастрофу для всей классической физики. В современной физике проблему равномерности хода времени даже не упоминают, подменив ее проблемой синхронизации часов в разных точках системы отсчета. Понятно, что как бы мы ни синхронизировали часы, но, прежде всего, они должны идти равномерно. В противном случае мы можем сделать скорость движения любого объекта постоянной во всех системах отсчета простым переопределением понятия времени, что и делается в современной физике для скорости света. Удовлетворительное решение проблемы равномерности хода времени в классической механике было найдено С. Зарембой только в 1940 году [107]. Оно будет изложено в параграфе, посвященном обсуждению инерциальных систем отсчета. Повторим, что при построении собственно тензорного исчисления введенные выше системы отсчета вполне достаточны.

## 3.2 Скаляры или тензоры нулевого ранга

***Определение:** Физические величины, которые полностью характеризуются заданием одного вещественного числа, не зависящего от выбора системы координат, называются скалярами.*

Примерами скаляров в механике являются масса, объем, энергия, модуль вектора, время и т.д. Координаты вектора нельзя назвать скалярами, т.к. координаты вектора меняются при замене системы координат. Следует обратить внимание на то, что скаляры не зависят от выбора системы координат в данной системе отсчета, но они могут меняться, а могут и не меняться, при переходе к другой системе отсчета. Например, температура не зависит



от выбора системы отсчета. С понятием энергии ситуация сложнее. Внутренняя энергия тела не зависит от выбора системы отсчета, а кинетическая энергия — зависит. При построении тензорного исчисления все рассуждения всегда ведутся в одной, и только одной, системе отсчета. По этой причине в книгах по векторному и тензорному исчислению системы отсчета, как правило, даже не упоминаются. В физических теориях дело обстоит иначе. Здесь уже обойтись без явного использования систем отсчета невозможно. Выбор системы отсчета в достаточной мере произволен, а физические теории должны описывать объективную реальность, т.е. не должны зависеть от нашего произвола. Поэтому в физике важнейшую роль играет специально вводимый принцип независимости физической теории от выбора системы отсчета. При этом величины, входящие в эту теорию, вполне могут зависеть от выбора системы отсчета. Отсюда ясно, что физические теории не могут строиться произвольно, а их структура должна удовлетворять неким ограничениям. Эта книга адресована тем, кто будет иметь дело именно с физическими теориями, и кто категорически не должен смешивать системы отсчета и системы координат. Скаляры могут зависеть от точек системы отсчета, т.е. являться функциями точек системы отсчета. В таких случаях говорят, что задано скалярное поле. Например, распределение температуры в теле есть типичный пример скалярного поля, хотя для механики он как раз не типичен. Типичные для механики скалярные поля более сложны, но все, конечно, слышали о гравитационном потенциале, являющемся примером скалярного поля. Скаляры, будучи вещественными числами, подчиняются обычным, известным из школьной программы, правилам сложения, вычитания, умножения и деления. Скаляры определяют физические величины и имеют размерность. Например, масса измеряется в килограммах, расстояние — в метрах, объем — в кубических метрах и т.д. Складывать и вычитать можно скаляры, имеющие одинаковую размерность. Делить и умножать можно скаляры разной размерности. Например, если массу тела разделить на его объем, то получим новую скалярную величину, называемую средней массовой плотностью. В дальнейшем скаляры будем считать элементами множества вещественных чисел, на котором введены обычные операции сложения, вычитания, умножения и деления. Это множество будем обозначать символом  $T_0$ , а физическую величину, полностью определяемую одним элементом множества  $T_0$ , будем называть скаляром или тензором нулевого ранга.

### 3.3 Полярные и аксиальные векторы

Следующей после скаляров ступенькой в классификации физических величин являются векторы или тензоры первого ранга. Векторы являются не только и не столько математическими изобретениями, сколько элементами нашего интуитивного мышления. Знание векторов присуще всем людям, независимо от их уровня образования. Например, понятием вектора пользовались пираты всех времен для указания места, где спрятаны сокровища. Причем для изображения вектора у пиратов было принято использовать человеческие скелеты, уложенные в виде стрелки. Конечно, векторы, как элементы интуитивного мышления, не могут быть использованы в рациональных теориях. Для этого необходимо превратить векторы в элементы нашего логического мышления, т.е. превратить их в формализованные структуры.

В физическом пространстве, т.е. в данной системе отсчета, можно наблюдать и фиксировать два принципиально различных типа движения тел. Первый тип движения характеризует перенос (трансляцию) тела в пространстве и может быть назван трансляционным движением. Этот тип движения давно изучен и легко воспринимается нашей интуицией. Второй тип движения характеризует изменение ориентации тела в пространстве. Если размеры тела малы, то при такого рода движении положение тела в пространстве не меняется. Простейшим интуитивным образом здесь может служить малое тело, быстро вращающееся вокруг какой-либо оси, проходящей через это тело. Этот тип движения мы будем называть спинорным движением. Обычно такое движение тела называют вращательным, но последний термин часто применяется и при описании трансляционного движения. Например, говорят, что Земля вращается вокруг Солнца. Но, кроме того, говорят о вращении Земли вокруг собственной оси. Хотя в обоих случаях говорят о вращении, тем не менее, речь идет о принципиально различных видах движения. При вращении Земли вокруг Солнца мы имеем типичный пример трансляционного движения, т.к. при этом изменяется положение Земли в пространстве. При вращении Земли вокруг собственной оси мы имеем типичный пример спинорного движения. Полное движение Земли является комбинацией трансляционного и спинорного движений, причем последнее мало существенно и, как правило, игнорируется, а сама Земля рассматривается как материальная точка. Таким образом, в небесной механике вращательное движение Земли является преимущественно трансляционным. В то же время, суточное вращение Земли является преимущественно спинорным движением. Соответственно двум типам движения в физическом пространстве действуют два различных типа векто-

ров. Первый тип вектора — это направленный отрезок. Чтобы задать этот тип вектора (будем временно называть его прямым вектором), необходимо указать направление в физическом (трехмерном) пространстве и вещественное число (скаляр), называемое длиной (модулем) вектора. Прямые векторы (этот термин немного ниже будет заменен на общеупотребительный термин — полярный вектор) будем обозначать малыми полужирными буквами латинского алфавита:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , ... Длина вектора  $\mathbf{a}$  (модуль вектора  $\mathbf{a}$ ) обозначается через  $|\mathbf{a}|$  или  $\mathbf{a} \equiv |\mathbf{a}|$ . Для измерения длины вектора необходимо иметь эталон длины (мерную линейку). Два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  считаются равными, если они имеют одинаковое направление (сонаправлены) в физическом пространстве и одинаковые длины  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ . Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым вектором. Направление нулевого вектора не определено и не имеет значения. Все нулевые векторы эквивалентны между собой. В этом смысле говорят, что существует только один нулевой вектор. Примерами прямых векторов в физике служат: сила, скорость, ускорение, количество движения и т.д. Наиболее естественной интерпретацией прямых векторов является трансляция, т.е. перенос в физическом пространстве. Например, в парке можно увидеть стрелку с надписью “ресторан”, указывающую направление и содержащую указание “300 метров”. Это означает, что для того, чтобы попасть в ресторан, надо перенестись с данного места в указанном направлении на 300 метров. Это — типичный пример прямого вектора.

Для описания спирного движения необходимо ввести в рассмотрение понятие спин-вектора, которое также является элементом нашего интуитивного мышления. Чтобы убедиться в этом, читатель может провести следующий эксперимент. Пусть он обратится к группе людей (например, филологов), никогда профессионально не имевших дело с математикой или рациональной механикой, и покажет им обычный вращающийся волчок. Далее, пусть он обратится к каждому из них с просьбой схематически изобразить увиденное движение на рисунке. Можно не сомневаться, что на каждом из рисунков в том или ином виде будет представлен объект, изображенный на Рис.3.3 под названием спин-вектор.

Формально спин-вектор определяется следующим образом. В физическом (трехмерном) пространстве задается прямая, называемая осью спин-вектора. Затем в плоскости, ортогональной оси спин-вектора, изображается круговая стрелка, идущая вокруг оси и показывающая направление вращения. Длина круговой стрелки называется модулем (длиной) спин-вектора и указывает величину вращения или поворота. Итак, спин-векторы изображают вращения в трехмерном физическом пространстве, в то время как прямые векторы



Рис. 3.3: Вектор и спин-вектор

изображают трансляции в этом же пространстве. Подчеркнем, что указанные интерпретации не следует воспринимать слишком буквально. Например, вектор силы (прямой вектор) нельзя интерпретировать как перенос в пространстве, но сила, действующая на свободное тело, вызовет его перенос в пространстве, хотя и не обязательно только перенос. Для того, чтобы тело перемещалось без вращения, необходимо выполнить определенные условия. Аналогично, вращающий момент (спин-вектор), приложенный к телу, стремится вызвать поворот этого тела. Короче говоря, указанные интерпретации являются интуитивными ощущениями, которые проявляются у человека постепенно по мере работы с векторами в конкретных ситуациях. В данный момент эти интерпретации необязательны для формального рассмотрения. Спин-векторы будем обозначать малыми полужирными латинскими буквами с индексом в виде звездочек:  $\mathbf{a}_*$ ,  $\mathbf{b}_*$ ,  $\mathbf{c}_*$ ... Такие обозначения, конечно, неудобны, но они будут использоваться довольно редко. Модуль спин-вектора, т.е. длину круговой стрелки, будем обозначать стандартным образом:  $|\mathbf{a}_*|$ .

Итак, мы ввели два множества объектов, действующих в трехмерном физическом пространстве: множество направленных отрезков (множество прямых векторов) и множество спин-векторов, конструкция которых описана выше. Однако работать с двумя множествами элементов различной природы неудобно. Тем более, что спин-векторам можно взаимно однозначно сопоставить прямые векторы, если ввести дополнительное соглашение, называемое ориентацией системы отсчета. Оно вводится следующим образом.

Пусть дан спин-вектор  $\mathbf{a}_*$ . Сопоставим ему прямой вектор  $\mathbf{a}$  по следующим **правилам**:

- а) вектор  $\mathbf{a}$  расположен на оси спин-вектора  $\mathbf{a}_*$ ;
- б) модуль  $\mathbf{a}$  равен модулю  $\mathbf{a}_*$ :  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}_*|$ , т.е. длина направленного отрезка  $\mathbf{a}$  равна длине круговой стрелки;
- в) вектор  $\mathbf{a}$  направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка показывала вращение против хода часовой стрелки.

Вместо соглашения в) мы с таким же успехом могли бы принять условие

г) вектор  $\mathbf{a}$  направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка показывала вращение по ходу часовой стрелки.

Выбор одной из этих двух возможностей и называется ориентацией системы отсчета.

**Определение:** система отсчета называется правоориентированной, если трансляции и вращения в ней согласованы в соответствии с правилами а), б) и в). Система отсчета называется левоориентированной, если трансляции и вращения в ней согласованы в соответствии с правилами а), б) и г).

Таким образом, в ориентированной системе отсчета мы можем работать только с одним множеством: множеством направленных отрезков. Однако в этом множестве все равно сохраняется различие между истинно прямыми векторами и псевдопрямыми векторами, прообразами которых служили спин-векторы. Это различие устанавливается в следующих определениях.

**Определение:** направленный отрезок (прямой вектор) называется полярным вектором, если при замене ориентации системы отсчета на противоположную, упомянутый направленный отрезок не меняется.

Например, если направленный отрезок символизирует собой смещение некоторого тела из точки  $A$  физического пространства в точку  $B$  этого же пространства, то ему (направленному отрезку) совершенно безразлично, какое именно соглашение о положительном направлении вращения мы приняли. Это типичный пример полярного вектора — он “не чувствует” изменение ориентации системы отсчета.

**Определение:** направленный отрезок (псевдопрямой вектор) называется аксиальным вектором, если при замене ориентации системы отсчета на противоположную упомянутый направленный отрезок меняет свое направление на противоположное, сохраняя свою длину.

Полезно помнить, что за аксиальными векторами всегда стоят спин-векторы, т.е. вращения в физическом пространстве. Поэтому с физической точки зрения различие между полярными и аксиальными векторами существенно и неустранимо. Это различие никак не связано с выбором системы координат в системе отсчета. Например, в правоориентированной системе отсчета мы можем использовать как левые, так и правые системы координат, выбор которых совершенно не сказывается ни на полярных, ни на аксиальных векторах. Мы столь долго подходили к понятиям полярного и аксиального векторов и даже позволили себе ввести не используемые в литературе понятия прямого вектора и спин-вектора по той причине, что в этом важном для физика вопросе существует немалая путаница. Начиная с этого места, мы

будем использовать общеупотребительные понятия полярного и аксиального векторов.

*Замечание.* Символы, показанные на Рис.3.3, являются общеупотребительными — см., например, книгу [53], в которой направленный отрезок трактуется как символ полярного вектора, а спин-вектор трактуется как символ аксиального вектора. Это правильно только до некоторой степени. С формальной точки зрения, которая обязательна в любой рациональной теории, такая трактовка неудовлетворительна. Ниже мы увидим, что и направленный отрезок, и спин-вектор могут быть обоих типов. Например, будут встречаться полярные и аксиальные спин-векторы.

Полярными и аксиальными могут быть не только векторы, т.е. тензоры первого ранга, но и тензоры любого ранга. Во всех случаях тип тензора определяется по его отношению к выбору ориентации в системе отсчета: объекты, не зависящие от выбора ориентации, называются полярными; объекты, которые умножаются на  $(-1)$  при замене ориентации на противоположную, называются аксиальными. В частности, можно говорить о полярных и аксиальных скалярах, последние чаще называют псевдоскалярами. С примерами скаляров обоих типов мы познакомимся ниже. Понятно, что складывать и вычитать можно скаляры одного типа, ибо в противном случае результаты сложения и вычитания зависели бы от нашего произвола в выборе ориентации системы отсчета.

### 3.4 Основные операции с векторами

Выше мы ввели в рассмотрение множество направленных отрезков. Однако не всякие множества представляют интерес для физики и математики. Интересны только такие множества, на которых удается ввести дополнительные структуры, а именно, законы композиции элементов множества. На множестве направленных отрезков (векторов) вводятся четыре основных закона композиции векторов. Опишем эти законы.

**А. Первый закон композиции или правило сложения векторов.** Примем, что каждой паре векторов одного типа  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно однозначно сопоставить третий вектор  $\mathbf{c}$  такого же типа, который конструируется в соответствии с одним из двух эквивалентных между собой правил (Рис.3.4).

Вектор  $\mathbf{c}$ , построенный по одному из указанных правил, называется суммой векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и обозначается

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

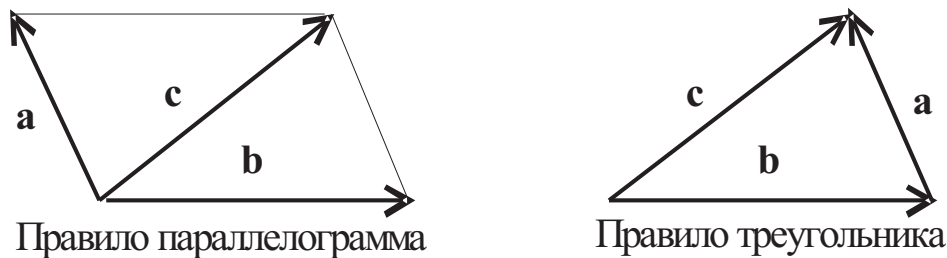


Рис. 3.4: Правила сложения векторов

Легко доказываются следующие свойства суммы векторов:

- (1)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$  (коммутативность сложения);
- (2)  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$  (ассоциативность сложения);
- (3)  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{0}$  — нулевой вектор.

**Упражнение.** Доказать единственность нулевого вектора.

**Примечание.** Начинаящим следует обратить особое внимание на различие в подходах, принятых в математике и в физических теориях. А именно, выше утверждается, что легко **доказываются** свойства суммы векторов. В математике эти свойства не доказываются, а вводятся аксиоматически. Следует ясно осознать причину столь существенного расхождения. Дело в том, что математики предпочитают не давать конкретного правила сложения. Фактически, любое правило, обладающее свойствами (1), (2), (3), в математике называется операцией сложения. Поэтому доказать эти свойства невозможно, но можно принять их аксиоматически. Это позволяет математике сохранять высокую степень общности рассуждений, которая не является необходимой в физических теориях, оперирующих вполне конкретными объектами. К сказанному следует добавить, что под определение вектора в математике подпадает значительно большее число объектов, нежели принято в данной книге. Например, матрицы в математике являются элементами векторного пространства, т.е. векторами. Но эти векторы имеют мало общего с векторами, рассматриваемыми в данной книге. В частности, матрицам самим по себе не отвечают никакие интуитивные образы. Последние возникают только в связи с конкретными приложениями матриц. В результате, то, что изучается в математике, может быть при желании названо векторным исчислением, но оно не может быть названо и не является векторным языком.

Понятно, что проиграв математике в общности, мы выигрываем в глубине проникновения в рассматриваемый объект и в его свойства, что немаловажно в физических теориях. В частности, выше было принято совершенно конкрет-

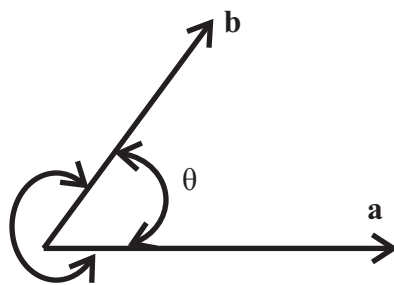


Рис. 3.5: Угол между векторами

ное правило сложения, свойства которого действительно можно доказать.

**В. Второй закон композиции: умножение вектора на скаляр.**

Примем, что любому скаляру  $\alpha$ , и любому вектору  $\mathbf{b}$  можно однозначно сопоставить вектор  $\mathbf{a}$ , который обозначается  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$ , такой, что справедливы утверждения

а)  $|\mathbf{a}| = |\alpha| |\mathbf{b}|$ ;

б) если  $\alpha > 0$ , то направление  $\mathbf{a}$  совпадает с направлением  $\mathbf{b}$ , если  $\alpha < 0$ , то направление  $\mathbf{a}$  противоположно направлению  $\mathbf{b}$ .

Можно доказать справедливость соотношений

$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b}, \quad (\alpha + \beta) \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a}.$$

Из этих соотношений следует, что умножение произвольного вектора на нулевой скаляр приводит к нулевому вектору. Чтобы убедиться в этом, достаточно в последнем соотношении принять  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ . Из принятого определения видно, что при умножении вектора на полярный скаляр тип вектора не меняется, а при умножении вектора  $\mathbf{a}$  на аксиальный скаляр  $\alpha$  тип вектора  $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}$  противоположен типу  $\mathbf{a}$ .

**С. Третий закон композиции: скалярное произведение векторов.**

Примем, что каждой паре векторов,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно однозначно сопоставить скаляр  $\alpha$ , который обозначается через  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  и вычисляется по правилу

$$\alpha \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , причем безразлично, какой из двух возможных углов между  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  выбирать (Рис.3.5). Свойства скалярного произведения

а)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  (коммутативность);

б)  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  (дистрибутивность).

Для иллюстрации докажем второе свойство скалярного произведения в случае, когда все три вектора  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  лежат в одной плоскости (компланарны)



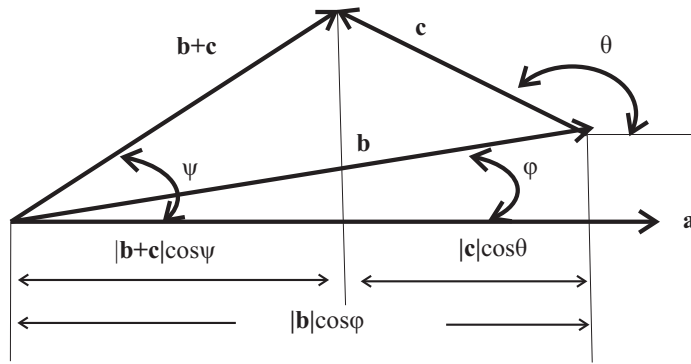


Рис. 3.6: Дистрибутивность скалярного произведения

— см. Рис.3.6. По определению скалярного произведения имеем

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b} + \mathbf{c}| \cos \psi.$$

Далее из Рис.3.6 видно, что (на рисунке  $\cos \theta < 0$ )

$$|\mathbf{b} + \mathbf{c}| \cos \psi = |\mathbf{b}| \cos \varphi + |\mathbf{c}| \cos \theta.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b} + \mathbf{c}| \cos \psi = |\mathbf{a}| (|\mathbf{b}| \cos \varphi + |\mathbf{c}| \cos \theta) = \\ &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \varphi + |\mathbf{a}| |\mathbf{c}| \cos \theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

*Упражнение.* Доказать дистрибутивность скалярного произведения в общем случае.

Из определения скалярного произведения видно, что  $\alpha = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  есть полярный скаляр, если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют одинаковый тип, и есть аксиальный скаляр, если  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют разные типы, например,  $\mathbf{a}$  — полярен,  $\mathbf{b}$  — аксиален.

*Определение:* два ненулевых вектора называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Введем несколько терминов. Ортом (направляющим вектором) вектора  $\mathbf{a}$  называется единичный вектор

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}, \quad |\mathbf{a}| \neq 0.$$

Проекцией вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$  называется вектор

$$\mathbf{a}_b = [\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}}] \hat{\mathbf{b}}.$$

Часто проекцией вектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{b}$  называют скаляр

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{b}} = |\mathbf{a}| \cos \theta,$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

**Определение:** множество направленных отрезков (векторов), на котором заданы три закона  $A$ ,  $B$ ,  $C$  композиции элементов, называется нормированным векторным пространством.

**Замечание:** обратить внимание на различие терминов “пространство” в словосочетаниях “физическое пространство” и “векторное пространство”. Физическое пространство есть элемент нашего интуитивного мышления, природа этого понятия до конца не выяснена и, возможно, никогда не будет выяснена окончательно. Векторное пространство — это множество элементов с установленными на нем законами композиции элементов. Векторное пространство есть элемент нашего логического мышления и в этом смысле является весьма простым понятием.

**Д. Четвертый закон композиции: векторное произведение векторов.** Первые три закона векторов имеют смысл как в ориентированной системе отсчета, так и в не ориентированной. Четвертый закон композиции, называемый векторным произведением векторов, имеет смысл только в ориентированной системе отсчета. Как и всюду, в этой главе мы считаем, что читатель знаком со всеми используемыми здесь понятиями, включая векторное произведение векторов. Однако опыт преподавания показывает, что векторное произведение нуждается в более подробном изложении. Прежде всего подчеркнем, что использованный нами способ ориентации системы отсчета имеет смысл только в трехмерном пространстве, поскольку спин-векторы однозначно определены только в трехмерном пространстве. Кроме того, важно помнить, что ориентация пространства производится до выполнения каких бы то ни было операций над векторами и в дальнейшем никакие операции с векторами не меняют выбранной ориентации, если только не вводятся специально оговоренные операции. Как правило, нужды в таких операциях не возникает, и они не вводятся. В частности, ориентация пространства сохраняется при зеркальных отражениях и других подобных операциях. Это обстоятельство важно запомнить.

Операцию векторного произведения введем в два этапа. Сначала двум направленным отрезкам (прямым векторам) мы сопоставим спин-вектор. Этот шаг не зависит от выбора ориентации в пространстве. А затем спин-вектору сопоставим стандартным образом прямой вектор. Этот шаг уже непосредственно связан с выбором ориентации. Казалось бы, такое разбиение операции векторного произведения на два шага усложняет дело. Однако на самом деле к этому легко привыкнуть. Возникающие при этом преимущества в сравнении со стандартным определением мы покажем ниже. Итак, примем

следующее определение векторного произведения векторов. Пусть дана упорядоченная пара векторов (направленных отрезков)  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  считается первым (левым) сомножителем, а вектор  $\mathbf{b}$  — вторым (или правым) сомножителем. Сопоставим векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  спин-вектор  $\mathbf{c}_*$  такой, что

а) ось спин-вектора  $\mathbf{c}_*$  ортогональна плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ;

б) круговая стрелка показывает направление кратчайшего поворота от вектора  $\mathbf{a}$  (левого сомножителя) к вектору  $\mathbf{b}$  (правому сомножителю);

в) модуль спин-вектора  $\mathbf{c}_*$ , т.е. длина круговой стрелки, равен

$$|\mathbf{c}_*| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta,$$

где  $\theta$  — угол кратчайшего поворота от  $\mathbf{a}$  к  $\mathbf{b}$ . Для введенного таким образом спин-вектора  $\mathbf{c}_*$  примем обозначение

$$\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Согласно принятому определению сразу видим, что

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}],$$

т.к. при этом направление поворота меняется на обратное. Следовательно, порядок сомножителей в произведении  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  оказывается существенным. Теперь осталось совершить последний шаг и спин-вектору  $\mathbf{c}_*$  сопоставить прямой вектор  $\mathbf{c}$  в соответствии с правилом, описанном выше. Этот шаг уже зависит от выбранной нами ориентации в физическом пространстве (системе отсчета). Прямой вектор  $\mathbf{c}$ , соответствующий спин-вектору  $\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , называется векторным произведением векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и обозначается

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Сразу же возникает вопрос о типе вектора  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Для ответа на этот вопрос необходимо прежде всего указать тип векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Здесь возможны различные ситуации. Рассмотрим сначала случай, когда  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  оба полярны, т.е. не зависят от выбора ориентации в физическом пространстве. Тогда очевидно, что и спин-вектор  $\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  не зависит от выбора ориентации в пространстве, а вектор  $\mathbf{c}$ , отвечающий  $\mathbf{c}_*$ , напротив, зависит от выбора ориентации и, следовательно, является аксиальным. Покажем, что именно спин-вектор  $\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  отвечает физическому, если так можно выразиться, смыслу, а вовсе не аксиальный вектор, который в некотором смысле является нашей выдумкой. Для этого воспользуемся операцией зеркального отражения векторного произведения (Рис.3.7). На Рис.3.7 плоскость зеркала ортогональна

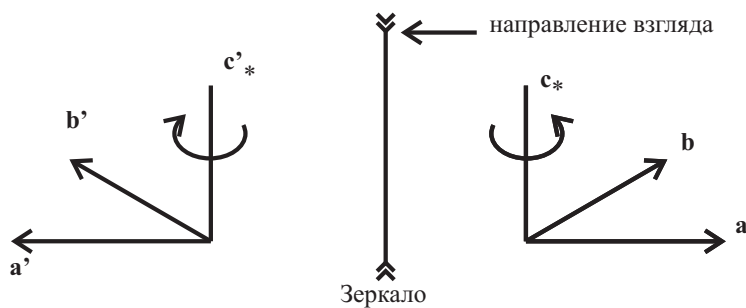


Рис. 3.7: Зеркальное отражение спин-вектора

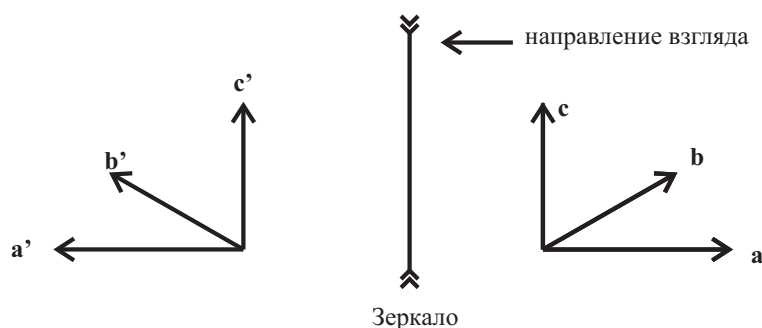


Рис. 3.8: Зеркальное отражение векторного произведения

плоскости чертежа и параллельна оси спин-вектора  $\mathbf{c}_*$ . Из Рис.3.7, мы видим, что зеркальное отражение спин-вектора полностью согласуется с принятым определением для спин-вектора  $\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ , т.е.  $\mathbf{c}'_* = [\mathbf{a}', \mathbf{b}']$ . В то же время из Рис.3.8 мы видим, что  $\mathbf{c}'$ , т.е. зеркальный образ вектора  $\mathbf{c}$ , не равен векторному произведению отраженных векторов  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{b}'$ :  $\mathbf{c}' \neq \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \mathbf{c}'' = -\mathbf{c}'$ . Это происходит потому, что зеркало (физическая операция) ничего “не знает” о нашем произвольном соглашении об ориентации пространства. Указанная особенность аксиальных объектов будет существенна при определении их групп симметрии. Итак, векторное произведение двух полярных векторов есть аксиальный вектор. Пусть теперь первый сомножитель есть аксиальный вектор  $\mathbf{a}$ , а второй сомножитель есть полярный вектор  $\mathbf{b}$ . Каким будет тип вектора  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо выяснить, как ведет себя вектор  $\mathbf{c}$  при замене ориентации пространства — см. Рис.3.9, — из которого видим, что векторное произведение двух векторов различных типов есть полярный вектор, т.е. он не зависит от выбора ориентации в пространстве.

*Замечание.* Обратим внимание, что спин-вектор  $\mathbf{c}_*$ , сопоставляемый аксиальному вектору  $\mathbf{a}$  и полярному вектору  $\mathbf{b}$ , сам оказывается аксиальным, т.е. он умножается на  $(-1)$  при замене ориентации системы отсчета на противоположную. В этом случае операция зеркального отра-

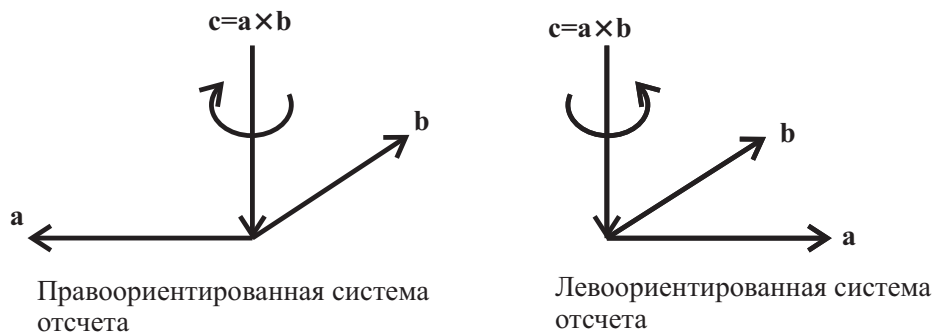


Рис. 3.9: Векторное произведение разнотипных векторов

жения покажет неверный результат для отраженного спин-вектора  $\mathbf{c}_*$ . Точнее говоря, в зеркале мы увидим неверный образ аксиального вектора  $\mathbf{a}$ , а неверный образ спин-вектора  $\mathbf{c}_*$  есть следствие неверного зеркального образа аксиального вектора  $\mathbf{a}$ . Легко убедиться, что векторное произведение двух аксиальных векторов есть аксиальный вектор.

**Свойства векторного произведения:**

- а)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ;
- б)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ .

Часто используются произведения трех векторов. Таких произведений два: а) смешанное произведение векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ :  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ ; б) двойное векторное произведение векторов  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  — здесь уже важно знать последовательность выполнения операций. В смешанном произведении эта последовательность очевидна: сначала производится векторное умножение, а затем — скалярное. При двойном векторном произведении первая операция обязательно должна выделяться скобками, ибо

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Напомним известные тождества

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a});$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

**Упражнение:** установить тип вектора  $\mathbf{d} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  для различных сочетаний типов векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ .

### 3.5 Примеры

Очень часто векторы рассматривают исключительно как совокупность трех чисел (координат вектора) и полагают, что векторы, как направленные от-

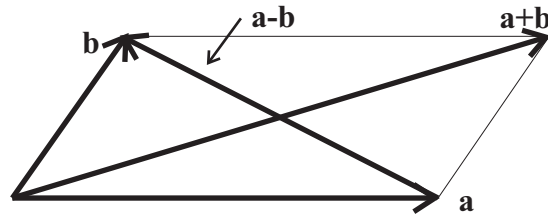


Рис. 3.10: Геометрическое решение задачи

резки, являются просто удобными сокращенными записями, которые не дают никаких преимуществ при решении конкретных задач. Это глубокое и ничем не обоснованное заблуждение. Проиллюстрируем это на примерах.

**Задача 1:** указать, при каких условиях, налагаемые на векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , справедливо равенство

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

**Решение:**

а) Геометрический способ решения представлен на Рис.3.10. Из рисунка видим, что  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ , когда диагонали параллелограмма равны, т.е. параллелограмм должен быть прямоугольником, а следовательно,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — ортогональны.

б) Аналитический способ:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| &\Rightarrow |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \Rightarrow \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \Rightarrow \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \end{aligned}$$

т.е.  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — ортогональны. Конечно, в столь простой задаче визуальный способ не намного превосходит аналитический подход. Однако добиваться устойчивой визуализации необходимо на простых примерах. В последующих главах будут приведены примеры, в которых визуализация будет играть решающую роль. Теперь рассмотрим более сложную задачу.

**Задача 2:** дано уравнение

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \alpha = 0. \quad (3.5.1)$$

**Найти:** а) общее решение; б) максимальное по модулю решение; в) минимальное по модулю решение.

**Решение.** Прежде всего надо установить тип вектора  $\mathbf{x}$ . Поскольку независимо от типа  $\mathbf{x}$  скалярное произведение  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  есть полярный скаляр, то  $\alpha$  также должен быть полярным скаляром. Если  $\alpha$  — аксиальный скаляр, то

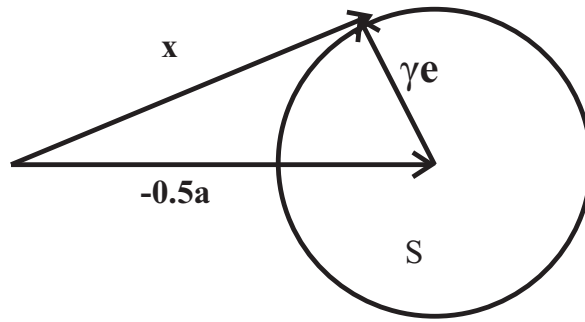


Рис. 3.11: Геометрическое решение задачи 2

данное уравнение неразрешимо. Скалярное произведение  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$  должно быть полярным скаляром, а стало быть, тип вектора  $\mathbf{x}$  совпадает с типом вектора  $\mathbf{a}$ . Перепишем теперь уравнение (3.5.1) в эквивалентном виде

$$|\mathbf{x} + 0.5\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} + 0.5\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} + 0.5\mathbf{a}) = 0.25\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \alpha.$$

Из этого уравнения видим, что оно разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 4\alpha \geq 0.$$

При этом модуль вектора  $\mathbf{x} + 0.5\mathbf{a}$  равен

$$|\mathbf{x} + 0.5\mathbf{a}| = 0.5\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 4\alpha}.$$

Следовательно, вектор  $\mathbf{x}$  имеет вид

$$\mathbf{x} = -0.5\mathbf{a} + \gamma\mathbf{e}, \quad \gamma = 0.5\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 4\alpha}, \quad (3.5.2)$$

где  $\mathbf{e}$  — произвольный единичный вектор. Выражение (3.5.2) дает нам общее решение уравнения (3.5.1). Оказывается, что существует бесконечно много решений, поскольку направление  $\mathbf{e}$  — произвольно. Модуль  $|\mathbf{x}|$  зависит от выбора направления единичного вектора  $\mathbf{e}$ . Изобразим выражение (3.5.2) на Рис.3.11. Из рисунка сразу видим, что максимальное по модулю решение уравнения (3.5.1) имеет вид

$$\mathbf{x}_{\max} = -\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{|\mathbf{a}|} \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 4\alpha} \right] \mathbf{a}, \quad \mathbf{e} = -\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|},$$

а минимальное по модулю решение дается формулой

$$\mathbf{x}_{\min} = -\frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{|\mathbf{a}|} \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 4\alpha} \right] \mathbf{a}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Любопытно отметить следующее свойство

$$\mathbf{x}_{\max} \cdot \mathbf{x}_{\min} = \alpha$$

и сравнить его с аналогичным свойством алгебраического уравнения  $x^2 + ax + \alpha = 0$ , которое в отличие от (3.5.1) имеет всего два решения.

Конечно, поставленную задачу можно решать и в координатном виде с использованием аналитических методов, но это решение уже выходит за рамки возможностей большинства студентов первого курса, поскольку отыскание экстремумов функции нескольких переменных при ограничениях на переменные они еще не изучали. В любом случае координатное решение этой задачи довольно громоздко.

**Задача 3:** найти общее решение уравнения

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.5.3)$$

и выделить из общего решения минимальное по модулю решение.

**Решение.** Представим вектор  $\mathbf{x}$  в виде суммы проекции  $\mathbf{x}$  на вектор  $\mathbf{a}$  и ортогонального к ней вектора  $\mathbf{y}$ , т.е. будем искать  $\mathbf{x}$  в виде разложения

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \mathbf{y}; \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Тогда для вектора  $\mathbf{y}$  получим уравнение

$$\mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{a} + \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на  $\mathbf{a}$  слева

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \frac{1}{a^2} \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{a} + \frac{1}{a^2} \mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (3.5.4)$$

где  $\alpha$  — произвольный скаляр. Всегда полезно проверить, если это возможно, полученный результат. Пусть

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}. \quad (3.5.5)$$

Тогда по (3.5.4) имеем

$$\mathbf{x} = 2\alpha \mathbf{i} - 2\mathbf{k}.$$

Подставляя это значение  $\mathbf{x}$  в (3.5.3), получаем

$$2\mathbf{i} \times (2\alpha \mathbf{i} - 2\mathbf{k}) = 4\mathbf{j} \neq \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.$$

Видим, что найденное нами решение для векторов (3.5.5) не удовлетворяет уравнению (3.5.3). Между тем, все было сделано совершенно правильно. В



чем же дело? На этом элементарном примере мы столкнулись с чрезвычайно важным обстоятельством, которое начинающий должен запомнить на всю оставшуюся жизнь. В математике решение любой задачи начинается с доказательства существования ее решения. Физики, а нередко и механики, обычно пренебрегают теоремами существования. При этом они говорят: “Зачем мне доказывать существование решения? Я предъявляю это решение и гарантирую, что оно построено правильно.” Конечно, если имеется возможность непосредственно убедиться, что найденное решение действительно удовлетворяет исходным уравнениям, то повод для сомнений отпадает. Однако, как правило, такая возможность существует только в очень простых случаях. Во многих случаях непосредственную проверку выполнить сложнее, чем решить задачу. Поэтому решение любой задачи должно начинаться с доказательства теоремы существования решения, ибо наличие такого доказательства означает, что поставленная нами задача имеет смысл. В рассматриваемой нами задаче теорема существования формулируется следующим образом: “Решение уравнения (3.5.3) существует, если выполнено условие  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ”. Если же последнее условие нарушено, то само уравнение (3.5.3) не имеет смысла, а, следовательно, и все операции над ним теряют смысл. Векторы (3.5.5) не удовлетворяют указанному выше условию существования решения. Найденное нами решение правильно, если  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . К сожалению, для многих нетривиальных задач механики доказательство теорем существования является трудно разрешимой проблемой. Поэтому приходится довольствоваться интуитивными соображениями.

Вернемся к решению задачи. Из общего решения (3.5.4) нам нужно выделить минимальное по модулю решение. Поскольку в нем стоит сумма ортогональных векторов, то справедлива теорема Пифагора, которая, разумеется, может быть установлена прямым вычислением  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$

$$|\mathbf{x}|^2 = \alpha^2 \mathbf{a}^2 + \frac{1}{\alpha^2} |\mathbf{b} \times \mathbf{a}|^2.$$

Минимум модуля достигается при  $\alpha = 0$ . Можно привести много дополнительных примеров, но мы ограничимся только приведенными иллюстрациями.

### 3.6 Базис. Взаимный базис. Замена базиса

Мы уже неоднократно упоминали, что рассматриваемое нами физическое пространство трехмерно, но в явном виде не использовали этого понятия.

**Определение:** векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  называются линейно независимыми, если равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — скаляры, возможно в том и только в том случае, когда  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ .

В трехмерном пространстве такие тройки линейно независимых векторов существуют, но любые четыре вектора являются линейно зависимыми. В противном случае, пространство, в котором существуют четверки линейно независимых векторов, было бы, как минимум, четырехмерным. Из определения линейной независимости векторов сразу же следует, что нулевой вектор не может входить в систему линейно независимых векторов. Геометрически линейная зависимость трех векторов означает, что все три вектора лежат в одной плоскости. Отсюда очевидна возможность дать другое определение линейно независимой системы трех векторов.

**Определение:** система трех векторов линейно независима тогда и только тогда, когда отлично от нуля смешанное произведение

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0. \quad (3.6.1)$$

Смысл этого определения становится очевидным, если вспомнить, что модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ .

**Определение:** любая тройка линейно независимых векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  называется базисом.

Название объясняется тем, что любой вектор  $\mathbf{a}$  может быть представлен в виде разложения по векторам базиса. В самом деле, любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы, т.е. равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \omega \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

возможно, когда не все скалярные коэффициенты равны нулю. Понятно, что  $\alpha \neq 0$ . В противном случае векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  были бы линейно зависимы. Поэтому из предыдущего равенства следует

$$\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{e}_1 - \frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{e}_2 - \frac{\omega}{\alpha} \mathbf{e}_3$$

или

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3; \quad a^1 \equiv -\frac{\beta}{\alpha}; \quad a^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}; \quad a^3 = -\frac{\omega}{\alpha},$$

где числа  $a^1, a^2, a^3$  называются координатами вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

Удобно использовать индексную запись:  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — означает тройку векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ;  $\mathbf{a}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — тройку чисел  $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ . Примем соглашение, что малые латинские индексы всегда пробегают значения 1, 2, 3 и отдельно оговаривать этого не будем. Таким образом,  $\mathbf{c}_i$  — означает тройку  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ . Теперь разложение вектора  $\mathbf{a}$  можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{a}^i \mathbf{e}_i \equiv \sum_{m=1}^3 \mathbf{a}^m \mathbf{e}_m \equiv \mathbf{a}^i \mathbf{e}_i \equiv \mathbf{a}^m \mathbf{e}_m. \quad (3.6.2)$$

Здесь мы приняли соглашение о суммировании Эйнштейна: если в одном выражении встречается пара одинаковых, но разновысоких, индексов, то по ним подразумевается суммирование от 1 до 3. Индекс суммирования называется немым, и его можно заменить на любой другой. Нельзя допускать в одном выражении двух одинаковых пар немых индексов, т.к. возникает неясность, по каким именно парам идет суммирование. Например, при вычислении скалярного произведения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$  нужно писать так:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{a}^n \mathbf{e}_n = \mathbf{a}^m \mathbf{a}^n \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv \sum_{m,n=1}^3 \mathbf{a}^m \mathbf{a}^n \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n.$$

Среди начинающих весьма популярна такая ошибка:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{b}^m \mathbf{i}_m = \mathbf{a}^m \mathbf{b}^m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{i}_m$$

и совершенно непонятно по каким индексам следует суммировать.

Как вычислить координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_i$ ? Возможны разные подходы. Стандартным подходом принято считать введение взаимного базиса к базису  $\mathbf{e}_i$ . Взаимный базис обозначается той же корневой буквой, но индекс ставится сверху, т.е. взаимный базис к базису  $\mathbf{e}_i$  обозначается через  $\mathbf{e}^m$ . Взаимный базис строится так, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^m = \begin{cases} 1, & m = i; \\ 0, & m \neq i, \end{cases} \quad (3.6.3)$$

где  $\delta_i^m$  называется символом Кронекера. В (3.6.3) содержатся девять равенств, которые получаются, если индексам  $m, i$  придавать различные значения от 1 до 3. Например, для вектора взаимного базиса  $\mathbf{e}^3$  имеем три равенства

$$\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0; \quad \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0; \quad \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1. \quad (3.6.4)$$

Из этих равенств видим, что  $\mathbf{e}^3$  ортогонален плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , и направлен так, чтобы угол между векторами  $\mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{e}^3$  был меньше

$\pi/2$ . Последнее следует из того, что

$$\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = |\mathbf{e}^3| |\mathbf{e}_3| \cos \theta = 1,$$

где  $\theta$  есть угол между векторами  $\mathbf{e}_3$  и  $\mathbf{e}^3$ , и косинус этого угла должен быть положительным. Поскольку этот угол не может быть больше  $\pi$ , то в этой области косинус положителен при углах, меньших  $\pi/2$ . По равенствам (3.6.4) видно, что взаимные векторы действительно существуют и строятся однозначно по векторам базиса  $\mathbf{e}_m$ .

*Упражнение: доказать равенства*

$$\mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}, \quad \mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}. \quad (3.6.5)$$

Допустим, что мы построили взаимный базис  $\mathbf{e}^n$ . Легко понять, что векторы  $\mathbf{e}^m$  линейно независимы, если  $\mathbf{e}_m$  — базис, поэтому использование для  $\mathbf{e}^s$  термина “базис” вполне оправдано. Таким образом, мы имеем два базиса, связанные соотношениями (3.6.3), что и оправдывает термин “взаимный (или дуальный) базис”. Вычислим координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_i$ . С этой целью вычислим скалярное произведение

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m = \mathbf{a}^s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}^m = \mathbf{a}^s \delta_s^m \equiv \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}^s \delta_s^m = \mathbf{a}^1 \delta_1^m + \mathbf{a}^2 \delta_2^m + \mathbf{a}^3 \delta_3^m = \mathbf{a}^m.$$

Последнее равенство в цепочке связано со свойством символа Кронекера: из трех слагаемых отлично от нуля только то, в котором символ Кронекера равен единице. Например,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{a}^s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}^2 = \mathbf{a}^s \delta_s^2 = \mathbf{a}^1 \delta_1^2 + \mathbf{a}^2 \delta_2^2 + \mathbf{a}^3 \delta_3^2 = \mathbf{a}^2.$$

Итак, координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_i$  вычисляются умножением вектора  $\mathbf{a}$  скалярно на векторы взаимного базиса  $\mathbf{e}^m$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^m \mathbf{e}_m; \quad \mathbf{a}^m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m.$$

Поскольку векторы взаимного базиса  $\mathbf{e}^m$  сами могут использоваться в качестве базиса, то вектор  $\mathbf{a}$  может быть представлен в виде разложения по векторам  $\mathbf{e}^i$ :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_m \mathbf{e}^m \equiv \mathbf{a}_1 \mathbf{e}^1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{e}^2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{e}^3,$$

где числа  $\mathbf{a}_m$  называются координатами вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}^s$ . Эти координаты  $\mathbf{a}_m$  уже в общем случае не совпадают с координатами  $\mathbf{a}^s$

вектора  $\mathbf{a}$  относительно исходного базиса  $\mathbf{e}_i$ , хотя и обозначается одной и той же корневой буквой, но индексы у них находятся в разных позициях: у одних — вверху, а у других — внизу. Таким образом, положение индекса (вверху или внизу) имеет значение, ибо  $\mathbf{a}^m \neq \mathbf{a}_m$ . Правило для постановки индекса (вверху или внизу) мы установим ниже. Для базиса  $\mathbf{e}^m$  взаимным оказывается базис  $\mathbf{e}_s$ , что сразу же дает нам возможность вычислить координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}^m$ :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m = \mathbf{a}_s \mathbf{e}^s \cdot \mathbf{e}_m = \mathbf{a}_s \delta_m^s = \mathbf{a}_m. \quad (3.6.6)$$

Полезно запомнить следующие часто используемые тождества:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_s) \mathbf{e}^s. \quad (3.6.7)$$

Иногда исходный и взаимный базисы совпадают. Это происходит тогда и только тогда, когда базис  $\mathbf{e}_i$  — ортонормирован, т.е. векторы  $\mathbf{e}_i$  являются единичными и попарно ортогональными между собой:

$$|\mathbf{e}_i| = 1; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m = 0 \quad (i \neq m). \quad (3.6.8)$$

В этом случае очевидно, что  $\mathbf{e}^m = \mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{a}^m = \mathbf{a}_m$  т.е. положение индекса становится безразличным. Именно этот случай чаще всего и используется в первоначальных курсах механики. Считается, что использование ортонормированных базисов упрощает изложение, ибо не нужно вводить взаимного базиса. Но на самом деле эти упрощения заметны тогда и только тогда, когда активно используются “фигуры умолчания”, т.е. сознательно не упоминаются достаточно важные обстоятельства. При обсуждении многих вопросов использование неортогональных базисов на самом деле облегчает положение. Поэтому мы будем использовать взаимный базис  $\mathbf{e}^m$  даже тогда, когда он совпадает с исходным ортонормированным базисом  $\mathbf{e}_m$ .

Важным является понятие фундаментальной матрицы

$$\mathbf{g}_{mn} \equiv \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n. \quad (3.6.9)$$

Мы используем, следуя традиции, термин “матрица” для совокупности девяти чисел  $\mathbf{g}_{mn}$ . Однако здесь имеется некоторое различие. Матрица порядка  $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$  — это таблица, содержащая  $\mathbf{N}$  строк и  $\mathbf{M}$  столбцов. При этом важно не путать их местами. Что касается фундаментальной матрицы (3.6.9), то это просто совокупность девяти чисел, которые совсем не обязательно представлять себе в виде таблицы  $3 \times 3$ . Никакие правила из теории матриц здесь не нужны. Все операции указываются в явном виде. Вместе с тем, иногда

удобно рассматривать  $\mathfrak{g}_{mn}$  и как матрицу. Следующие записи для нас будут эквивалентными:

$$\mathfrak{g}_{mn} \equiv (\mathfrak{g}_{mn}) \equiv \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_{11} & \mathfrak{g}_{12} & \mathfrak{g}_{13} \\ \mathfrak{g}_{21} & \mathfrak{g}_{22} & \mathfrak{g}_{23} \\ \mathfrak{g}_{31} & \mathfrak{g}_{32} & \mathfrak{g}_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.6.10)$$

В тех случаях, когда совокупность девяти чисел  $\mathfrak{g}_{mn}$  представляется в виде таблицы (квадратной матрицы  $3 \times 3$ ), мы будем считать, что первый индекс означает номер строки, а второй индекс — номер столбца. Смысл фундаментальной матрицы  $\mathfrak{g}_{mn}$  ясен из определения (3.6.9) и тождества (1.5.7):

$$\mathbf{e}_m = (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}^n = \mathfrak{g}_{mn} \mathbf{e}^n = \mathfrak{g}_{m1} \mathbf{e}^1 + \mathfrak{g}_{m2} \mathbf{e}^2 + \mathfrak{g}_{m3} \mathbf{e}^3. \quad (3.6.11)$$

Иными словами,  $\mathfrak{g}_{mn}$  это коэффициенты разложения векторов исходного базиса по векторам взаимного базиса. Точно также можно ввести в рассмотрение взаимную фундаментальную матрицу.

$$\mathfrak{g}^{mn} \equiv \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^n, \quad \mathbf{e}^m = (\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^n) \mathbf{e}_n = \mathfrak{g}^{mn} \mathbf{e}_n, \quad (3.6.12)$$

элементы которой являются коэффициентами разложения векторов взаимного базиса по векторам исходного базиса. Ясно, что матрицы  $\mathfrak{g}^{mn}$  и  $\mathfrak{g}_{pk}$  как-то связаны между собой, поскольку векторы взаимного базиса строятся по векторам исходного базиса однозначно. Эта связь немедленно вытекает из (3.6.3), (3.6.11) и (3.6.9). В самом деле, мы имеем

$$\mathbf{e}^p \cdot \mathbf{e}_q = (\mathfrak{g}^{pm} \mathbf{e}_m) \cdot (\mathfrak{g}_{qs} \mathbf{e}^s) = \mathfrak{g}^{pm} \mathfrak{g}_{qs} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^s = \mathfrak{g}^{pm} \mathfrak{g}_{qs} \delta_m^s = \mathfrak{g}^{pm} \mathfrak{g}_{qm} = \delta_q^p. \quad (3.6.13)$$

Иными словами, матрицы  $\mathfrak{g}^{mn}$  и  $\mathfrak{g}_{pq}$  взаимно обратны. Обратим внимание, что здесь слегка нарушено матричное правило: умножаются не строки на столбцы, а столбцы на столбцы. Это произошло потому, что в данном случае мы так ввели матрицы  $\mathfrak{g}_{mn}$  и  $\mathfrak{g}^{mn}$ . Можно было бы ввести их чуть-чуть иначе, и матричное правило было бы соблюдено. Сделали мы это сознательно, чтобы еще раз подчеркнуть, что матричные правила здесь не нужны: все операции указаны в (3.6.13) явно. Обратим внимание на то, что объекты  $\mathfrak{g}_{mn}$  и  $\mathfrak{g}^{pq}$  симметричны относительно индексов

$$\mathfrak{g}_{mn} = \mathfrak{g}_{nm}; \quad \mathfrak{g}^{pq} = \mathfrak{g}^{qp}. \quad (3.6.14)$$

Поэтому (3.6.13) можно переписать в эквивалентных формах

$$\mathfrak{g}^{pq} \mathfrak{g}_{qm} = \mathfrak{g}^{pq} \mathfrak{g}_{mq} = \mathfrak{g}^{qp} \mathfrak{g}_{mq} = \delta_m^p. \quad (3.6.15)$$

Введем обозначения

$$g \equiv \det(g_{mn}) \equiv \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.6.16)$$

**Упражнения:** 1) доказать справедливость утверждения

$$g = |(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3|^2 > 0; \quad (3.6.17)$$

2) доказать равенство

$$\frac{1}{g} = \det(g^{mn}) \equiv \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix}. \quad (3.6.18)$$

**Замечание:** соотношение (3.6.17) будет доказано в конце этой главы. Если совокупность девяти чисел  $g_{mn}$  задана, т.е. заданы векторы базиса  $\mathbf{e}_m$  и по ним найдены  $g_{mn}$ , то совокупность чисел  $g^{mn}$  находится очень легко по правилам, даваемым теорией матриц, а именно,

$$g^{mn} = \text{кофактор}(g_{nm})/g, \quad (3.6.19)$$

где кофактор  $(g_{ij})$  есть определитель, полученный из (3.6.16) вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, умноженный на  $(-1)^{i+j}$ . Например,

$$g^{13} = \frac{1}{g}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} = \frac{g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}}{g}.$$

Следует обратить внимание на индексы в (3.6.19): при построении элемента  $g^{rs}$  кофактор находится для элемента  $g_{sr}$ . Впрочем, поскольку матрица  $g_{mn}$  симметрична, то это обстоятельство в данном случае не имеет значения. Таким образом, построение взаимного базиса  $\mathbf{e}^s$  сводится к выполнению следующих шагов: 1) по  $\mathbf{e}_m$  вычисляется  $g_{st} = \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_t$ ; 2) по (3.6.16) находится  $g = \det(g_{mn})$ ; 3) по (3.6.19) вычисляются  $g^{st}$ ; 4) по (3.6.12) строятся  $\mathbf{e}^m = g^{mp}\mathbf{e}_p$ . Для нас важна не столько процедура построения взаимного базиса, сколько его существование и единственность.

**Упражнение:** доказать формулы для координат

$$\mathbf{a}_m = g_{mp}\mathbf{a}^p; \quad \mathbf{a}^p = g^{pq}\mathbf{a}_q. \quad (3.6.20)$$

Как видим, координаты  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_m$  однозначно связаны с координатами  $\mathbf{a}$  относительно взаимного базиса  $\mathbf{e}^m$ . До сих пор мы использовали

верхние и нижние индексы без каких-либо объяснений. Это было возможно, т.к. величины  $\mathbf{a}_m$  и  $\mathbf{a}^n$  рассматривались нами просто как различные тройки чисел. Теперь настала пора ввести строгое правило для определения положения индекса: вверху или внизу. В дальнейшем положение индекса будет нести вполне определенный смысл, и станет ясно, почему правило суммирования Эйнштейна распространяется только на разновысокие индексы. Для этого необходимо установить, как и на что влияет замена базиса. Ведь выбор базиса является нашим произволом, поэтому сам вектор  $\mathbf{a}$  не может меняться при замене базиса. В то же время координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_m$  при замене последнего меняются, но меняется так, чтобы сумма  $\mathbf{a}^m \mathbf{e}_m$  при этом не менялась.

Пусть дан базис  $\mathbf{e}_m$ . Вместо этого базиса мы можем ввести новый базис  $\mathbf{e}_{p'}^*$ . Новый базис удобнее обозначать не заменой корневой буквы ( $\mathbf{e}$  на  $\mathbf{e}^*$ ), а постановкой штриха у индекса:  $\mathbf{e}_{p'}^* \equiv \mathbf{e}_{p'} : (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'})$ . Векторы  $\mathbf{e}_{p'}$  нового базиса могут быть представлены в виде разложения по векторам старого базиса  $\mathbf{e}_s$

$$\mathbf{e}_{m'} = h_{m'}^n \mathbf{e}_n \quad (h_{m'}^n = \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}^n). \quad (3.6.21)$$

И, наоборот, векторы старого базиса могут быть представлены в виде разложения по векторам нового базиса

$$\mathbf{e}_n = h_n^{m'} \mathbf{e}_{m'} \quad (h_n^{m'} = \mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_{m'}). \quad (3.6.22)$$

Совокупности чисел  $h_{m'}^n$  и  $h_n^{m'}$  — суть различные совокупности, но они тесно связаны между собой:

$$h_{p'}^n h_m^{p'} = (\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_{p'}) (\mathbf{e}^{p'} \cdot \mathbf{e}_m) \equiv \mathbf{e}^n \cdot [\mathbf{e}_{p'} (\mathbf{e}^{p'} \cdot \mathbf{e}_m)] = \mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_m = \delta_m^n; \quad (3.6.23)$$

$$h_p^n h_n^{t'} = (\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_{p'}) (\mathbf{e}^{t'} \cdot \mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_{p'} \cdot [\mathbf{e}^n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^{t'})] = \mathbf{e}_{p'} \cdot \mathbf{e}^{t'} = \delta_p^{t'}. \quad (3.6.24)$$

Если совокупности  $h_n^{m'}$  и  $h_{p'}^n$  воспринимать как матрицы, то соотношения (3.6.23) и (3.6.24) показывают, что эти матрицы взаимно обратны. Совокупность чисел  $h_{m'}^n$ , входящую в преобразование (3.6.21), будем называть матрицей прямого преобразования, а совокупность  $h_p^{n'}$ , входящую в обратное преобразование (3.6.22), будем называть матрицей обратного преобразования. Итак, связь между старым и новым базисами дается формулами (3.6.21) и (3.6.22). Выясним, как связаны между собой старый и новый взаимные базисы. По определению взаимного базиса имеем

$$\mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_{n'} = \delta_n^m.$$



Умножая эти уравнения на  $\mathbf{h}_p^{n'}$  и суммируя по  $\mathbf{n}$ , получаем

$$\mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_n \mathbf{h}_p^{n'} = \delta_n^m \mathbf{h}_p^{n'} = \mathbf{h}_p^{m'} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_p = \mathbf{h}_p^{m'}.$$

Умножая последнее равенство на  $\mathbf{e}^p$  и вспоминая тождества (3.6.7), получаем

$$\mathbf{e}^{m'} = \mathbf{h}_p^{m'} \mathbf{e}^p. \quad (3.6.25)$$

Таким образом, если новый и старый основные базисы связаны прямым преобразованием, то новый и старый взаимные базисы связаны обратным преобразованием. Формулы преобразования (3.6.21) и (3.6.25) являются ключом для правила расстановки индексов (вверху или внизу). Рассмотрим некую тройку чисел  $\mathbf{c}(\mathbf{e}_m)$ , зависящую от выбора базиса. Зависимость от базиса обычно указывается индексом  $\mathbf{c}(\mathbf{e}_m) \equiv \mathbf{c}_{(m)}$ .

**Определение:** если тройка чисел  $\mathbf{c}_{(m)}$  при замене базиса преобразуется в соответствии с законом (3.6.21)

$$\mathbf{c}_{(m')} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{h}_{m'}^n \mathbf{c}_{(n)},$$

то она называется ковариантным объектом первого порядка (порядок объекта определяется числом индексов:  $\mathbf{a}_m$  — объект первого порядка;  $\mathbf{g}_{mn}$  — объект второго порядка). Индекс у ковариантного объекта ставится внизу:  $\mathbf{c}_{(m)} = \mathbf{c}_m$ . Смысл термина “ковариантный” означает, что объект меняется по тому же закону, что и базис.

**Определение:** если тройка чисел  $\mathbf{c}_{(m)}$  при замене базиса преобразуется в соответствии с законом (3.6.25)

$$\mathbf{c}_{(m')} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{h}_n^{m'} \mathbf{c}_{(n)},$$

то она называется контравариантным объектом первого порядка. Индекс у контравариантного объекта ставится сверху:  $\mathbf{c}^{(m)} = \mathbf{c}^m$ . Термин “контравариантность” означает, что объект при замене базиса преобразуется по закону, противоположному (обратному) закону преобразования базиса. Если, наконец, тройка чисел  $\mathbf{c}_{(m)}$  при замене базиса преобразуется по закону, отличному от (3.6.21) или (3.6.25), то такой объект первого порядка называется нетензорным и индекс у него заключается в скобки  $\mathbf{c}^{(m)}$  или  $\mathbf{c}_{(m)}$ . В этом случае расположение индекса не несет смысловой нагрузки. Рассмотрим с этой точки зрения координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_m$ ,

т.е. числа  $\mathbf{a}^m$ . Относительно старого базиса они определяются формулой  $\mathbf{a}^m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m$ . Относительно нового базиса они определяются аналогичной формулой  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{m'} \mathbf{e}_{m'} \Rightarrow \mathbf{a}^{m'} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{m'}$ . Сам вектор  $\mathbf{a}$  от выбора базиса не зависит. Учитывая формулу (3.6.25), имеем

$$\mathbf{a}^{m'} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{m'} = \mathbf{a} \cdot h_p^{m'} \mathbf{e}^p = h_p^{m'} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^p = h_p^{m'} \mathbf{a}^p.$$

Из этой формулы видим, что  $\mathbf{a}^m$  является контравариантным объектом первого порядка и верхнее положение индекса у него оправдано. По этой причине координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_m$  называются контравариантными координатами вектора.

**Упражнение:** доказать, что координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно взаимного базиса, т.е. числа,  $\mathbf{a}_m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m$ , преобразуются при замене базиса по формулам

$$\mathbf{a}_{m'} = h_{m'}^p \mathbf{a}_p.$$

Поэтому координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно взаимного базиса  $\mathbf{e}^p$  называются ковариантными координатами  $\mathbf{a}$ . Теперь уже легко понять, каким образом вектор  $\mathbf{a}$ , представленный в виде разложения по величинам, меняющимся при замене базиса, тем не менее от выбора базиса не зависит:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{m'} \mathbf{e}_{m'} = h_p^{m'} \mathbf{a}^p h_m^q \mathbf{e}_q = h_p^{m'} h_m^q \mathbf{a}^p \mathbf{e}_q = \delta_p^q \mathbf{a}^p \mathbf{e}_q = \mathbf{a}^p \mathbf{e}_p.$$

Природа этого обстоятельства состоит в том, что базис  $\mathbf{e}_p$  и координаты вектора  $\mathbf{a}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_p$  меняются по взаимно обратным законам, так что изменение одного компенсируется изменением другого. Также понятным становится и соглашение о суммировании, которое распространяется на разновысокие индексы: только такие суммы дают в результате величины, которые не зависят от выбора базиса и, следовательно, могут претендовать на физический смысл. Фундаментальная матрица  $g_{mn}$  есть ковариантный объект второго порядка или, что то же самое, дважды ковариантный объект:

$$g_{m'n'} = \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}_{n'} = h_m^p h_n^q \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_q = h_m^p h_n^q g_{pq}.$$

Обратим внимание, что каждый индекс преобразуется независимо друг от друга по закону преобразования базиса. Взаимная фундаментальная матрица является дважды контравариантным объектом:

$$g^{m'n'} = \mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}^{n'} = h_p^{m'} h_q^{n'} \mathbf{e}^p \cdot \mathbf{e}^q = h_p^{m'} h_q^{n'} g^{pq}.$$

Ранее в рассмотрение был введен символ Кронекера  $\delta_n^m$  как совокупность девяти чисел, из которых три равны единице, а остальные шесть равны нулю.

Вообще говоря, это совокупность девяти чисел никак не связана с выбором базиса и его заменами. Однако легко убедиться, что символ Кронекера можно рассматривать как смешанный объект второго порядка: один раз ковариантный и один раз контравариантный. Действительно, можно рассуждать следующим образом. Будем рассматривать  $\delta_n^m$  как совокупность, данную в выбранном базисе  $\mathbf{e}_m$ , и потребуем, чтобы при замене базиса она менялась в соответствии с законами, по которым меняются ковариантные и контравариантные индексы. Тогда в другом базисе мы получим уже какой-то другой объект  $\mathbf{a}_n^m$ :

$$\mathbf{a}_{n'}^{m'} = h_p^{m'} h_n^q \delta_q^p = h_p^{m'} h_n^p = \delta_{n'}^{m'} = \delta_n^m.$$

Таким образом, данная выкладка показала, что в результате перехода мы получили не “какой-то другой объект  $\mathbf{a}_n^m$ ”, а вновь пришли к исходному символу Кронекера, т.е. той же совокупности девяти чисел, состоящей из трех единиц и шести нулей. Это не случайность. На самом деле, как мы увидим в следующей главе, все рассмотренные нами объекты второго порядка  $\mathbf{g}_{mn}$ ,  $\mathbf{g}^{mn}$ ,  $\delta_n^m$  являются координатами одного и того же объекта, а именно, единичного тензора второго ранга. Поэтому  $\delta_n^m$  уместно назвать смешанной фундаментальной матрицей, но это название в литературе не используется. Можно ввести объекты более высоких порядков. Правила (3.6.21) и (3.6.25), использованные для объектов первого порядка, могут применяться и для объектов произвольного порядка.

**Определение:** объект  $C_{m_1 m_2 \dots m_q}^{n_1 n_2 \dots n_p}$ , который имеет  $p$  верхних индексов и  $q$  нижних индексов, и является, таким образом, объектом порядка  $s = p + q$ , называется  $p$  раз контравариантным и  $q$  раз ковариантным, если при замене базиса выполняются следующие соотношения:

$$C_{m'_1 m'_2 \dots m'_q}^{n'_1 n'_2 \dots n'_p} = \underbrace{h_{t_1}^{n'_1} h_{t_2}^{n'_2} \dots h_{t_p}^{n'_p}}_{p \text{ множителей}} \underbrace{h_{m'_1}^{s_1} h_{m'_2}^{s_2} \dots h_{m'_q}^{s_q}}_{q \text{ множителей}} C_{s_1 s_2 \dots s_q}^{t_1 t_2 \dots t_p}.$$

### 3.7 Обобщенные символы Кронекера

В этом параграфе будут введены некие формальные символы, которые часто облегчают конкретные вычисления. Одним из таких символов является обобщенный символ Кронекера  $\delta_{mnp}^{ijk}$ , вводимый как определитель, элементами которого являются обычные символы Кронекера

$$\delta_{mnp}^{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_m^i & \delta_n^i & \delta_p^i \\ \delta_m^j & \delta_n^j & \delta_p^j \\ \delta_m^k & \delta_n^k & \delta_p^k \end{vmatrix}. \quad (3.7.1)$$

Из определения видно, что  $\delta_{mnp}^{ijk}$  является объектом шестого порядка, который антисимметричен по верхним и нижним индексам, т.к. при перемене местами двух соседних (нижних) индексов  $\delta_{mnp}^{ijk}$  меняет знак:

$$\delta_{mnp}^{ijk} = -\delta_{mnp}^{jik} = -\delta_{nmp}^{ijk} = -\delta_{mpr}^{ijk} \quad \text{и т.д.} \quad (3.7.2)$$

Менять местами верхние и нижние индексы нужды не возникает. Из (3.7.1) видим, что перемена верхних индексов эквивалентна перемене местами соседних строк, а перемена нижних индексов эквивалентна перемене положений соседних столбцов. Символ  $\delta_{rst}^{mnp}$  есть совокупность  $3^6 = 729$  чисел, все они по модулю равны либо нулю, либо единице. Причем только 36 составляющих отличны от нуля и равны либо  $+1$ , либо  $-1$ . Нулю равны все компоненты, у которых есть два одинаковых верхних (или нижних) индекса. Например,

$$\delta_{mnp}^{11k} = 0; \quad \delta_{mnp}^{1j1} = 0; \quad \delta_{2n2}^{ijk} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Отличны от нуля только те компоненты, у которых все верхние и все нижние индексы различны. Например,

$$\delta_{123}^{123} = 1 = \delta_{123}^{312} = \delta_{132}^{321}; \quad \delta_{213}^{123} = \delta_{213}^{312} = \delta_{231}^{123} = -1.$$

Используя определение (3.7.1), нетрудно установить следующие полезные формулы:

$$\begin{aligned} \delta_{mnk}^{ijk} &= \delta_{mn1}^{ij1} + \delta_{mn2}^{ij2} + \delta_{mn3}^{ij3} = \delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j; \\ \delta_{mjk}^{ijk} &= \delta_m^i \delta_j^j - \delta_j^i \delta_m^j = 3\delta_m^i - \delta_m^i = 2\delta_m^i; \\ \delta_{ijk}^{ijk} &= 2\delta_i^i = 6. \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Конечно, среднюю часть этих равенств можно было бы не писать. Мы написали ее, чтобы обратить внимание на соглашение о суммировании. Следующие символы играют важную роль и часто встречаются в приложениях:

$$e_{mnp} \equiv \delta_{mnp}^{123}; \quad e^{mnp} = \delta_{123}^{mnp}. \quad (3.7.4)$$

*Упражнение. Доказать формулу*

$$\delta_{mnp}^{ijk} = e^{ijk} e_{mnp}. \quad (3.7.5)$$

Легко убедиться в справедливости равенств

$$\begin{aligned} e_{123} &= e_{312} = e_{231} = -e_{132} = -e_{213} = -e_{321} = 1; \\ e^{123} &= e^{312} = e^{231} = -e^{132} = -e^{213} = -e^{321} = 1. \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Остальные компоненты символов  $e_{mnp}$  и  $e^{ijk}$  равны нулю. Символы  $e_{mnp}$  и  $e^{ijk}$  называются символами Риччи или символами перестановок. Эти символы удобны при вычислении определителей, кофакторов и т.д. Рассмотрим, например, матрицу

$$(a_{im}) \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.7.7)$$

Определитель этой матрицы будем обозначать через  $a$

$$a \equiv \det(a_{im}) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (3.7.8)$$

Легко убедиться в справедливости следующих формул:

$$a = e^{mnp} a_{1m} a_{2n} a_{3p} = e^{mnp} a_{m1} a_{n2} a_{p3}; \quad (3.7.9)$$

$$a e^{ijk} = e^{mnp} a_{im} a_{jn} a_{kp} = e^{mnp} a_{mi} a_{nj} a_{pk}; \quad (3.7.10)$$

$$a = \frac{1}{6} e^{ijk} e^{mnp} a_{im} a_{jn} a_{kp}. \quad (3.7.11)$$

Формулы типа (3.7.9)–(3.7.11) удобны для различных целей. Например, пусть требуется вычислить производную от определителя по элементу  $a_{rs}$  ( $r$  и  $s$  выбранные фиксированные индексы, например,  $r = 2, s = 3$ ). Воспользуемся формулой (3.7.11) и запишем

$$A^{sr} \equiv \frac{\partial a}{\partial a_{rs}} = \frac{1}{6} e^{ijk} e^{mnp} \left( \frac{\partial a_{im}}{\partial a_{rs}} a_{jn} a_{kp} + a_{im} \frac{\partial a_{jn}}{\partial a_{rs}} a_{kp} + a_{im} a_{jk} \frac{\partial a_{kp}}{\partial a_{rs}} \right). \quad (3.7.12)$$

Учтем теперь, что производная  $\partial a_{im} / \partial a_{rs}$  отлична от нуля тогда и только тогда, когда  $i = r$  и  $s = m$ :

$$\frac{\partial a_{im}}{\partial a_{rs}} = \delta_i^r \delta_m^s.$$

Обратим внимание на положение индексов в этой формуле: индексы  $r, s$  расположены внизу в левой части, но в знаменателе, поэтому в правой части они расположены сверху. Вернемся к формуле (3.7.12). Заменяя в ней производные их представлениями через символ Кронекера, получаем

$$\begin{aligned} A^{sr} &= \frac{1}{6} e^{ijk} e^{mnp} (\delta_i^r \delta_m^s a_{jn} a_{kp} + a_{im} \delta_j^r \delta_n^s a_{kp} + a_{im} a_{jn} \delta_k^r \delta_p^s) = \\ &= \frac{1}{6} [e^{rjk} e^{snp} a_{jn} a_{kp} + e^{irk} e^{msp} a_{im} a_{kp} + e^{ijk} e^{mns} a_{im} a_{jn}]. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что все слагаемые в квадратных скобках равны друг другу. Покажем, например, что второе слагаемое равно первому. Заметим, что индексы  $i$  и  $m$  немые и их можно заменить на любые другие. Заменим их так:  $i \rightarrow j$ ,  $m \rightarrow n$ . Тогда получим

$$e^{irk} e^{msp} a_{im} a_{kp} = e^{jrk} e^{nsp} a_{jn} a_{kp} = (-e^{rjk})(-e^{snp}) a_{jn} a_{kp} = e^{rjk} e^{snp} a_{jn} a_{kp},$$

т.е. переобозначением пришли к первому слагаемому. Итак, получили

$$A^{sr} = \frac{1}{2} e^{rjk} e^{snp} a_{jn} a_{kp}. \quad (3.7.13)$$

Выясним смысл этой формулы. Для этого вычислим выражение

$$A^{sr} a_{rt} = \frac{1}{2} e^{rjk} e^{snp} a_{rt} a_{jn} a_{kp} = \frac{1}{2} e^{snp} a e_{tnp} = \frac{1}{2} a \delta_{tnp}^{snp} = a \delta_t^s. \quad (3.7.14)$$

Здесь мы сначала воспользовались формулой (3.7.10), а затем формулой (3.7.3). Таким образом, мы обнаружили, что  $A_*^{sr} = A^{sr}/a$  являются элементами матрицы, обратной к матрице из элементов  $a_{rs}$ . Сама же величина  $A^{sr}$  есть кофактор к элементу  $a_{rs}$ . Поэтому кофактор  $A^{sr}$  к элементу  $a_{rs}$  есть производная от определителя по элементу  $a_{rs}$ . Если теперь в (3.7.14) положить  $s = t$ , т.е. просуммировать по индексам  $s$  и  $t$ , то получим

$$a = \frac{1}{3} A^{sr} a_{rs}.$$

Существует множество других полезных представлений для определителей, кофакторов, и т.п., использующих символы Риччи. Желаящих расширить свое образование в этой области мы отсылаем к первой главе книги [50], а также к книге [9]. Введем в рассмотрение символы Леви-Чивиты, которые являются смешанными произведениями базисных векторов

$$\varepsilon_{mnp} = (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_p, \quad (3.7.15)$$

$$\varepsilon^{mnp} = (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n) \cdot \mathbf{e}^p. \quad (3.7.16)$$

Когда мы вводили символы Риччи  $e_{mnp}$  и  $e^{mnp}$ , то рассматривали их просто как формальные символы и не связывали их с базисами, заменами базисов и т.д. Поэтому индексы у этих символов нужно было бы заключать в скобки, ибо эти символы не являются ни ковариантными, ни контравариантными объектами. В отличие от символов Риччи символы Леви-Чивиты являются:  $\varepsilon_{mnp}$  — ковариантный объект третьего порядка,  $\varepsilon^{mnp}$  — контравариантный объект третьего порядка.

**Упражнение:** доказать эти утверждения, воспользовавшись определениями (3.7.15), (3.7.16) и формулами замены базиса (3.6.21) и (3.6.25).

Из определения (3.7.15) и свойств смешанного произведения векторов следует, что компоненты  $\varepsilon_{mnp}$  равны нулю, если среди индексов есть равные. Далее, если переставить местами два соседних индекса, то  $\varepsilon_{mnp}$  меняет знак. В таких случаях говорят, что  $\varepsilon_{mnp}$  есть абсолютно кососимметричный объект третьего порядка. У такого объекта имеется только одна существенная и отличная от нуля компонента. Поэтому справедливы формулы

$$\varepsilon_{mnp} = \varepsilon_{123} \mathbf{e}_{mnp}; \quad \varepsilon^{mnp} = \varepsilon^{123} \mathbf{e}^{mnp}. \quad (3.7.17)$$

**Упражнение:** доказать формулы (3.7.17).

Используя (3.7.15), (3.7.16) и тождество (3.6.7), получаем важные формулы для векторных произведений базисных векторов

$$\varepsilon_{mnp} \mathbf{e}^p = [(\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_p] \mathbf{e}^p = (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n); \quad (3.7.18)$$

$$\varepsilon^{mnp} \mathbf{e}_p = [(\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n) \cdot \mathbf{e}^p] \mathbf{e}_p = (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n). \quad (3.7.19)$$

Из формул (3.7.17) и (3.7.5), (3.7.3) немедленно следует, что

$$\varepsilon_{mnp} \varepsilon^{mnp} = \varepsilon_{123} \varepsilon^{123} \mathbf{e}_{mnp} \mathbf{e}^{mnp} = \varepsilon_{123} \varepsilon^{123} \delta_{mnp}^{mnp} = 6 \varepsilon_{123} \varepsilon^{123}.$$

С другой стороны, прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mnp} \varepsilon^{mnp} &= [(\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_p] [\mathbf{e}^p \cdot (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n)] = (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \cdot (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n) = \\ &= \mathbf{e}_m \cdot [\mathbf{e}_n \times (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n)] = \mathbf{e}_m \cdot [\mathbf{e}^m (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^n) - \mathbf{e}^n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^m)] = \mathbf{e}_m \cdot (3\mathbf{e}^m - \mathbf{e}^m) = 6. \end{aligned}$$

Здесь при вычислениях мы сначала воспользовались тождеством (3.6.7), затем свойством смешанного произведения, а потом определением взаимного базиса (3.6.3). Сравнивая между собой два результата вычислений свертки  $\varepsilon^{mnp} \varepsilon_{mnp}$ , получаем равенство

$$\varepsilon_{123} \varepsilon^{123} = 1. \quad (3.7.20)$$

Теперь нам остается вычислить число  $\varepsilon_{123}$ . Для этой цели найдем определитель фундаментальной матрицы  $\mathbf{g} = \det(\mathbf{g}_{mn})$ ,  $\mathbf{g}_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n$ . Используя (3.7.9), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \varepsilon^{mnp} \mathbf{g}_{1m} \mathbf{g}_{2n} \mathbf{g}_{3p} = \varepsilon^{123} \varepsilon_{123} \varepsilon^{mnp} \mathbf{g}_{1m} \mathbf{g}_{2n} \mathbf{g}_{3p} = \varepsilon_{123} \varepsilon^{mnp} \mathbf{g}_{1m} \mathbf{g}_{2n} \mathbf{g}_{3p} \\ &= \varepsilon_{123} [\varepsilon^{mnp} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_m] \mathbf{g}_{2n} \mathbf{g}_{3p} = \varepsilon_{123} (\mathbf{e}^n \times \mathbf{e}^p) \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{g}_{2n} \mathbf{g}_{3p} \\ &= \varepsilon_{123} \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{g}_{2n} \mathbf{e}^n \times \mathbf{g}_{3p} \mathbf{e}^p) = \varepsilon_{123} \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = [(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3]^2 > 0. \end{aligned}$$

Здесь мы попутно доказали результат (3.6.17). Итак, для  $\varepsilon_{123}$  получили выражение

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon \sqrt{g}; \quad \varepsilon^{123} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}},$$

где  $\varepsilon = +1$ , если тройка  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — правая и  $\varepsilon = -1$ , если тройка  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — левая. Окончательно для символов Леви-Чивиты получаем представления

$$\varepsilon_{mnp} = \varepsilon \sqrt{g} e_{mnp}; \quad \varepsilon^{mnp} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} e^{mnp}. \quad (3.7.21)$$

Символы Леви-Чивиты используются при вычислениях векторных произведений

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a^n \mathbf{e}_n \times b^p \mathbf{e}_p = a^n b^p \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_p = a^n b^p \varepsilon_{npm} \mathbf{e}^m = c_m \mathbf{e}^m \\ &\implies c_m = \varepsilon_{mnp} a^n b^p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= a_n \mathbf{e}^n \times b_p \mathbf{e}^p = a_n b_p \mathbf{e}^n \times \mathbf{e}^p = a_n b_p \varepsilon^{npm} \mathbf{e}_m = c^m \mathbf{e}_m \\ &\implies c^m = \varepsilon^{mnp} a_n b_p. \end{aligned}$$

В заключении этого пункта стоит отметить факт, который внимательный читатель уже, видимо, отметил для себя: определитель фундаментальной матрицы  $\mathbf{g} \equiv \det(\mathbf{g}_{mn})$  не является скаляром. Действительно, скаляр  $\alpha$  есть такая величина, которая не зависит от выбора базиса. Например, скаляром является длина вектора  $\mathbf{a}$ :

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^n \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_s a^s = a^n a_n = a^n a^m g_{nm} = a_n a_m g^{nm}.$$

Посмотрим, как ведет себя определитель фундаментальной матрицы

$$\begin{aligned} g' &= \det(\mathbf{g}_{m'n'}) = \det(\mathbf{h}_m^p, \mathbf{h}_n^q, \mathbf{g}_{pq}) = e^{ijk} h_1^p h_i^t g_{pt} h_2^q h_j^s g_{qs} \cdot h_3^u h_k^v g_{uv} = \\ &= e^{ijk} h_i^t h_j^s h_k^v h_1^p h_2^q h_3^u g_{pt} g_{qs} g_{uv} = \det(\mathbf{h}_{m'}^r) e^{tsv} g_{pt} g_{qs} g_{uv} h_1^p h_2^q h_3^u = \\ &= \det(\mathbf{h}_{m'}^r) \det(\mathbf{g}_{st}) \cdot e_{pqu} h_1^p h_2^q h_3^u = [\det(\mathbf{h}_{m'}^r)]^2 g. \end{aligned}$$

Итак,  $g' \neq g$  и определитель фундаментальной матрицы не является скаляром.

*Упражнения: доказать формулы*

а)  $\det(\mathbf{h}_{m'}^n) = \varepsilon^{123} \varepsilon_{1'2'3'} = \varepsilon \varepsilon' \sqrt{g'/g}$ ;

б)  $\det(\mathbf{h}_{m'}^n) = \varepsilon_{123} \varepsilon^{1'2'3'} = \varepsilon \varepsilon' \sqrt{g/g'}$ , где  $\varepsilon' = +1$ , если  $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$  — правая тройка и  $\varepsilon' = -1$ , если  $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$  — левая тройка;

в)  $\mathbf{e}^p = \frac{1}{2} \varepsilon^{mnp} \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n$ ;

г)  $\varepsilon_{123} \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$ ;  $\varepsilon_{123} \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ ;  $\varepsilon_{123} \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ .



## 3.8 Векторные функции скалярного аргумента

### 3.8.1 Дифференцирование векторных функций

Многие физические характеристики описываются векторными функциями скалярного аргумента. Последние суть отображения  $T_0 \rightarrow T_1$ . Иными словами, пусть дана скалярная величина  $\mathbf{t}$ , принимающая значения из интервала  $I \in T_0$ . Сопоставим каждому значению  $\mathbf{t}$  вектор  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ .

$$\mathbf{t} \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{t}). \quad (3.8.1)$$

Отображение (3.8.1) предполагается однозначным, т.е. каждому значению  $\mathbf{t}$  сопоставляется один и только один вектор  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ . Однако однозначная обратимость отображения (3.8.1) не обязательна, т.е. данному вектору  $\mathbf{R}(\mathbf{t}_1)$ , вычисленному при  $\mathbf{t}_1$ , могут отвечать и другие значения переменной  $\mathbf{t}$ . При дальнейшем изложении материала этого пункта будем для наглядности рассматривать конкретную реализацию отображения (3.8.1). А именно, скалярную переменную  $\mathbf{t}$  будем трактовать, как время, а в качестве векторной функции  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$  будем рассматривать вектор положения материальной точки. Очевидно, что для всех других реализации отображения (3.8.1) все сказанное ниже останется справедливым без всяких изменений. Прежде всего, введем операцию дифференцирования векторных функций скалярного аргумента. Производные от них вводятся вполне стандартным образом, который не отличается от скалярного случая

$$\frac{d\mathbf{R}(\mathbf{t})}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{t} + \Delta t) - \mathbf{R}(\mathbf{t})}{\Delta t}. \quad (3.8.2)$$

Далее мы предполагаем, что функция  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$  непрерывно дифференцируема нужное число раз. Иными словами, предполагается существование предела в правой части (3.8.2) и других пределов, которые встретятся ниже. В механике первая производная от вектора положения называется скоростью, которая, очевидно, является векторной величиной и обозначается символом  $\mathbf{V}(\mathbf{t})$ . Первая производная от вектора скорости  $\mathbf{V}(\mathbf{t})$  называется ускорением  $\mathbf{W}(\mathbf{t})$

$$\mathbf{W}(\mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{t})}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(\mathbf{t} + \Delta t) - \mathbf{V}(\mathbf{t})}{\Delta t} = \frac{d^2\mathbf{R}(\mathbf{t})}{dt^2}. \quad (3.8.3)$$

Таким образом, ускорение дает нам пример второй производной от вектора положения. При непрерывном изменении аргумента  $\mathbf{t}$  конец вектора положения  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$  опишет в системе отсчета некую кривую, которая называется траекторией материальной точки. Заметим, что траектория частицы, будучи

линией в системе отсчета, не зависит от времени. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим данный вопрос подробнее и заодно познакомимся с одним из способов задания кривых в трехмерном пространстве. Начнем с нескольких простых примеров конкретных векторных функций скалярного аргумента.

**Пример 1. Прямолинейное равномерное движение частицы.** Такое движение частицы определяется заданием функции

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}t\mathbf{e}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1, \quad (3.8.4)$$

где  $\mathbf{R}_0$  определяет положение частицы при  $t = 0$ , параметр  $\mathbf{v}$  есть постоянная величина, а  $\mathbf{e}$  — заданный единичный вектор, который не зависит от параметра  $t$ . Согласно (3.8.2) и (3.8.3) для векторов скорости и ускорения имеем

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}\mathbf{e}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{0}. \quad (3.8.5)$$

Таким образом, частица движется с постоянной скоростью  $\mathbf{V}$ , а ее траектория есть луч, исходящий из точки  $\mathbf{R}_0$  в направлении вектора  $\mathbf{e}$ . Формально в (3.8.4) время входит. Введем, однако, параметр  $s = \mathbf{v}t$ , имеющий смысл расстояния, отсчитываемого вдоль упомянутого луча от точки  $\mathbf{R}_0$ . Тогда вместо (3.8.4) получим уравнение

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_0 + s\mathbf{e}, \quad 0 \leq s < \infty, \quad (3.8.6)$$

в которое входят только пространственные характеристики. Уравнение (3.8.6) определяет траекторию частицы. Обратим внимание на справедливость следующих очевидных равенств

$$\mathbf{R}'(s) = \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} = \mathbf{e}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R}'(s)\frac{ds}{dt} = \mathbf{v}\mathbf{R}'(s), \quad \mathbf{v} = \frac{ds}{dt}. \quad (3.8.7)$$

В этом простейшем примере траектория дает ясное представление о характере движения частицы, но это исключительный случай.

**Пример 2. Неравномерное прямолинейное движение частицы.** Допустим, что движение частицы определяется заданием функции

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + a(1 - \cos \omega t)\mathbf{e}, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (3.8.8)$$

Векторы скорости и ускорения определяются формулами

$$\mathbf{V} = a\omega \sin \omega t\mathbf{e}, \quad \mathbf{W} = a\omega^2 \cos \omega t\mathbf{e}. \quad (3.8.9)$$

Здесь и скорость, и ускорение переменны во времени, а их направления могут меняться на противоположные, но остаются на той же прямой. Чтобы

получить уравнение для траектории, необходимо из (3.8.8) исключить время. Введем параметр  $s = a(1 - \cos \omega t)$ , имеющий смысл расстояния, отсчитываемого от точки  $\mathbf{R}_0$  вдоль вектора  $\mathbf{e}$ . Тогда уравнение (3.8.8) принимает вид

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_0 + s\mathbf{e}, \quad 0 \leq s \leq 2a. \quad (3.8.10)$$

Этим уравнением определяется отрезок длиной  $2a$ , исходящий из точки  $\mathbf{R}_0$  и направленный вдоль  $\mathbf{e}$ . В этом случае траектория частицы дает слабое представление о характере движения частицы. Полезно сравнить функции (3.8.6) и (3.8.10), которые различаются не только областями определения. Следует обратить внимание на роль, которую играет параметр  $s$  в уравнениях (3.8.6) и (3.8.10). Основная функция параметра  $s$  в этих уравнениях одинакова — это фиксация точки на траектории. Однако в уравнении (3.8.6) параметр  $s$  одновременно указывает путь, пройденный частицей. В уравнении (3.8.10) это не так, и по параметру  $s$  нельзя что-либо сказать о пути, пройденном частицей.

Итак, чтобы перейти от задания закона движения частицы к заданию ее траектории, необходимо из закона движения (3.8.4) или (3.8.8) исключить время, выразив его через натуральный параметр  $s$  длины дуги траектории. Это всегда можно сделать, хотя и не взаимно-однозначным образом. Например, в данном примере каждому  $t$  отвечает одно и только одно значение  $s$ , но данному значению  $s$  отвечает счетное множество значений  $t$ . Закон движения частицы вдоль траектории  $s(t)$  считается заданным, а из него находится зависимость  $t(s)$ . Подставляя это выражение в закон движения типа (3.8.8), получаем уравнение траектории.

**Пример 3. Равномерное движение частицы по окружности.**

Пусть дана пара единичных ортогональных между собой векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Рассмотрим равномерное движение частицы по окружности в плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Закон движения определяется заданием функции

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + a(\cos \omega t \mathbf{e}_1 + \sin \omega t \mathbf{e}_2), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.8.11)$$

где  $\mathbf{R}_0$  задает положение центра окружности радиуса  $a$ ,  $\omega$  есть постоянная величина. Дифференцируя (3.8.11) по времени, находим скорость и ускорение частицы

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= a\omega(-\sin \omega t \mathbf{e}_1 + \cos \omega t \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{W}(t) &= -a\omega^2(\cos \omega t \mathbf{e}_1 + \sin \omega t \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

В рассматриваемом движении векторы скорости и ускорения меняются только по направлению, а их модули сохраняются постоянными. Уравнение траектории частицы получается после исключения из (3.8.11) времени с помощью

замены  $\varphi = \omega t$ , где  $\varphi$  полярный угол, через который легко выражается длина дуги траектории  $s = a\varphi$ . Уравнение траектории имеет вид

$$\mathbf{R}(\varphi) = \mathbf{R}_0 + a \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad (3.8.13)$$

где  $\mathbf{e}_r$  направлен по радиусу окружности, т.е. по нормали к траектории частицы. Введем единичный вектор  $\mathbf{e}_\varphi$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2 = d\mathbf{e}_r/d\varphi,$$

направленный по касательной к траектории. Тогда вместо (3.8.12) можем записать

$$\mathbf{V}(\varphi) = a\omega \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{W}(\varphi) = -a\omega^2 \mathbf{e}_r.$$

Из этого выражения видим, что скорость направлена по касательной к траектории, а ускорение по нормали к траектории.

**Упражнение.** Доказать, что при произвольном движении скорость частицы всегда направлена вдоль касательной к траектории.

**Пример 4. Движение частицы по спирали.** Рассмотрим тройку ортонормированных векторов

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

и определим движение частицы выражением

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + vt \mathbf{e}_3 + a(\cos \omega t \mathbf{e}_1 + \sin \omega t \mathbf{e}_2), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.8.14)$$

где  $v$  и  $\omega$  постоянные величины. Дифференциал дуги траектории можно ввести используя очевидное тождество

$$d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = ds^2 = (v^2 + a^2\omega^2)dt^2 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{(v^2 + a^2\omega^2)} t. \quad (3.8.15)$$

Выражая отсюда время через дуговую координату  $s$  и подставляя результат в (3.8.14), получаем уравнение траектории

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{R}_0 + \frac{vs}{v_*} \mathbf{e}_3 + a \left( \cos \frac{\omega s}{v_*} \mathbf{e}_1 + \sin \frac{\omega s}{v_*} \mathbf{e}_2 \right), \quad 0 \leq s < \infty, \quad (3.8.16)$$

где  $v_* = \sqrt{v^2 + a^2\omega^2}$ . Из этого выражения нетрудно найти все характеристики спирали, к которым мы вернемся немного ниже.

**Упражнение.** Изобразить траектории движений, рассмотренных в примерах на рисунках. Обратит внимание на то, что в рассмотренных примерах визуальное представление о траектории предшествовало написанию их математических выражений, т.е. что видим, то и записываем с помощью векторных функций. Именно этот факт и подчеркивается термином векторный язык.

### 3.8.2 Кривые в трехмерном пространстве

Существует много различных способов задания кривых в пространстве. Мы опишем только один, наиболее употребительный в приложениях, способ, который принято называть натуральным заданием кривой. Дополнительные подробности можно найти в любой книге по дифференциальной геометрии — см., например, [54]. С интуитивным представлением о кривой в трехмерном пространстве мы уже познакомились. Сейчас нашей целью является описание основных характеристик кривой. Положения точек кривой определяются заданием векторной функции  $\mathbf{R}(s)$  скалярного аргумента  $s$ , в качестве которого при натуральном задании кривой выбирают длину дуги кривой. Итак, кривая в трехмерном пространстве определяется заданием отображения

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (3.8.17)$$

где  $l$  может быть неограниченно большим. Производная  $\mathbf{R}'(s)$  от вектора положения  $\mathbf{R}$  по аргументу  $s$  является единичным касательным вектором к кривой и обозначается символом  $\mathbf{t}(s)$ :

$$\mathbf{R}'(s) = \mathbf{t}(s), \quad |\mathbf{t}(s)| = 1. \quad (3.8.18)$$

Вектор  $\mathbf{t}$  направлен в сторону возрастания параметра  $s$ . О кривизне кривой можно судить по изменению касательного вектора  $\mathbf{t}$  при движении вдоль кривой. Скорость изменения вектора  $\mathbf{t}$  определяется его производной по  $s$

$$\mathbf{t}'(s) = -k(s) \mathbf{n}(s), \quad |\mathbf{n}(s)| = 1, \quad (3.8.19)$$

где скаляр  $k(s)$  называется кривизной кривой в точке с координатой  $s$ , а единичный вектор  $\mathbf{n}(s)$  называется главной нормалью к кривой. Нетрудно убедиться, что вектор  $\mathbf{n}$  действительно ортогонален  $\mathbf{t}$ . В правой части (3.8.19) имеется некоторый произвол в выборе знака кривизны  $k$  или в выборе положительного направления нормали. Этот произвол должен быть устранен дополнительным соглашением. Например, при  $s = 0$  произвольно выбирается положительное направление нормали  $\mathbf{n}(0)$ , и далее нормаль принимается непрерывной функцией  $s$ . Так можно поступить, если кривая не имеет точек излома, т.е. точек, в которых касательная к кривой меняется скачком. Если точки излома имеются, то указанная операция повторяется для каждого участка непрерывности.

**Определение:** кривая называется выпуклой в точке  $s$ , если в этой точке кривизна кривой  $k(s)$  положительна; если кривизна отрицательна в точке  $s$ , то кривая называется вогнутой в этой точке; наконец, если  $k(s) = 0$ , то такая точка кривой называется точкой спрямления.

Плоскость, натянутая на векторы  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  называется соприкасающейся плоскостью кривой в точке  $\mathbf{s}$ . Если все соприкасающиеся плоскости рассматриваемой кривой совпадают между собой, то кривая называется плоской. Введем в рассмотрение вектор бинормали  $\mathbf{b}(\mathbf{s})$  к кривой по формуле

$$\mathbf{b}(\mathbf{s}) = \mathbf{t}(\mathbf{s}) \times \mathbf{n}(\mathbf{s}), \quad |\mathbf{b}(\mathbf{s})| = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}'(\mathbf{s}) = \mathbf{t} \times \mathbf{f}\mathbf{n}'. \quad (3.8.20)$$

Очевидно, что тройка векторов  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  образует ортонормированный базис. Поэтому вектор  $\mathbf{b}'$  может быть разложен по этому базису. Но, согласно (3.8.20), вектор  $\mathbf{b}'$  ортогонален вектору  $\mathbf{t}$ , а также вектору  $\mathbf{b}$ , ибо

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Следовательно, он направлен по вектору нормали

$$\mathbf{b}'(\mathbf{s}) = -\kappa(\mathbf{s}) \mathbf{n}(\mathbf{s}), \quad (3.8.21)$$

где скаляр  $\kappa(\mathbf{s})$  называется кручением кривой в данной точке. Точки, в которых  $\kappa(\mathbf{s})$  обращается в нуль, называются точками уплощения кривой. Если  $\kappa(\mathbf{s}) = 0$  при всех  $\mathbf{s}$ , то кривая называется плоской. Читатель, у которого визуализация уже достаточно хорошо развита, несомненно, заметит как ущербность принятой терминологии, так и отсутствие необходимого для настоящего описания кручения кривой дополнительного параметра. В этом случае, он без труда сумеет обобщить приводимое классическое описание на более полное. Позднее это будет сделано и в данной книге. Заметим, что прямая линия может обладать кручением, и это не экзотика, а весьма важная для приложений ситуация, которая имеет место, например, при описании геометрии сверла. Нам осталось вычислить производную по  $\mathbf{s}$  от вектора нормали

$$\mathbf{n}'(\mathbf{s}) = \mathbf{p}(\mathbf{s}) \mathbf{t}(\mathbf{s}) + \mathbf{0} \mathbf{n}(\mathbf{s}) + \mathbf{q}(\mathbf{s}) \mathbf{b}(\mathbf{s}).$$

Легко вычислить коэффициенты этого разложения. Например, для  $\mathbf{p}$  имеем

$$\mathbf{p} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}' = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n})' - \mathbf{t}' \cdot \mathbf{n} = \kappa(\mathbf{s}).$$

Аналогично вычисляется коэффициент  $\mathbf{q}$ . Окончательно имеем

$$\mathbf{n}'(\mathbf{s}) = \kappa(\mathbf{s}) \mathbf{t}(\mathbf{s}) + \kappa(\mathbf{s}) \mathbf{b}(\mathbf{s}). \quad (3.8.22)$$

Соберем теперь выражения (3.8.19), (3.8.22) и (3.8.21) воедино и получим хорошо известные формулы Серре-Френе

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}'(\mathbf{s}) &= && -\kappa(\mathbf{s}) \mathbf{n}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{n}'(\mathbf{s}) &= \kappa(\mathbf{s}) \mathbf{t}(\mathbf{s}) && + \kappa(\mathbf{s}) \mathbf{b}(\mathbf{s}), \\ \mathbf{b}'(\mathbf{s}) &= && -\kappa(\mathbf{s}) \mathbf{n}(\mathbf{s}) \end{aligned} \right\} \quad (3.8.23)$$

Вместо параметров кривизны  $k(s)$  и кручения  $\kappa(s)$  часто удобнее использовать радиус кривизны  $R(s) = 1/k(s)$  и радиус кручения  $R_\kappa(s) = 1/\kappa(s)$ . Параметры кривизны и кручения определяют данную кривую с точностью до ее положения в системе отсчета. Соотношения

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s), \quad (3.8.24)$$

выражающие зависимости кривизны и кручения от натурального параметра  $s$ , называются натуральными уравнениями кривой. Если натуральные уравнения кривой заданы, то формулы Серре-Френе дают уравнения для определения векторов  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  естественного (натурального) трехгранника кривой. Далее по формуле (3.8.18) находится вектор положения кривой. Формулы Серре-Френе (3.8.23) можно записать в компактной форме, если ввести обозначения

$$\mathbf{t} = \mathbf{m}_1, \quad \mathbf{n} = \mathbf{m}_2, \quad \mathbf{b} = \mathbf{m}_3, \quad \mathbf{\Omega}(s) = \kappa \mathbf{m}_1 - k \mathbf{m}_3. \quad (3.8.25)$$

Вектор  $\mathbf{\Omega}(s)$  называется вектором Дарбу. Теперь формулы Серре-Френе (3.8.23) принимают вид

$$\mathbf{m}_i'(s) = \mathbf{\Omega}(s) \times \mathbf{m}_i(s), \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.8.26)$$

*Пример 4 — продолжение. Спираль или винтовая линия.* Вернемся к обсуждению *Примера 4* о движении частицы по спирали. Используя прежние обозначения, определение касательного вектора (3.8.18) и выражение для траектории (3.8.16), получаем

$$\mathbf{t}(s) = \frac{v}{v_*} \mathbf{e}_3 + \frac{a\omega}{v_*} \left( -\sin \frac{\omega s}{v_*} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{\omega s}{v_*} \mathbf{e}_2 \right). \quad (3.8.27)$$

Дифференцируя это выражение по  $s$  и используя (3.8.19), получаем

$$k = \frac{a\omega^2}{v_*^2}, \quad \mathbf{n}(s) = \cos \frac{\omega s}{v_*} \mathbf{e}_1 + \sin \frac{\omega s}{v_*} \mathbf{e}_2. \quad (3.8.28)$$

По (3.8.20) вычисляем бинормаль

$$\mathbf{b}(s) = -\frac{a\omega}{v_*} \mathbf{e}_3 + \frac{v}{v_*} \left( -\sin \frac{\omega s}{v_*} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{\omega s}{v_*} \mathbf{e}_2 \right).$$

Теперь по (3.8.21) вычисляем кручение

$$\kappa(s) = \frac{v\omega}{v_*^2}. \quad (3.8.29)$$

Таким образом, винтовая линия обладает постоянными кривизной и кручением. Нетрудно вычислить скорость и ускорение частицы, движущейся по винтовой линии. Уравнение движения частицы вдоль линии дается выражением

$$s(t) = \sqrt{v^2 + a^2\omega^2} t = v_* t.$$

Тогда для скорости имеем

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = v_* \mathbf{t}. \quad (3.8.30)$$

Для ускорения имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{ds} \frac{ds}{dt} = -v_*^2 \mathbf{k} \mathbf{n} = -a\omega^2 \mathbf{n}, \quad (3.8.31)$$

где  $\mathbf{k}$  определено формулой (3.8.28).

## 3.9 Криволинейные системы координат

### 3.9.1 Общие соотношения

Данный параграф является продолжением параграфа 3.1, который начинающему целесообразно еще раз перечитать. Система отсчета порождается отсчетным репером (3.1.2) и отсчетными координатами  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ . Вместо отсчетных координат в данной системе отсчета можно использовать любые другие системы координат, в том числе и движущиеся относительно системы отсчета, как это принято в (3.1.4). Используя (3.1.3) и (3.1.5) вектор положения точки системы отсчета можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(y^1, y^2, y^3, t). \quad (3.9.1)$$

Здесь координаты  $y^k$  зависят от времени, но сам вектор  $\mathbf{r}$ , определяющий точку системы отсчета, от времени не зависит. Зафиксируем время, т.е. как бы заморозим координаты  $y^k$ . Тогда координаты  $y^k$  дают мгновенную идентификацию точек системы отсчета. В этом случае, в (3.9.1) переменными будут только мгновенные значения координат  $y^k$ . Зафиксируем теперь координаты  $y^2$  и  $y^3$

$$y^2 = y_*^2 = \text{const}, \quad y^3 = y_*^3 = \text{const}.$$

Тогда (3.9.1) принимает вид функции одной переменной

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(y^1, y_*^2, y_*^3, t), \quad t = \text{const}. \quad (3.9.2)$$



При изменении координаты  $\mathbf{y}^1$  конец вектора  $\mathbf{r}$  опишет в системе отсчета некую линию, которая называется координатной  $\mathbf{y}^1$ -линией. Меняя фиксированные значения координат  $\mathbf{y}_*^2, \mathbf{y}_*^3$ , мы получим семейство координатных  $\mathbf{y}^1$ -линий. Разумеется, в другой момент времени мы будем иметь другое семейство координатных  $\mathbf{y}^1$ -линий. Сейчас у нас речь идет о мгновенной картинке. Если задана кривая (3.9.2), то вектор касательной к этой кривой можно вычислить стандартным образом

$$\mathbf{r}_1 \doteq \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}_*^2, \mathbf{y}_*^3, t)}{d\mathbf{y}^1} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3, t)}{\partial \mathbf{y}^1}. \quad (3.9.3)$$

В последнем члене этого уравнения фиксированность всех переменных, кроме  $\mathbf{y}^1$ , уже можно не отмечать, поскольку это подразумевается самой операцией частного дифференцирования. Совершенно аналогично могут быть введены  $\mathbf{y}^2$ -линии и  $\mathbf{y}^3$ -линии, а также касательные к ним  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$ . Введем обозначение

$$\mathbf{d}_k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^k}, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (3.9.4)$$

Тогда для касательных векторов имеем формулы

$$\mathbf{r}_k(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3, t) = \mathbf{d}_k \mathbf{r}(\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \mathbf{y}^3, t). \quad (3.9.5)$$

Система координат  $\mathbf{y}^k$  называется регулярной, если тройка векторов  $\mathbf{r}_k$  является линейно независимой

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3 \neq 0, \quad (3.9.6)$$

что в дальнейшем всегда предполагается выполненным. Поэтому эту тройку векторов можно выбирать в качестве базиса. Особенность этого базиса состоит только в том, что он зависит от точек системы отсчета. Поэтому базис (3.9.5) называют локальным базисом системы координат  $\mathbf{y}^k$ . В общем случае система координат не ортогональна, т.е. векторы  $\mathbf{r}_k$  не ортогональны между собой. Заметим, что векторы  $\mathbf{r}_k$  могут иметь различную физическую размерность, которая зависит от размерности выбранных координат  $\mathbf{y}^k$ . Для базиса  $\mathbf{r}_k$  стандартным образом строится взаимный базис  $\mathbf{r}^m$

$$\mathbf{r}^m \cdot \mathbf{r}_n = \delta_n^m = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (3.9.7)$$

*Упражнение.* Доказать, что при замене системы координат согласно (3.1.7) базисные векторы преобразуются по закону

$$\mathbf{r}_{m'} = h_{m'}^n \mathbf{r}_n, \quad \mathbf{r}^{m'} = h_n^{m'} \mathbf{r}^n, \quad (3.9.8)$$

где

$$h_{m'}^n = \frac{\partial y^n}{\partial y^{m'}}, \quad h_n^{m'} = \frac{\partial y^{m'}}{\partial y^n}, \quad h_m^n h_k^{m'} = \delta_k^n, \quad h_m^n h_n^{k'} = \delta_m^{k'}. \quad (3.9.9)$$

По терминологии В.Ф. Кагана [26] объекты типа  $\mathbf{r}_n$  или  $\mathbf{r}^m$  называются тензорами первого ранга с векторными компонентами. Введем в рассмотрение инвариантный дифференциальный оператор, который широко используется в тензорном исчислении

$$\nabla = \mathbf{r}^n d_n, \quad (3.9.10)$$

где использовано обозначение (3.9.4). Оператор  $\nabla$  называется оператором-градиентом или оператором Гамильтона. Покажем, что он действительно не зависит от выбора системы координат, т.е. является инвариантом. Для этого необходимо записать оператор-градиент в новой системе координат  $\mathbf{y}^{n'}$  и убедиться, что он совпадает с его значением в исходной системе координат  $\mathbf{y}^k$

$$\nabla' = \mathbf{r}^{n'} d_{n'} = h_m^{n'} \mathbf{r}^m h_n^k d_k = h_m^{n'} h_n^k \mathbf{r}^m d_k = \delta_m^k \mathbf{r}^m d_k = \mathbf{r}^m d_m = \nabla,$$

где были использованы формулы (3.9.8) и (3.9.9).

**Определение.** Операторы, не зависящие от выбора системы координат в данной системе отсчета, называются объективными.

В физических теориях используются исключительно объективные операторы. Оператор Гамильтона дает нам один пример объективного оператора. Другим примером объективного оператора является оператор полного дифференцирования по времени  $d/dt$ . Примером необъективного оператора является оператор частного дифференцирования по времени  $\partial/\partial t$ , который зависит от выбора системы координат. Впрочем, в частном случае, в котором координаты не зависят от времени, полные и частные производные по времени не различаются между собой. Существует много объективных операторов, используемых в различных теориях, но главными среди них являются оператор-градиент и оператор полного дифференцирования по времени.

**Упражнение.** Доказать и запомнить следующие правила коммутативности операторов

$$\frac{d}{dt} \nabla = \nabla \frac{d}{dt}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \neq \nabla \frac{\partial}{\partial t}. \quad (3.9.11)$$

Первое из этих соотношений вытекает непосредственно из объективности рассматриваемых операторов и того факта, что в отсчетных координатах оно очевидным образом выполняется.

### 3.9.2 Деривационные формулы. Ковариантное дифференцирование

Пусть дано векторное поле

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{b}^m \mathbf{r}_m = \mathbf{b}_m \mathbf{r}^m. \quad (3.9.12)$$

Допустим, что нам понадобилось найти производную от этого поля по координате  $\mathbf{y}^k$ . Поскольку базисные векторы  $\mathbf{r}_m$  и  $\mathbf{r}^m$  сами зависят от координат, то мы должны уметь вычислять производные от базисных векторов. Формулы дифференцирования базисных векторов называются деривационными формулами. Производные от базисных векторов можно представить в виде разложений

$$\mathbf{d}_k \mathbf{r}_m = \Gamma_{km}^s \mathbf{r}_s, \quad \mathbf{d}_k \mathbf{r}^m = \mathbf{G}_{ks}^m \mathbf{r}^s. \quad (3.9.13)$$

Дифференцируя (3.9.7) по координате  $\mathbf{y}^k$  и используя разложения (3.9.13), немедленно получаем

$$\mathbf{G}_{sk}^m = -\Gamma_{sk}^m, \quad \Gamma_{sk}^m = \Gamma_{ks}^m. \quad (3.9.14)$$

Причем последнее тождество вытекает из коммутативности частных производных  $\mathbf{d}_k \mathbf{d}_m = \mathbf{d}_m \mathbf{d}_k$  и определения (3.9.5). Коэффициенты разложения  $\Gamma_{sk}^m$  называются символами Кристоффеля 2-го рода или коэффициентами аффинной связности. Впрочем, последний термин при принятом в данной книге способе изложения не очень уместен. Для вычисления символов Кристоффеля воспользуемся определением фундаментальной матрицы (3.6.9)

$$\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n = \mathbf{g}_{mn}.$$

Если базисные векторы известны, то фундаментальная матрица также известна. Дифференцируя это равенство по координате  $\mathbf{y}^k$  и используя (3.9.13), получаем

$$\mathbf{d}_k \mathbf{g}_{mn} = \Gamma_{km,n} + \Gamma_{kn,m}, \quad \Gamma_{km,n} \doteq \Gamma_{km}^s \mathbf{g}_{sn}, \quad (3.9.15)$$

где символы  $\Gamma_{km,n}$  называются символами Кристоффеля 1-го рода. Заметим, что не все индексы у символов Кристоффеля 1-го и 2-го рода являются тензорными в смысле определений параграфа 2.6. Поэтому некоторые из них следовало бы заключить в скобки. Этого не делают из-за распространенности этих объектов, чтобы избежать утомительного для глаза усложнения записи.

**Упражнение:** найти закон преобразования символов Кристоффеля при замене системы координат.

Вернемся к уравнению (3.9.15). Выпишем в дополнение к (3.9.15) еще два уравнения, полученных из (3.9.15) с помощью циклической перестановки индексов. После этого сложим два из получившихся трех уравнений и вычтем

из результата третье уравнение. В итоге получим следующие выражения

$$\Gamma_{mn,k} = \frac{1}{2} (\mathbf{d}_m \mathbf{g}_{nk} + \mathbf{d}_n \mathbf{g}_{mk} - \mathbf{d}_k \mathbf{g}_{mn}),$$

$$\Gamma_{mn}^s = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{sk} (\mathbf{d}_m \mathbf{g}_{nk} + \mathbf{d}_n \mathbf{g}_{mk} - \mathbf{d}_k \mathbf{g}_{mn}). \quad (3.9.16)$$

Таким образом, по известной фундаментальной матрице нетрудно вычислить символы Кристоффеля и, следовательно, окончательно установить производные формулы (3.9.13). При дифференцировании разложения (3.9.12) по координатам  $\mathbf{y}^k$  мы должны дифференцировать и координаты вектора, и сами базисные векторы. С учетом формул (3.9.13) можно записать

$$\mathbf{d}_k \mathbf{b} = (\nabla_k \mathbf{b}^m) \mathbf{r}_m = (\nabla_k \mathbf{b}_m) \mathbf{r}^m, \quad (3.9.17)$$

где введены обозначения

$$\nabla_k \mathbf{b}^m = \mathbf{d}_k \mathbf{b}^m + \Gamma_{ks}^m \mathbf{b}^s, \quad \nabla_k \mathbf{b}_m = \mathbf{d}_k \mathbf{b}_m - \Gamma_{km}^s \mathbf{b}_s. \quad (3.9.18)$$

Первое из этих выражений называется ковариантной производной контравариантного объекта, а второе — ковариантной производной ковариантного объекта. Если нам дан, например, объект третьего порядка, который один раз контравариантен и два раза ковариантен  $\mathbf{A}_{mn}^p$ , то для него ковариантная производная выглядит следующим образом

$$\nabla_k \mathbf{A}_{mn}^p = \mathbf{d}_k \mathbf{A}_{mn}^p + \Gamma_{ks}^p \mathbf{A}_{mn}^s - \Gamma_{km}^s \mathbf{A}_{sn}^p - \Gamma_{kn}^s \mathbf{A}_{ms}^p.$$

Нетрудно понять правило, по которому составлено это выражение. Кроме того, легко убедиться в справедливости тождеств

$$\nabla_k \mathbf{r}_m = \nabla_k \mathbf{r}^m = \mathbf{0}, \quad \nabla_k \mathbf{g}_{mn} = \nabla_k \mathbf{g}^{mn} = \mathbf{0}.$$

При принятом способе изложения ковариантные производные суть не более, чем обозначения. Начинаящий, тем не менее, должен владеть этими понятиями, чтобы читать литературу, использующую арифметический подход к тензорному исчислению. Кроме того, эти обозначения удобны при координатной записи тех или иных уравнений. В математике, например, в геометрии дифференцируемых многообразий, ковариантное дифференцирование обретает и самостоятельное значение.

### 3.9.3 Ортогональные системы координат

Система координат называется ортогональной, если выполняются следующие соотношения

$$\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_n = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}^m \cdot \mathbf{r}^n = 0, \quad (m \neq n). \quad (3.9.19)$$

Ортогональный базис  $\mathbf{r}_m$  можно превратить в ортонормированный базис  $\mathbf{e}_m$  посредством замены

$$\mathbf{r}_m = H_m \mathbf{e}_m, \quad H_m = |\mathbf{r}_m|, \quad \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn}, \quad (3.9.20)$$

где числа  $H_m$  называются коэффициентами Ламе, а суммирование по повторяющимся нижним индексам не производится, поскольку индексы у  $H_m$  и  $\mathbf{e}_m$ , в отличие от индекса у векторов  $\mathbf{r}_m$ , не являются тензорными. Легко устанавливаются формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^m &= H_m^{-1} \mathbf{e}_m, \quad g_{mn} = H_m^2 \delta_{mn}, \quad g^{mn} = H_m^{-2} \delta_{mn}, \\ \Gamma_{kn,p} &= H_n d_k H_n \delta_{np} + H_k d_n H_k \delta_{kp} - H_k d_p H_k \delta_{kn}. \end{aligned} \quad (3.9.21)$$

**Упражнение.** Доказать derivaционные формулы для векторов  $\mathbf{e}_m$  ортонормированного базиса

$$d_k \mathbf{e}_m = \boldsymbol{\Omega}_k \times \mathbf{e}_m, \quad (3.9.22)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_k = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{H_n} \frac{\partial H_k}{\partial y^n} \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_k = \nabla H_k \times \mathbf{e}_k, \quad (3.9.23)$$

причем оператор-градиент (3.9.10) при использовании ортогональных координатных систем принимает вид

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial y^1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial y^2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial y^3}. \quad (3.9.24)$$

Здесь использованы формулы (3.9.21) и обозначение (3.9.4).

В качестве простого примера рассмотрим подвижную систему координат

$$y^1 = x - vt, \quad y^2 = y, \quad y^3 = z. \quad (3.9.25)$$

Тогда радиус-вектор точки системы отсчета (3.9.1) примет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(y^1, y^2, y^3, t) = (y^1 + vt) \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + y^3 \mathbf{k}. \quad (3.9.26)$$

Отсюда легко вычисляются базисные векторы и вид оператора-градиента.

### 3.9.4 Цилиндрическая система координат

Весьма популярной в приложениях является цилиндрическая система координат. Выразим отсчетные координаты  $(x, y, z)$  через три параметра

$$y^1 = r, \quad y^2 = \varphi, \quad y^3 = z, \quad (3.9.27)$$

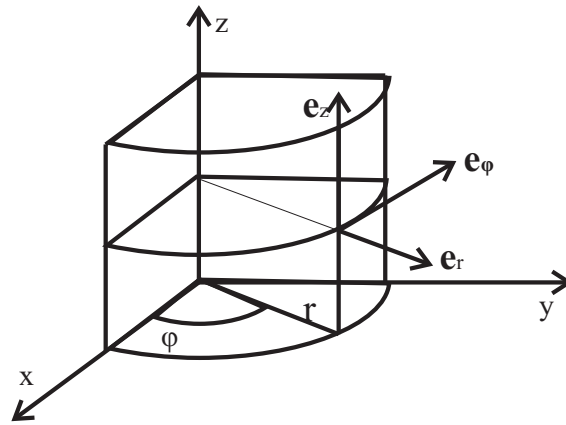


Рис. 3.12: Цилиндрическая система координат

которые вводятся по следующим формулам — см. также Рис.3.12 —

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (3.9.28)$$

Тогда положение точки системы отсчета определяется заданием вектора

$$\mathbf{r} = r (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + z \mathbf{k}. \quad (3.9.29)$$

Базисные векторы вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{e}_r, & \mathbf{e}_r &= \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}, & H_1 &= 1, & \mathbf{r}^1 &= \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \mathbf{e}_\varphi, & \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, & H_2 &= r, & \mathbf{r}^2 &= r^{-1} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z = \mathbf{k}, & H_3 &= 1, & \mathbf{r}^3 &= \mathbf{e}_z = \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.9.30)$$

Оператор-градиент в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.9.31)$$

Деривационные формулы легко выводятся непосредственно из (3.9.30), но могут использоваться и общие формулы (3.9.22) и (3.9.23). При этом векторы  $\mathbf{\Omega}_k$  вычисляются по формулам

$$\mathbf{\Omega}_r = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Omega}_\varphi = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{\Omega}_z = \mathbf{0}.$$

Формулы (3.9.22) записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial r} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial z} = \mathbf{0}, \quad (i = r, \varphi, z).$$

Все приведенные формулы, конечно, выводятся без всякого труда, и их можно было бы опустить. Тем не менее, начинающим обязательно следует проделать все необходимые выкладки и проверить себя.

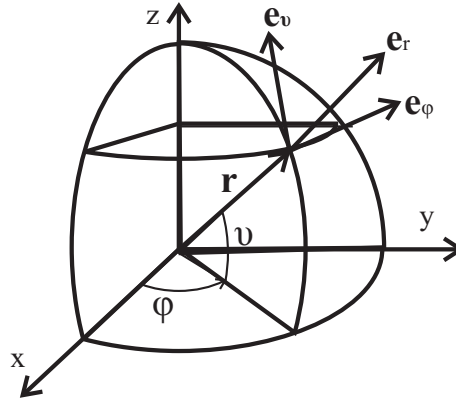


Рис. 3.13: Сферическая система координат

### 3.9.5 Сферическая система координат

Идентифицируем точки системы отсчета посредством параметров

$$y^1 = r, \quad y^2 = \varphi, \quad y^3 = \vartheta$$

следующим образом

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \cos \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \sin \vartheta. \quad (3.9.32)$$

Положение точки системы отсчета определяется заданием вектора

$$\mathbf{r} = r \cos \vartheta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + r \sin \vartheta \mathbf{k}. \quad (3.9.33)$$

Базисные векторы вычисляются стандартным образом

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{e}_r = \cos \vartheta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \sin \vartheta \mathbf{k}, \quad H_1 = 1, \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \cos \vartheta \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, \quad H_2 = r \cos \vartheta, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{r}_3 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = r \mathbf{e}_\vartheta, \quad \mathbf{e}_\vartheta = -\sin \vartheta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) + \cos \vartheta \mathbf{k}, \quad H_3 = r, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

Наглядное представление о сферической системе координат дает Рис.3.13. Оператор-градиент в сферической системе координат имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}. \quad (3.9.34)$$

Векторы (3.9.23) в сферической системе координат определены формулами

$$\mathbf{\Omega}_r = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Omega}_\varphi = \sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta, \quad \mathbf{\Omega}_\vartheta = -\mathbf{e}_\varphi. \quad (3.9.35)$$

*Упражнение.* Выписать формулы (3.9.22) с учетом (3.9.35) и проверить их прямым вычислением.

### 3.10 Скалярные функции векторного аргумента

При построении физических теорий часто приходится вводить в рассмотрение тензорные функции нескольких тензорных аргументов. Поэтому свободное владение такого рода функциями составляет важнейшую часть тензорного языка. В данном параграфе мы начинаем знакомство с тензорными функциями в их простейшей реализации, а именно мы познакомимся с отображениями вида  $T_1 \rightarrow T_0$ , т.е. со скалярными функциями одного векторного аргумента. В заключительной части этого параграфа будут рассмотрены скалярные функции нескольких векторных аргументов.

Рассмотрение начнем с изучения скалярных полей. Пусть дана скалярная функция

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{r}, t). \quad (3.10.1)$$

Иными словами, в каждой точке системы отсчета (или в какой-либо области системы отсчета) нам задана некая величина, которая может меняться во времени. Точки системы отсчета будем идентифицировать координатами  $\mathbf{y}^k(t)$ , которые могут меняться во времени. Посмотрим, как меняется функция  $\mathbf{u}$  при переходе из точки  $\mathbf{r}$  в точку  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{u} = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t) - f(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{y}^k + d\mathbf{y}^k, t) - f(\mathbf{y}^k, t) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}^k} d\mathbf{y}^k. \quad (3.10.2)$$

При получении этих формул подразумевается, что время фиксировано, т.е. все рассмотрения носят мгновенный характер. Отметим справедливость равенств

$$d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{y}^k} d\mathbf{y}^k = d\mathbf{y}^k \mathbf{r}_k \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{y}^k = \mathbf{r}^k \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.10.3)$$

Подставляя это выражение в (3.10.1) и учитывая определение оператора градиента (3.9.10), получаем

$$d\mathbf{u} = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla f. \quad (3.10.4)$$

По определению, коэффициент при  $d\mathbf{r}$  называется производной от функции  $f(\mathbf{r}, t)$  по вектору  $\mathbf{r}$

$$\frac{df(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}^k} \mathbf{r}^k = \nabla f. \quad (3.10.5)$$



Таким образом, производная от скалярной функции по вектору или, что то же самое, градиент скалярной функции является вектором. Рассмотрим несколько простых примеров вычисления производных по вектору.

**Пример 1. Линейная функция вектора**

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + b \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \nabla f = \mathbf{a}.$$

**Пример 2. Изотропная скалярная функция вектора.** Изотропная скалярная функция вектора (точный смысл этого термина будет установлен позднее, когда будут введены все необходимые понятия) может быть выражена, как функция модуля векторного аргумента

$$\mathbf{u} = f(r^2) = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{u} = \frac{df}{d(r^2)} 2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \nabla f = 2 \frac{df}{d(r^2)} \mathbf{r}.$$

Градиент скалярной функции будучи вектором характеризуется модулем и направлением. Что касается модуля градиента, то он вычисляется стандартным образом

$$|\nabla f|^2 = \nabla f \cdot \nabla f = g^{mn} d_m f d_n f,$$

где использовано обозначение (3.9.4) и правило суммирования по повторяющимся индексам. Несколько сложнее устанавливается направление градиента скалярной функции. Для этого введем в рассмотрение понятие поверхности равного уровня. Эта поверхность определяется уравнением

$$f(\mathbf{r}) = H = \text{const.} \quad (3.10.6)$$

Меняя здесь значение постоянной  $H$ , получаем семейство поверхностей равного уровня функции  $f$ . Выберем какую-либо точку  $\mathbf{r}_0$ . Тогда вместо (3.10.6) получим

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0). \quad (3.10.7)$$

Рассмотрим малую окрестность точки  $\mathbf{r}_0$ , принадлежащую поверхности (3.10.7). Положения точек этой окрестности определяются заданием векторов  $\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}$ , где совокупность векторов  $d\mathbf{r}$  образует плоскость, касательную к поверхности уровня в точке  $\mathbf{r}_0$ . Для рассматриваемых точек согласно (3.10.7) имеем

$$f(\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0) \quad \Rightarrow \quad \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.10.8)$$

Поскольку векторы  $d\mathbf{r}$  принадлежат касательной плоскости, то последнее равенство в (3.10.8) показывает, что градиент скалярной функции направлен по нормали к поверхности уровня. Итак, для скалярных полей производная по

вектору положения совпадает с градиентом скалярного поля. В общем случае скалярной функции векторного аргумента это уже не так. Градиент такой функции вообще говоря не определен, но понятие производной по векторному аргументу сохраняется. Для введения понятия производной по вектору предварительно докажем один простой факт, относящийся к линейным скалярным функциям векторного аргумента.

**Определение:** скалярная функция

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{v}) \quad (3.10.9)$$

векторного аргумента  $\mathbf{v}$  называется линейной, если для любых скаляров  $\alpha, \beta$  и любых векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  справедливы равенства

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}). \quad (3.10.10)$$

**Утверждение:** любая линейная функция векторного аргумента  $\mathbf{v}$  может быть представлена в виде скалярного произведения

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.10.11)$$

где вектор

$$\mathbf{f} = f(\mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k \quad (3.10.12)$$

называется вектором линейного отображения и не зависит от выбора базиса  $\mathbf{e}_k$ .

**Доказательство** немедленно вытекает из определения линейной функции (3.10.10). Представим вектор  $\mathbf{v}$  в виде разложения по произвольно выбранному базису  $\mathbf{e}_k$  и воспользуемся (3.10.10). Тогда получим

$$f(\mathbf{v}) = f(v^k \mathbf{e}_k) = v^k f(\mathbf{e}_k) = f(\mathbf{e}_k) (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{v}) = (f(\mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

где вектор  $\mathbf{f}$  определен выражением (3.10.12).

**Упражнение:** доказать независимость вектора линейного отображения  $\mathbf{f}$  от выбора базиса.

Теперь уже нетрудно ввести определение производной от скалярной функции векторного аргумента (3.10.9). Дифференциал функции (3.10.9)

$$d\mathbf{u} = f(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - f(\mathbf{v})$$

является линейной функцией вектора  $d\mathbf{v}$ . Поэтому согласно доказанному утверждению обсуждаемый дифференциал может быть представлен в виде

$$d\mathbf{u} = df(\mathbf{v}) = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}}. \quad (3.10.13)$$

Вектор  $\mathbf{L}$  в этом выражении по определению называется производной от скалярной функции по вектору. Желаящие получить более строгое изложение теории дифференцирования на абстрактных множествах могут обратиться к главе VIII книги [48].

**Пример 3. Кинетическая энергия и количество движения материальной точки.** Простейший пример скалярной функции векторного аргумента дает нам кинетическая энергия материальной точки

$$K(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.10.14)$$

где  $m$  есть масса частицы,  $\mathbf{v}$  есть скорость частицы. Производная от кинетической энергии по скорости называется количеством движения частицы и является вектором  $\mathbf{K}_1$ . Для нахождения производной необходимо вычислить дифференциал кинетической энергии

$$dK(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}_1 = m \mathbf{v},$$

где отброшены, конечно, слагаемые, квадратичные по  $d\mathbf{v}$ . Производную от скалярной функции по вектору можно вычислять и по формуле, вполне аналогичной (3.10.5), если функцию вектора рассматривать как функцию координат вектора относительно некоторого базиса  $\mathbf{e}_k$ .

$$f(\mathbf{v}) = F(v^1, v^2, v^3), \quad \mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k, \quad v^k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^k.$$

Теперь простые выкладки дают

$$df = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F}{\partial v^k} dv^k = \frac{\partial F}{\partial v^k} \mathbf{e}^k \cdot d\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{d\mathbf{v}} = \frac{\partial F}{\partial v^k} \mathbf{e}^k. \quad (3.10.15)$$

Здесь следует обратить внимание на два обстоятельства. Первое. Базис  $\mathbf{e}_k$  может зависеть от точек системы отсчета, т.е. в некотором смысле является переменным. Но он не зависит от вектора  $\mathbf{v}$ . Поэтому при вычислении дифференциала вектора  $\mathbf{v}$  базисные векторы должны рассматриваться как постоянные

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{v} = (dv^k) \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad dv^k = \mathbf{e}^k \cdot d\mathbf{v}.$$

Второе обстоятельство заключается в том, что производная от скалярной функции по контравариантному объекту является ковариантным объектом и, наоборот, производная по ковариантному объекту является контравариантным объектом. Поэтому производная от скаляра по вектору (3.10.15) не

зависит от выбора базиса. Рассмотрим скалярную функцию двух векторных аргументов

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \quad (3.10.16)$$

Дифференциал этой функции является билинейной функцией векторов  $d\mathbf{v}_1$  и  $d\mathbf{v}_2$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{L}_1 \cdot d\mathbf{v}_1 + \mathbf{L}_2 \cdot d\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_1 = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_1}, \quad \mathbf{L}_2 = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_2}. \quad (3.10.17)$$

Этими формулами устанавливаются частные производные от скалярной функции по векторным аргументам.

**Пример 4. Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент абсолютно твердого тела.** Движение абсолютно твердого тела полностью определено, если задано движение некоторой произвольно выбираемой точки (полюса) тела и поворот тела. Поэтому это движение определяется заданием двух векторов: вектора скорости полюса  $\mathbf{v}$  и вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ . Кинетическая энергия абсолютно твердого тела является квадратичной формой скоростей

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}).$$

Количеством движения называется производная от кинетической энергии по вектору скорости  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{v}}.$$

Кинетическим моментом абсолютно твердого тела относительно начала отсчета называется выражение

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times \mathbf{K}_1 + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}},$$

где первое слагаемое в правой части называется моментом количества движения тела, а второе слагаемое называется собственным моментом количества движения или динамическим спином. Вектор  $\mathbf{R}$  определяет положение полюса в системе отсчета. В простейшем случае кинетическая энергия абсолютно твердого тела может быть представлена в виде следующей квадратичной формы

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + J \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{\omega},$$

где  $J$  называется моментом инерции. Отсюда получаем

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times \mathbf{K}_1 + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R} \times m \mathbf{v} + J \boldsymbol{\omega}.$$

# Глава 4

## Тензоры второго ранга

*Тензоры нулевого ранга (скаляры) и тензоры первого ранга (векторы) не исчерпывают списка необходимых для физики и, в частности, механики понятий. Необходимы и более сложные конструкции — тензоры высших рангов. На интуитивном уровне тензоры, например, второго ранга ощущаются уже не столь отчетливо, как скаляры и векторы. Поэтому вначале требуется определенная тренировка на уровне логического мышления, прежде чем исчезнет неудобство, связанное с восприятием тензора второго ранга, как чисто формального объекта. При первоначальном знакомстве с тензорами второго ранга вполне допустимо и даже полезно рассматривать их как формальные конструкции. Однако в последующем при изучении механики мы убедимся, что тензоры второго ранга являются необходимыми элементами языка, на котором говорит природа. В этом смысле тензоры второго ранга отнюдь не являются формальностями.*

### 4.1 Необходимость введения тензоров второго ранга

Известно, что скаляры (тензоры нулевого ранга) и векторы (тензоры первого ранга) не покрывают всех потребностей в понятиях, необходимых при построении механики. Тем не менее, евклидово ориентированное пространство  $T_1$ , элементами которого являются векторы, играет определяющую роль и при введении объектов более сложной природы — тензоров высших рангов. Более того, человек, свободно владеющий понятием вектора, не будет испытывать ни малейших затруднений при работе с тензорами высших рангов. Последние являются элементами множеств, которые вводятся посредством специальных конструкций, называемых тензорными произведениями векторных пространств. Но прежде, чем переходить к построению тензорных произведений, покажем, что мы действительно нуждаемся в тензорах

высших рангов.

В 1638 г. вышла в свет книга Г. Галилея "Беседы о двух новых науках" [10], сыгравшая огромную роль в развитии рациональной механики. В ней, при обсуждении проблемы прочности каната на разрыв, Г. Галилей ввел понятие напряжения. Он указал, что прочность каната определяется величиной  $\sigma = P/F$ , где  $P$  — сила, действующая на канат вдоль оси каната;  $F$  — площадь поперечного сечения каната. Понятие напряжения оказалось очень плодотворным, но в общем случае выяснилось, что напряжение является объектом совершенно новой природы.

Попытаемся обобщить галилеевское понятие напряжения. Прежде всего, мы знаем, что сила является вектором  $\mathbf{P}$ . Поэтому галилеевское определение следовало бы заменить на следующее

$$\sigma = \mathbf{P}/F.$$

В таком случае напряжение оказалось бы векторной величиной. Но при этом трудности не исчезают. Действительно, для каната площадь поперечного сечения  $F$  вполне определена. Но в общем случае площадка является векторной величиной  $\mathbf{F}$ , и предыдущая формула должна быть переписана в виде

$$\sigma = \mathbf{P}/\mathbf{F} \quad (???).$$

Пришли к абсурдному результату, ибо операция деления вектора на вектор не определена и не может быть определена. Напомним, что операция деления может быть определена только на тех множествах, в которых имеется единичный элемент и притом единственный. Векторное пространство таким множеством не является, поскольку в нем имеется несчетное множество различных по направлению единичных векторов. Возникший тупик является характерным признаком того, что мы нуждаемся в расширении списка исходных понятий, а напряжение не является ни скаляром, ни вектором. Попробуем взглянуть на это понятие более внимательно. При этом будем иметь в виду уже не канат, а твердое тело общего вида. Выберем в твердом теле произвольную точку  $\mathbf{A}$ . Зададим в точке  $\mathbf{A}$  единичный вектор  $\mathbf{n}$ , направленный по нашему произволу. Проведем через  $\mathbf{A}$  плоскость, ортогональную  $\mathbf{n}$ , и в этой плоскости рассмотрим область  $\Delta S$ , содержащую точку  $\mathbf{A}$ . Пусть на  $\Delta S$  действует сила  $\Delta \mathbf{P}$ , моделирующая воздействие части тела, находящейся со стороны положительной нормали  $\mathbf{n}$ , на часть тела, находящуюся со стороны отрицательной нормали  $\mathbf{n}$ . Вектором напряжения  $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$  в точке  $\mathbf{A}$ , действующим по бесконечно малой площадке  $\Delta S \mathbf{n}$ , называется предел отношения

$$\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S},$$

где  $\Delta S \rightarrow 0$  означает, что к нулю стремится наибольший диаметр площадки  $\Delta S$ . Итак, чтобы определить напряжение в точке  $A$  твердого тела, необходимо задать: а) площадку  $dS$ , точнее ориентированную площадку  $dS\mathbf{n}$ , определяемую вектором нормали  $\mathbf{n}$ ; б) вектор напряжения  $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$ , действующий по этой площадке. Таким образом, напряжение есть упорядоченная пара векторов  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$ , из которых первый вектор задает площадку, а второй — действующую по этой площадке силу, отнесенную к единице площади. Эта пара векторов составляет единое целое. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, описанную пару векторов записывают в виде  $\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$ , где  $\otimes$  — знак тензорного произведения. Ясно, что

$$\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} \neq \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} \otimes \mathbf{n},$$

т.к. в последнем случае в соответствии с соглашением  $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$  — вектор нормали, а  $\mathbf{n}$  — сила. Поэтому понятие напряжения связывается с упорядоченной парой векторов  $\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$ ; упорядоченность означает, что порядок следования сомножителей имеет значение. Пары  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  и  $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$  различны. Чтобы полностью описать напряжение в точке  $A$ , необходимо задать напряжения по всем площадкам, проходящим через эту точку. Однако таких площадок бесконечно много. Если применить специальные рассуждения, использующие законы механики, (только математики недостаточно!), то можно показать, что напряженное состояние в точке  $A$  полностью определено, если задана неупорядоченная совокупность трех упорядоченных пар векторов

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}_{(1)} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n}_1)} + \mathbf{n}_{(2)} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n}_2)} + \mathbf{n}_{(3)} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n}_3)}, \quad (4.1.1)$$

где  $\mathbf{n}_{(i)}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) — три единичных ортогональных между собой вектора, задающие три взаимно ортогональные площадки;  $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n}_i)}$  — вектор напряжения, действующий по площадке с нормалью  $\mathbf{n}_{(i)}$ . Знаки “+” в (4.1.1) следует понимать как символы объединения, т.е. (4.1.1) — это именно совокупность трех пар векторов, являющаяся примером нового объекта — тензора второго ранга. Следует обратить особое внимание на тот факт, что тензор напряжений (впервые его ввел знаменитый французский математик Огюстен Луи Коши в 1822 году) является самостоятельной сущностью, имеет ясный физический смысл и может изучаться сам по себе. Широко распространенная точка зрения, что тензоры второго ранга являются некими операторами, переводящими что-то во что-то другое, хотя и имеет право на существование, но мало плодотворна. Во всяком случае, в данной книге тензоры второго ранга, подобно векторам, будут рассматриваться именно как самостоятельные объекты. Цель этой главы — ввести формальные объекты, называемые тензорами второго ранга, и определить основные законы композиции этих

объектов. Элементами живого языка они станут немного позднее при изучении собственно механики.

## 4.2 Прямое произведение векторных пространств

Выше мы видели, что иногда приходится иметь дело с парами векторов, рассматриваемыми как единое целое и называемыми диадами. Последние являются элементами множества, являющегося прямым произведением двух векторных пространств. Приступим к формальному введению диад.

Пусть даны два экземпляра  $T_1^{(1)}$  и  $T_1^{(2)}$  векторного пространства  $T_1$ , элементами которого являются векторы классической физики. Рассмотрим множество

$$N = T_1^{(1)} \times T_1^{(2)},$$

элементами которого являются упорядоченные пары векторов

$$N = \{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathbf{a} \in T_1^{(1)}, \mathbf{b} \in T_1^{(2)}\}.$$

Поскольку  $T_1^{(1)}$  и  $T_1^{(2)}$  неразличимы между собой, то верхние индексы, означающие номер экземпляра векторного пространства, в дальнейшем будем опускать. Упорядоченную пару векторов  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  будем называть диадой. Термин упорядоченность означает, что порядок следования векторов в диаде важен

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}.$$

Итак, мы ввели некое множество  $N$  диад. Однако не всякие множества представляют интерес для рациональных наук. Интересны только такие множества, на которых можно ввести некие дополнительные структуры (законы композиции элементов), позволяющие превратить эти множества в инструменты для исследования. Например, множество направленных отрезков (векторов) не представляло бы никакого интереса, если бы на нем не были введены операции сложения, умножения на число, скалярного произведения и т.д. Важно при этом, чтобы вводимые операции не выводили нас за пределы рассматриваемого множества. Например, сумма векторов снова является вектором, т.е. элементом исходного множества. Можно ли сделать что-то аналогичное на множестве диад? Иными словами, можно ли превратить прямое произведение двух векторных пространств в нечто содержательное, например, в линейное пространство? Для этого на множестве  $N$  достаточно ввести два закона композиции элементов: умножение диады на число и сложение диад. Введем на множестве  $N$  операцию умножения на вещественное число

$$\alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}. \quad (4.2.1)$$



Последнее равенство в этой строке постулирует эквивалентность пар  $(\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}$  и  $\mathbf{a} \otimes (\alpha \mathbf{b})$ . Умножать вектор на число мы умеем. Тогда (4.2.1) определяет новую операцию – умножение диады на число. Примем аксиому

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \alpha \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \beta \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}. \quad (4.2.2)$$

Этой аксиомой введено правило сложения двух одинаковых диад. Из (4.2.1) при  $\alpha = 0$  имеем

$$0 \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = 0 \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes 0,$$

где  $0$  – нулевой вектор. Из (4.2.2) имеем при  $\alpha = 1$  и  $\beta = 0$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (1 + 0)\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = 1 \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + 0 \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}.$$

Поэтому диаду  $0(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 0 \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes 0$  называем нулевой диадой: ее прибавление к произвольной диаде  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  не меняет диады  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ . Примем еще два правила сложения диад

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}, \quad (4.2.3)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}.$$

Эти правила позволяют нам складывать диады, если у них либо левые, либо правые сомножители одинаковы. При этом сумма диад вновь является диадой, т.е. элементом множества  $\mathbf{N} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_1$ . Однако в общем случае любое разумное определение суммы диад уже не будет диадой. Например, непонятно, что означает “сумма”

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = ?$$

Оказывается, что “сумма”  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$ , если ее как-то определить, уже не принадлежит множеству  $\mathbf{N} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_1$ . Поэтому множество диад нельзя превратить в линейное пространство. Таким образом, прямое произведение двух векторных пространств оказалось слишком бедным для того, чтобы превратить его хотя бы в линейное пространство.

### 4.3 Тензорное произведение векторных пространств

Чтобы устранить возникшее затруднение, расширим множество  $\mathbf{N}$ , а именно, рассмотрим множество  $\mathbf{T}_2$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_1 = \{\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)} : \mathbf{a}_{(i)}, \mathbf{b}_{(i)} \in \mathbf{T}_1\}. \quad (4.3.1)$$

Элементами этого множества являются неупорядоченные совокупности трех упорядоченных пар векторов. Диады, очевидно, также являются элементами  $\mathbf{T}_2$ , если принять, что

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{0}$  есть нулевая диада. Для диад мы сохраним соотношения эквивалентности (4.2.1), (4.2.2) и (4.2.3). Примем следующие соотношения эквивалентности на множестве  $\mathbf{T}_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)} &= \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \\ &\mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)} = \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)} + \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

В этом и состоит смысл термина “неупорядоченная совокупность трех пар векторов”: порядок следования слагаемых в этой совокупности безразличен. Знак “+” в (4.3.1) и (4.3.2) есть символ объединения элементов и понимается так же, как знак “+” в записи комплексного числа  $x + iy$ .

Умножение на число определим равенством

$$\begin{aligned} \alpha [\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}] &= \\ \alpha \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \alpha \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \alpha \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) [\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}] &= \alpha [\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \\ &\mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}] + \beta [\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}]. \end{aligned}$$

При этом считаем, что для диад остаются верными аксиомы (4.2.1) – (4.2.3). Следовательно, остается и понятие нулевой диады. Поэтому множество  $\mathbf{T}_2$  содержит в себе множество  $\mathbf{N}$ , ибо ничто не мешает в совокупности  $\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}$  считать диады  $\mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)}$  и  $\mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}$  нулевыми.

Введенное множество  $\mathbf{T}_2$  обладает структурой линейного пространства. В самом деле, на нем введена операция умножения на число и определено понятие суммы элементов. Обе эти операции не выводят, конечно, за пределы исходного множества  $\mathbf{T}_2$ . Пусть, например,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  принадлежат  $\mathbf{T}_2$

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{a}_{(4)} \otimes \mathbf{b}_{(4)}.$$

Покажем, что  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  определен и принадлежит  $\mathbf{T}_2$ . Поскольку векторы  $\mathbf{a}_{(i)}$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) принадлежат  $\mathbf{T}_1$ , то они могут быть представлены в виде разложения по базису  $\mathbf{T}_1$ . Возьмем в качестве базиса  $\mathbf{e}_i \in \mathbf{T}_1$ . Тогда имеем

$$\mathbf{a}_{(m)} = \alpha_{(m)}^s \mathbf{e}_s, \quad (m = 1, 2, 3, 4).$$

По индексу  $s$  подразумевается, как всегда, суммирование от 1 до 3. Теперь можем записать

$$\mathbf{C} = \sum_{s=1}^4 \mathbf{a}_{(s)}^m \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{b}_{(s)} = \mathbf{e}_m \otimes \sum_{s=1}^4 \mathbf{a}_{(s)}^m \mathbf{b}_{(s)} = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{d}^m,$$

где  $\mathbf{d}^m = \sum_{s=1}^4 \mathbf{a}_{(s)}^m \mathbf{b}_{(s)}$  – векторы. Отсюда может показаться, что введенное определение суммы зависит от выбора базиса, но это не так. Действительно, возьмем какой-либо другой базис  $\mathbf{e}_{k'}$ . Тогда в этом базисе

$$\mathbf{C}' = \mathbf{e}_{m'} \otimes \mathbf{d}^{m'}, \quad \mathbf{d}^{m'} = \sum_{s=1}^4 \mathbf{a}_{(s)}^{m'} \mathbf{b}_{(s)}. \quad (4.3.4)$$

В первой главе была установлена связь между базисами и координатами вектора относительно разных базисов

$$\mathbf{e}_{m'} = h_{m'}^p \mathbf{e}_p, \quad \mathbf{a}_{(s)}^{m'} = h_k^{m'} \mathbf{a}_{(s)}^k, \quad h_m^p h_k^{m'} = \delta_k^p.$$

Подставляя эти разложения в (4.3.4), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{C}' &= h_{m'}^p \mathbf{e}_p \otimes h_k^{m'} \sum_{s=1}^4 \mathbf{a}_{(s)}^k \mathbf{b}_{(s)} = h_{m'}^p h_k^{m'} \mathbf{e}_p \otimes \sum_{s=1}^4 \mathbf{a}_{(s)}^k \mathbf{b}_{(s)} = \\ &= \delta_k^p \mathbf{e}_p \otimes \sum_{s=1}^4 \mathbf{a}_{(s)}^k \mathbf{b}_{(s)} = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{d}^k = \mathbf{C}, \quad (\delta_k^p \mathbf{e}_p = \mathbf{e}_k). \end{aligned}$$

Полученное равенство показывает, что принятое определение суммы не зависит от выбора базиса в  $\mathbf{T}_1$ . Итак, введенное множество  $\mathbf{T}_2$  является линейным пространством. Оно называется тензорным произведением двух трехмерных линейных пространств  $\mathbf{T}_1$  и обозначается символом  $\mathbf{T}_2 : \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_1$ . Можно сказать, что пространство  $\mathbf{T}_2$  порождено пространством  $\mathbf{T}_1$ . Элементы множества  $\mathbf{T}_2$  называются тензорами второго ранга и обозначаются полужирными прописными буквами

**A, B, C, ...**

К сожалению, далеко не всегда удастся придерживаться правила: векторы обозначать полужирными строчными буквами, а тензоры обозначать полужирными прописными буквами. Нарушения этого правила встречаются очень часто и потому отличать векторы от тензоров нужно по смыслу, а не по обозначениям.

Итак, тензоры второго ранга — это совокупности конечного числа упорядоченных пар векторов (диад).

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \dots + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}.$$

Мы видели, что любой тензор второго ранга можно свести к совокупности не более чем трех диад. Однако стремиться к этому не только не надо, но, как правило, это и нецелесообразно. Отметим, что всякая диада является тензором второго ранга, но тензор второго ранга может быть сведен к одной диаде только в исключительных и очень редких случаях.

Выше тензоры второго ранга были введены совершенно формально и вопрос об их полезности (или бесполезности) еще предстоит выяснить.

## 4.4 Операции с тензорами второго ранга

Выше уже введены операции умножения тензора второго ранга на число и сложение тензоров. Можно ввести еще целый ряд операций.

*1. Внутреннее умножение тензоров второго ранга* есть отображение  $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$ . Пусть  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2$ . Поставим им в соответствие элемент  $\mathbf{C} \in \mathcal{T}_2$  по правилу

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \\ &(\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}) \cdot (\mathbf{c}_{(1)} \otimes \mathbf{d}_{(1)} + \mathbf{c}_{(2)} \otimes \mathbf{d}_{(2)} + \mathbf{c}_{(3)} \otimes \mathbf{d}_{(3)}) \\ &= (\mathbf{b}_{(1)} \cdot \mathbf{c}_{(1)})\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{d}_{(1)} + (\mathbf{b}_{(2)} \cdot \mathbf{c}_{(1)})\mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{d}_{(1)} + (\mathbf{b}_{(3)} \cdot \mathbf{c}_{(1)})\mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{d}_{(1)} + \\ &\quad (\mathbf{b}_{(1)} \cdot \mathbf{c}_{(2)})\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{d}_{(2)} + (\mathbf{b}_{(2)} \cdot \mathbf{c}_{(2)})\mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{d}_{(2)} + (\mathbf{b}_{(3)} \cdot \mathbf{c}_{(2)})\mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{d}_{(2)} + \\ &\quad (\mathbf{b}_{(1)} \cdot \mathbf{c}_{(3)})\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{d}_{(3)} + (\mathbf{b}_{(2)} \cdot \mathbf{c}_{(3)})\mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{d}_{(3)} + (\mathbf{b}_{(3)} \cdot \mathbf{c}_{(3)})\mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{d}_{(3)}. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Проще всего это правило запоминается при внутреннем умножении диад

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}.$$

Внутреннее умножение тензоров не коммутативно, т.е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

В этом легко убедиться на примере диад

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} \otimes \mathbf{b}.$$

*2. Двойное внутреннее умножение тензоров* есть отображение  $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_0$ . Любым двум тензорам из  $\mathcal{T}_2$  можно поставить в соответствие

число по правилу

$$\alpha = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \cdot \cdot \sum_{s=1}^3 \mathbf{c}_{(s)} \otimes \mathbf{d}_{(s)} = \sum_{s,k=1}^3 (\mathbf{b}_{(s)} \cdot \mathbf{c}_{(k)}) (\mathbf{a}_{(s)} \cdot \mathbf{d}_{(k)}). \quad (4.4.2)$$

Для диад имеем

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

Двойное внутреннее умножение коммутативно

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}. \quad (4.4.3)$$

В этом легко убедиться прямым вычислением, учитывая, что  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$  для любых векторов. Операции внутреннего и двойного внутреннего умножения бинарны, т.е. в них участвуют два элемента из  $\mathsf{T}_2$ . Важное значение имеет унарная операция, называемая транспонированием тензора.

**3. Транспонирование тензора.** Эта операция представляет собой отображение  $\mathsf{T}_2 \rightarrow \mathsf{T}_2$ . Пусть задан тензор  $\mathbf{A}$ . Транспонированным тензором  $\mathbf{A}^\top$  называется тензор, построенный по правилу

$$\mathbf{A}^\top = \left( \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \right)^\top = \sum_{s=1}^3 \mathbf{b}_{(s)} \otimes \mathbf{a}_{(s)}. \quad (4.4.4)$$

Для диады :  $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}^\top = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ .

**4. Скалярное произведение тензоров.** Транспонированный тензор встречается, например, в операции скалярного произведения тензоров второго ранга. Скалярным произведением тензоров  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  называется отображение  $\mathsf{T}_2 \times \mathsf{T}_2 \rightarrow \mathsf{T}_0$ , т.е. двум тензорам ставится в соответствие число по правилу

$$\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}^\top. \quad (4.4.5)$$

Скалярное умножение отличается от двойного внутреннего умножения важным свойством. А именно, в первом случае:

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^\top = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

В то же время, если  $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A} = 0$ , то отсюда не следует, что  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ . Проще всего убедиться в этом на примере диады  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^\top &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^\top = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Поэтому  $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ , если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Если  $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{0}$ , то по крайней мере один вектор из диады равен  $\mathbf{0}$ , а потому и вся диада нулевая.

*Упражнение.* Определение (4.4.5) можно назвать скалярным произведением только тогда, когда

$$\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{B}, \mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}^\top = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}^\top.$$

Доказать, что

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \cdot \cdot \mathbf{B}^\top \quad (4.4.6)$$

и отсюда доказать симметричность скалярного произведения. Конечно, нужно помнить (4.4.3).

*Замечание.* Часто в литературе используется другое определение внутреннего произведения тензоров. Например, такое

$$\mathbf{A} \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^\top \cdot \cdot \mathbf{B}.$$

Здесь справа фигурируют обозначения, принятые в данном изложении, а слева — встречающиеся в литературе. Оба способа имеют свои достоинства и недостатки. Принятый нами способ обладает тем недостатком, что приходится вводить скалярное произведение и двойное внутреннее произведение. Однако этот недостаток с лихвой окупается в тензорном анализе, когда вводится операция градиента.

Введем еще операции умножения тензоров второго ранга на векторы. Таких операций можно ввести четыре.

**5. Скалярное умножение тензора второго ранга на вектор справа.** Пусть  $\mathbf{A} \in \mathbf{T}_2$  и  $\mathbf{a} \in \mathbf{T}_1$ . Рассмотрим отображение  $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_1$ , т.е. паре тензор и вектор ставим в соответствие вектор по правилу

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)}) \cdot \mathbf{a} = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_{(s)}) \mathbf{a}_{(s)}. \quad (4.4.7)$$

**6. Скалярное умножение тензора второго ранга на вектор слева:**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_{(s)}) \mathbf{b}_{(s)}. \quad (4.4.8)$$

Сравнивая (4.4.7) и (4.4.8), видим, что

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}.$$

**Упражнение:** доказать, что для любого тензора второго ранга и любого вектора справедливо тождество

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^\top. \quad (4.4.9)$$

Определим теперь векторное умножение тензора на вектор. Это отображение  $\mathbb{T}_2 \times \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$ . Можно ввести левое и правое векторные умножения

**7. Векторное умножение тензора на вектор справа:**

$$\mathbf{A} \times \mathbf{a} = \left( \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \right) \times \mathbf{a} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes (\mathbf{b}_{(s)} \times \mathbf{a}). \quad (4.4.10)$$

**8. Векторное умножение тензора на вектор слева:**

$$\mathbf{a} \times \mathbf{A} = \mathbf{a} \times \left( \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \right) = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{a} \times \mathbf{a}_{(s)}) \otimes \mathbf{b}_{(s)}. \quad (4.4.11)$$

Результатом векторного умножения тензора второго ранга на вектор является тензор второго ранга.

**Упражнение:** прямым вычислением доказать тождество

$$\mathbf{A} \times \mathbf{a} = -[\mathbf{a} \times \mathbf{A}^\top]^\top.$$

Важной и часто встречающейся операцией для тензоров второго ранга является операция вычисления следа (trace) тензора второго ранга  $\mathbf{A}$ .

**9. След тензора второго ранга.** При вычислении следа тензора любому тензору  $\mathbf{A}$  однозначно сопоставляется число, обозначаемое  $\text{tr } \mathbf{A}$ . Пусть тензор  $\mathbf{A}$  есть совокупность диад

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \dots + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}.$$

Тогда след тензора  $\mathbf{A}$  вычисляется по правилу

$$\text{tr} \mathbf{A} = \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \dots + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \dots + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}. \quad (4.4.12)$$

**Упражнение:** прямым вычислением доказать и после этого запомнить полезные тождества

$$\text{tr} \mathbf{A} = \text{tr} \mathbf{A}^\top, \quad (4.4.13)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}, \quad (4.4.14)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}^\top). \quad (4.4.15)$$

В заключение этого пункта отметим, что справедлива

**Теорема:** размерность пространства  $T_2 = T_1 \otimes T_1$  равна  $9 = 3 \times 3$ , где  $3$  – размерность пространства  $T_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{e}_i$  – базис в  $T_1$ . Докажем, что элементы  $T_2$ , являющиеся диадами  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ , линейно независимы. Это означает, что равенство

$$\mathbf{h}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

возможно тогда и только тогда, когда  $\mathbf{h}^{ij} = 0$ . Действительно, пусть  $\mathbf{H} = \mathbf{h}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  равен нулю. Возьмем тройку векторов  $\mathbf{e}^m$ . Умножим последнее равенство скалярно на векторы  $\mathbf{e}^m$ . Тогда получим

$$(\mathbf{h}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}^m = \mathbf{h}^{im} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}.$$

Последнее равенство возможно только тогда, когда все  $\mathbf{h}^{ij}$  равны нулю, что и доказывает линейную независимость диад  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ . Они принадлежат множеству  $T_2$ . Таким образом, имеем девять линейно независимых диад. Поэтому размерность  $T_2$  не может быть меньше 9. Но она не может быть и выше 9, ибо любой элемент из  $T_2$ , т.е. любой тензор второго ранга, может быть представлен единственным образом как линейная комбинация этих диад. Действительно,

$$\mathbf{A} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)}^m \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{b}_{(s)}^p \mathbf{e}_p = A^{mp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p, \quad (4.4.16)$$

где

$$A^{mp} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)}^m \mathbf{b}_{(s)}^p.$$

Единственность представления (4.4.16) обусловлена единственностью разложения векторов в  $T_1$ . Таким образом, размерность  $T_2$  в точности равна девяти.

## 4.5 Симметричные и антисимметричные тензоры

Тензор второго ранга называется симметричным, если он удовлетворяет равенству

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T. \quad (4.5.1)$$



Возможно и другое, эквивалентное, определение симметричного тензора. Тензор второго ранга симметричен, если для всех векторов  $\mathbf{x} \in T_1$  справедливо равенство

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.5.2)$$

Иногда последнее определение удобнее.

**Примеры** симметричных тензоров второго ранга:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}.$$

Важным примером симметричного тензора является единичный тензор  $\mathbf{E}$ . Можно различным способом вводить определение единичного тензора. Все эти способы, конечно, эквивалентны в том смысле, что приводят к одному и тому же элементу из  $T_2$ .

**Определение:** тензор второго ранга  $\mathbf{E}$  называется единичным, если для любого вектора  $\mathbf{x}$  справедливо равенство

$$\mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}.$$

Для введения единичного тензора исходим из тождества  $\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . Разложим вектор  $\mathbf{x}$  по базису  $\mathbf{e}_m$ :  $\mathbf{x} = x^m \mathbf{e}_m$ . Координаты вектора  $\mathbf{x}$  находятся по формулам  $x^m = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^m$ . Теперь имеем

$$\mathbf{x} = x^m \mathbf{e}_m = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_* \Rightarrow \mathbf{E}_* = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m$$

или иначе

$$\mathbf{x} = x^m \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m (\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{E}^* = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m.$$

Видим, что левая единица  $\mathbf{E}^* = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m$  и правая единица  $\mathbf{E}_* = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m$  связаны равенством  $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_*^T$ . Убедимся, что на самом деле они совпадают. Действительно, с учетом формул  $\mathbf{e}^m = g^{mn} \mathbf{e}_n$ ,  $\mathbf{e}_n = g_{nm} \mathbf{e}^m$  имеем

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m = \mathbf{e}_m \otimes g^{mn} \mathbf{e}_n = g^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = g^{nm} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = \mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}_n = \mathbf{E}_*,$$

т.е. левая и правая единицы совпадают и единичный тензор

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_* = \mathbf{E}^*$$

симметричен. Для единичного тензора  $\mathbf{E}$  имеем эквивалентные представления

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m = g^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = g_{mn} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m. \quad (4.5.3)$$

Здесь указано выражение  $\mathbf{E}$  через базисы, но сам  $\mathbf{E}$  от выбора базиса не зависит. В частности, полезно помнить следующее представление для единичного тензора

$$\mathbf{E} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p},$$

где  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{p}$  – произвольная ортонормированная тройка векторов. Легко убедиться, что  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}$ .

*Упражнение:* доказать, что тождество

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A} \quad (4.5.4)$$

справедливо для любого тензора  $\mathbf{A}$ .

Нетрудно убедиться, что существует только один единичный тензор в  $T_2$ . В самом деле, допустим, что существует два единичных тензора  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ . Оба они обладают свойством (4.5.4). Тогда имеем

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}.$$

Первый знак равенства следует из того, что  $\mathbf{E}_2$  есть единичный тензор, а второе равенство следует из того, что  $\mathbf{E}_1$  есть единичный тензор. Конечно, для единичного тензора справедливо равенство (4.5.4).

Важными примерами симметричных тензоров второго ранга являются:

**Проекторы.** Тензор  $\mathbf{A}$  называется проектором, если выполняются следующие два условия

$$1) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad 2) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}. \quad (4.5.5)$$

Например, проекторами являются тензоры

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} = \mathbf{E},$$

где  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{p}$  – суть единичные ортогональные между собой векторы. Первый из этих проекторов при действии на вектор  $\mathbf{a}$  проецирует его на прямую, натянутую на вектор  $\mathbf{m}$ . Второй проектор при действии на вектор  $\mathbf{a}$  проецирует его на плоскость, натянутую на векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ :

$$(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m})\mathbf{m}, \quad (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{a})\mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}.$$

**Вставка: тензор Леви-Чивиты.** На основе единичного тензора  $\mathbf{E}$  вводится важный для приложений тензор Леви-Чивиты  $\mathcal{E}$ , но для этого мы вынуждены выйти за пределы  $T_2$ . Введем в рассмотрение тензор

$$\mathcal{E} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}. \quad (4.5.6)$$

Строго говоря, эта операция у нас не определена и не могла быть определена в  $T_2$ . Но будем поступать совершенно формально и попробуем все же вычислить тензор  $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\mathbf{E} \times \mathbf{E} = -(\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m) \times (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^n) = -\mathbf{e}^m \otimes (\varepsilon_{mnp} \mathbf{e}^p) \otimes \mathbf{e}^n \\ &= \mathbf{e}^m \otimes (\varepsilon_{mnp} \mathbf{e}^n) \otimes \mathbf{e}^p.\end{aligned}$$

В этом выражении скобки можно было не расставлять и, кроме того, мы воспользовались формулой для векторного произведения базисных векторов через символы Леви-Чивиты, введенные в параграфе 3.7 третьей главы. В результате мы получили некий объект

$$\mathcal{E} = \varepsilon_{mnp} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}^p, \quad (4.5.7)$$

где, как всегда, подразумевается суммирование по разновысоким повторяющимся индексам. Тензор Леви-Чивиты  $\mathcal{E}$  оказался совокупностью уже не диад, а совокупностью триад векторов вида  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$ , т.е. это не тензор второго ранга. На самом деле тензор Леви-Чивиты является тензором третьего ранга, т.е. элементом нового множества, называемого тензорным произведением  $T_3$  трех векторных пространств

$$T_3 = T_1 \otimes T_1 \otimes T_1.$$

На этом примере читатель может легко понять способ введения тензоров высших рангов.

*Упражнение.* Используя результаты параграфа 3.7 доказать справедливость представления

$$\mathcal{E} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E} = \varepsilon_{mnp} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}^p = \varepsilon^{mnp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_p. \quad (4.5.8)$$

**Определение:** тензор  $\mathbf{A}$  называется антисимметричным (кососимметричным), если справедливо равенство

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, \quad (4.5.9)$$

или иначе: тензор  $\mathbf{A}$  называется антисимметричным, если для любого вектора  $\mathbf{x}$  справедливо тождество

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.5.10)$$

Примером антисимметричного тензора является тензор  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ .

Произвольному тензору второго ранга  $\mathbf{A}$  можно однозначно сопоставить симметричный тензор, который называется симметричной частью  $\mathbf{A}$  и обозначается  $\mathbf{A}^s$

$$\mathbf{A}^s = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T). \quad (4.5.11)$$

Эта операция называется симметрированием тензора. Аналогично, любому тензору  $\mathbf{A}$  можно однозначно сопоставить антисимметричный тензор  $\mathbf{A}^a$

$$\mathbf{A}^a = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \quad (4.5.12)$$

Эта операция называется альтернированием тензора. Очевидно, что любой тензор однозначно разлагается на симметричную и антисимметричную части

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^s + \mathbf{A}^a. \quad (4.5.13)$$

*Упражнение: доказать формулы*

a)  $\text{tr} \mathbf{B} = 0$  для любого  $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T$ ;

b)  $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$  для любых  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  и  $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T$ ;

c)  $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}^s \cdot \mathbf{B})$  для любого  $\mathbf{A}$  и любого  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$ ;

d) если  $\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 0$  для всех  $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T$ , то  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .

Симметричный тензор  $\alpha \mathbf{E}$ , где  $\alpha$  – вещественное число, называется шаровым. Любому симметричному тензору  $\mathbf{A}$  можно однозначно сопоставить шаровой тензор по правилу

$$\mathbf{A}_* \equiv \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{E}. \quad (4.5.14)$$

Симметричный тензор называется девиатором, если его след равен нулю. Произвольный симметричный тензор можно представить в виде разложения на шаровой тензор и девиатор

$$\mathbf{A} = \left( \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A} \right) \mathbf{E} + \mathbf{A}^d \quad \Rightarrow \quad \text{tr} \mathbf{A}^d = 0, \quad (\mathbf{A} = \mathbf{A}^T).$$

Таким образом, произвольный тензор второго ранга представим в виде разложения на три линейно независимые составляющие

$$\mathbf{A} = \left( \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A} \right) \mathbf{E} + \mathbf{A}^d + \mathbf{A}^a.$$

*Упражнение: разложить диаду  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  на сумму шарового тензора, девиатора и антисимметричного тензора*

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_* = \frac{1}{3} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{E}, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^a = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}),$$

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^d = \frac{1}{2}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) - \frac{1}{3}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{E}.$$

**Векторным инвариантом** тензора второго ранга называется вектор  $\mathbf{A}_\times$ , получаемый по правилу

$$\mathbf{A}_\times \equiv \left( \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \right)_\times \equiv \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \times \mathbf{b}_{(s)}. \quad (4.5.15)$$

Для диады имеем :  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

**Упражнение:** доказать, что векторный инвариант любого симметричного тензора равен нулю. Наоборот, если векторный инвариант  $\mathbf{A}$  равен нулю, то  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .

**Теорема.** Любой антисимметричный тензор представим в виде

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} \in T_1, \quad \mathbf{S} = -\mathbf{S}^T, \quad (4.5.16)$$

где вектор  $\boldsymbol{\omega}$  называется сопутствующим вектором тензора  $\mathbf{S}$ .

**Доказательство.** Выберем в  $T_1$  базис  $\mathbf{e}_m$ . Тензор  $\mathbf{S}$  представим в виде разложения по выбранному базису  $\mathbf{S} = S^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$ . Условие  $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T$  влечет равенство  $S^{mn} = -S^{nm}$ , т.е. среди девяти чисел  $S^{mn}$  только три являются независимыми. Иначе говоря, числа  $S^{mn}$  могут быть выражены через три числа. Например, это можно сделать с помощью формулы

$$S^{mn} = -\varepsilon^{mnp} \omega_p, \quad (4.5.17)$$

где  $\varepsilon^{mnp}$  — символ Леви-Чивиты, а  $\omega_p$  — искомые три числа. Нетрудно убедиться, что соответствие (4.5.17) взаимно однозначное. Подставляя (4.5.17) в разложение для  $\mathbf{S}$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = S^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n &= -\varepsilon^{mnp} \omega_p \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = -\omega_p \mathbf{e}^n \times \mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}_n = \\ &= \omega_p \mathbf{e}^p \times \mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_p \mathbf{e}^p. \end{aligned}$$

Вычисляя векторные инварианты от обеих частей этого равенства, получаем

$$\mathbf{S}_\times = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E})_\times = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}^n) \times \mathbf{e}_n = -2\boldsymbol{\omega}. \quad (4.5.18)$$

Необходимо запомнить это важное тождество, из которого находим

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \mathbf{S}_\times. \quad (4.5.19)$$

Этой формулой устанавливается связь между векторным инвариантом тензора  $\mathbf{S}$  и его сопутствующим вектором.

Можно дать другое и весьма поучительное доказательство представления (4.5.16). Возьмем произвольный вектор  $\mathbf{a}$  и вычислим произведение

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Легко доказать, что для любого антисимметричного тензора  $\mathbf{S}$  и любого вектора  $\mathbf{a}$  справедливо равенство

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Поскольку  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = 0$ , то  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . Отсюда следует, что  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ , где вектор  $\boldsymbol{\omega}$  произволен. Итак, получили равенство

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Поскольку левая часть этого равенства линейно зависит от вектора  $\mathbf{a}$ , то и правая его часть линейно зависит от  $\mathbf{a}$ , т.е. вектор  $\boldsymbol{\omega}$  не зависит от вектора  $\mathbf{a}$ . Последнее равенство справедливо для любых векторов  $\mathbf{a}$ . Поэтому можно написать это равенство для тройки базисных векторов  $\mathbf{e}_n$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}. \quad (4.5.20)$$

Здесь были учтены представления (4.5.3) для единичного тензора.

*Упражнение: доказать тождества*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{E}. \quad (4.5.21)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E})_{\times} = -2\mathbf{a}. \quad (4.5.22)$$

Часто бывает полезно представлять векторное произведение векторов с помощью скалярного произведения антисимметричного тензора на вектор

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{E}.$$

*Упражнение: доказать, что для любого вектора  $\mathbf{a}$  справедливо тождество*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \mathbf{a}.$$

Отметим, что данное тождество справедливо только для единичного тензора.

Докажем с помощью этих представлений, например, формулу двойного векторного произведения

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Заметим, что

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Теперь можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{E}] \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

## 4.6 Координаты тензора второго ранга

Тензоры второго ранга могут быть представлены в различных, но совершенно эквивалентных формах. Выше уже показывалось, что множество  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 \otimes \mathbf{T}_1$ , элементами которого являются всевозможные совокупности трех пар векторов, — девятимерное пространство. Оно обладает базисом, а следовательно, обладает несчетным множеством базисов. Тензор второго ранга может быть представлен в любом из этих базисов. Наиболее употребительными являются следующие базисы в  $\mathbf{T}_2$ . В пространстве векторов  $\mathbf{T}_1$  вводятся два базиса: основной  $\mathbf{e}_i$  и взаимный  $\mathbf{e}^m$ :  $\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^m$ . Этим двум базисам в  $\mathbf{T}_2$  соответствует четыре базиса

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^m, \quad \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n.$$

Тензор второго ранга может быть записан в любом из перечисленных базисов

$$\mathbf{A} = A^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = A_{mn} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n = A_{*n}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n = A_{m*}^{*n} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_n. \quad (4.6.1)$$

Числа  $A^{mn}$  называются координатами тензора  $\mathbf{A}$  относительно базиса  $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$ ; их также называют контравариантными координатами  $\mathbf{A}$ . Числа  $A_{mn}$  суть координаты  $\mathbf{A}$  относительно базиса  $\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n$  или ковариантные координаты  $\mathbf{A}$ . Числа  $A_{*n}^{m*}$  и  $A_{m*}^{*n}$  суть координаты относительно базисов  $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n$  и  $\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_n$  соответственно; их называют смешанными координатами. Для вычисления координат тензора используются формулы

$$\begin{aligned} A^{mn} &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n, \quad A_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n, \\ A_{*n}^{m*} &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n, \quad A_{m*}^{*n} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Порядок следования индексов у координат важен; первый индекс у координаты всегда относится к первому базису в диаде базисных векторов, а второй — ко второму. Поэтому при записи тензора в смешанном базисе  $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n$  у координатных индексов ставятся звездочки, чтобы было ясно, какой индекс является первым, а какой вторым. Использование базиса в  $\mathbf{T}_2$  позволяет установить взаимно однозначное соответствие между тензорами второго ранга и

матрицами  $3 \times 3$ . Однако здесь нужно соблюдать некоторую осторожность, поскольку, например, определитель тензора не всегда равен определителю матрицы его координат. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Между различными координатами тензора существует взаимно однозначная связь, которая немедленно вытекает из формул (4.6.1) и (4.6.2). Выразим, например, координаты  $A^{mn}$  через все остальные

$$\begin{aligned} A^{mn} &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n = \mathbf{e}^m \cdot A_{pq} \mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}^q \cdot \mathbf{e}^n = g^{mp} g^{nq} A_{pq}, \\ A^{mn} &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n = \mathbf{e}^m \cdot A_{*q}^{p*} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^q \cdot \mathbf{e}^n = \delta_p^m A_{*q}^{p*} g^{nq} = g^{nq} A_{*q}^{m*}, \\ A^{mn} &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n = \mathbf{e}^m \cdot A_{q*}^{*p} \mathbf{e}^q \otimes \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}^n = g^{mq} A_{q*}^{*n}. \end{aligned}$$

Аналогично могут быть найдены и другие формулы, связывающие различные координаты тензора

$$A_{mn} = g_{mp} g_{nq} A^{pq} = g_{mp} A_{*n}^{p*} = g_{np} A_{m*}^{*p}$$

и т.д. Использование представлений тензора  $\mathbf{A}$  в формах (4.6.1) позволяет легко установить, как меняются координаты тензора при переходе к другому базису. Введем в  $T_1$  базис  $\mathbf{e}_{m'}$  и взаимный ему базис  $\mathbf{e}^{m'}$ . Между новым и старым базисами существует линейная связь

$$\mathbf{e}_{m'} = h_{m'}^p \mathbf{e}_p, \quad \mathbf{e}^{m'} = h_p^{m'} \mathbf{e}^p, \quad h_p^{m'} h_{n'}^p = \delta_{n'}^{m'}, \quad h_p^{m'} h_{m'}^s = \delta_p^s. \quad (4.6.3)$$

Найдем связь между координатами  $\mathbf{A}$  в базисах  $\mathbf{e}_{m'} \otimes \mathbf{e}_{n'}$  и  $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$ . Сам тензор  $\mathbf{A}$  не зависит от выбора базиса. Поэтому имеем

$$\mathbf{A} = A^{m'n'} \mathbf{e}_{m'} \otimes \mathbf{e}_{n'} = A^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n. \quad (4.6.4)$$

Обращая формулы (4.6.3), получаем

$$\mathbf{e}_m = h_m^{p'} \mathbf{e}_{p'}.$$

Подставляя эти разложения в (4.6.4), приходим к соотношениям

$$\mathbf{A} = A^{m'n'} \mathbf{e}_{m'} \otimes \mathbf{e}_{n'} = A^{pq} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q = A^{pq} h_p^{m'} h_q^{n'} \mathbf{e}_{m'} \otimes \mathbf{e}_{n'}.$$

Откуда

$$A^{m'n'} = h_p^{m'} h_s^{n'} A^{ps}. \quad (4.6.5)$$

Аналогично устанавливаются формулы для остальных координат тензора

$$A_{m'n'} = h_{m'}^p h_{n'}^s A_{ps}, \quad A_{*n'}^{m'*} = h_p^{m'} h_{n'}^s A_{*s}^{p*}, \quad A_{n'*}^{*m'} = h_n^p h_s^{m'} A_{p*}^{*s}. \quad (4.6.6)$$



В книгах по тензорному исчислению, использующих координатное представление тензоров, формулы (4.6.5) и (4.6.6) приводятся в качестве определений тензора второго ранга. Из этих формул, в частности, видно, почему определитель матрицы координат тензора  $\det(\mathbf{A}_{pq})$  не может совпадать с определителем тензора  $\mathbf{A}$ . В самом деле, определитель матрицы координат  $\det(\mathbf{A}_{pq})$  зависит от выбора базиса. При переходе к новому базису имеем

$$\det(\mathbf{A}_{m'n'}) = \det(\mathbf{h}_m^p, \mathbf{h}_n^s, \mathbf{A}_{ps}) = \left[ \det(\mathbf{h}_{q'}^p) \right]^2 \det(\mathbf{A}_{mn}) \neq \det(\mathbf{A}_{mn}).$$

В то же время, определитель тензора  $\mathbf{A}$ , будучи характеристикой величины, не зависящей от выбора базиса, сам не должен зависеть от выбора базиса. Инвариантное определение величины  $\det \mathbf{A}$  будет дано в следующем параграфе. Для всех введенных выше операций с тензорами легко дать координатное представление

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &\longleftrightarrow \mathbf{A}_{mn} + \mathbf{B}_{mn} \longleftrightarrow \mathbf{A}_{*n}^{m*} + \mathbf{B}_{*n}^{m*} \longleftrightarrow \mathbf{A}^{mn} + \mathbf{B}^{mn} \longleftrightarrow \mathbf{A}_{n*}^{*m} + \mathbf{B}_{n*}^{*m}, \\ \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &\longleftrightarrow \mathbf{C}_{mn} = g^{pq} \mathbf{A}_{mp} \mathbf{B}_{qn} = \mathbf{A}_{m*}^{*p} \mathbf{B}_{pn} = \mathbf{A}_{mp} \mathbf{B}_{*n}^{p*} = \dots, \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{mn} \mathbf{A}_{nm}, \quad \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^\Gamma = \mathbf{A}^{mn} \mathbf{A}_{mn}. \end{aligned}$$

Не будем приводить здесь других координатных формул, ибо все они получаются вполне элементарно.

## 4.7 Линейные функции векторов и тензоры второго ранга

В этом параграфе будет показано одно из приложений тензоров второго ранга. Одними из важнейших в механике являются линейные вектор-функции векторного аргумента. Например, количество движения и кинетический момент произвольной механической системы являются линейными вектор-функциями скоростей. Рассмотрим векторную функцию векторного аргумента, т.е. отображение  $\mathbf{T}_1 \rightarrow \mathbf{T}_1$

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{T}_1. \quad (4.7.1)$$

Отображение (4.7.1) называется линейным, если

$$\mathbf{f}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (4.7.2)$$

для всех  $\alpha$  и  $\beta \in \mathbf{T}_0$  и всех  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{T}_1$ .

**Теорема.** Любое линейное отображение  $T_1 \rightarrow T_1$  представимо в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad (4.7.3)$$

где  $\mathbf{A}$  – тензор второго ранга, называемый тензором линейного отображения.

**Доказательство.** Выберем в  $T_1$  базис  $\mathbf{e}_m$ . Представим  $\mathbf{x}$  в виде разложения

$$\mathbf{x} = x^m \mathbf{e}_m.$$

Тогда по (4.7.1) и (4.7.2) имеем

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x^m \mathbf{e}_m) = x^m \mathbf{f}(\mathbf{e}_m). \quad (4.7.4)$$

Объект  $\mathbf{f}(\mathbf{e}_m)$  является ковариантным, т.е. он при переходе к новому базису преобразуется по тому же закону, что и векторы базиса  $\mathbf{e}_m$ . В самом деле,

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_{m'}) = \mathbf{f}(h_{m'}^p \mathbf{e}_p) = h_{m'}^p \mathbf{f}(\mathbf{e}_p).$$

Как уже говорилось в главе 3, у таких объектов индекс ставится внизу. Итак,  $\mathbf{f}(\mathbf{e}_p) \equiv \mathbf{f}_p$ . Теперь (4.7.4) записывается в форме

$$\mathbf{y} = x^m \mathbf{f}_m = \mathbf{f}_m x^m = \mathbf{f}_m (\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{f}_m \otimes \mathbf{e}^m) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{f}_m \otimes \mathbf{e}^m = \mathbf{f}(\mathbf{e}_m) \otimes \mathbf{e}^m. \quad (4.7.5)$$

Легко убедиться, что  $\mathbf{A}$  не зависит от выбора конкретного базиса  $\mathbf{e}_m$ . Поскольку  $\mathbf{A}$  есть совокупность трех пар векторов, то это тензор второго ранга

$$\mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}^3. \quad (4.7.6)$$

Таким образом, теорема доказана. Эта теорема показывает одну из возможных и важных областей приложения тензоров второго ранга, ибо линейные векторные функции векторного аргумента очень часто встречаются в физике. Среди линейных отображений важное место занимают однозначно обратимые отображения. Выясним, в чем состоят необходимые и достаточные условия обратимости. Область определения отображения (4.7.3) есть все множество  $T_1$ . Областью значений отображения (4.7.3) является некоторое подмножество  $S(\mathbf{A})$  множества  $T_1$ . Для однозначной обратимости (4.7.3) необходимо и достаточно, чтобы размерности множеств  $T_1$  и  $S(\mathbf{A})$  совпадали. Размерность  $T_1$  равна 3. Если размерность  $S(\mathbf{A})$  также равна трем, то между ними, как известно, существует изоморфизм. Из (4.7.6) видим, что тензор

линейного отображения  $\mathbf{A}$  полностью определен, если заданы его значения на трех линейно независимых векторах, например, на векторах базиса  $T_1$ . Действительно, пусть известны векторы

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_m \quad | \otimes \mathbf{e}^m. \quad (4.7.7)$$

Умножая обе части последнего равенства тензорно на  $\mathbf{e}^m$  и суммируя по  $m$ , получаем

$$\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{e}^m = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}.$$

Очевидно, что если векторы  $\mathbf{a}_m$  линейно независимы, то размерность  $S(\mathbf{A})$  равна трем. Если же  $\mathbf{a}_m$  линейно зависимы, то размерность  $S(\mathbf{A})$  меньше трех. В самом деле, линейная зависимость  $\mathbf{a}_m$  означает, что они лежат в одной плоскости. Убедимся, что образ любого вектора  $\mathbf{x} \in T_1$  также лежит в этой плоскости. Пусть вектор  $\mathbf{m}$  ортогонален плоскости, в которой лежат векторы  $\mathbf{a}_m$ . Тогда умножая обе части (4.7.7) на  $\mathbf{m}$  скалярно, получаем

$$0 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.7.8)$$

Пусть теперь  $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in T_1$ . Умножая это равенство скалярно на  $\mathbf{m}$  и учитывая (4.7.8), получаем, что  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{m} = 0$ , т.е. все значения отображения  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  лежат в одной плоскости. Поэтому размерность  $S(\mathbf{A})$  не больше двух. Теперь мы можем сформулировать условие однозначной обратимости линейного отображения: отображение (4.7.3) обратимо тогда и только тогда, когда образы трех линейно независимых векторов являются линейно независимыми. Выберем три вектора  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in T_1$ . Линейная независимость этих векторов эквивалентна условию

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0.$$

Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Образы векторов будем обозначать штрихами

$$\mathbf{a}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}.$$

Линейная независимость образов  $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$  записывается в виде

$$(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}' \neq 0.$$

Важное значение имеет характеристика тензора  $\mathbf{A}$ , называемая определителем тензора

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}'}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} = \frac{[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}. \quad (4.7.9)$$

Значение определителя тензора  $\mathbf{A}$  на самом деле не зависит от выбора векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Чтобы убедиться в этом, проведем прямое вычисление  $(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}'$ .

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}' &= \\ (A^{mn} \mathbf{a}_n \mathbf{e}_m \times A^{pq} \mathbf{b}_q \mathbf{e}_p) \cdot A^{rs} \mathbf{c}_s \mathbf{e}_r &= A^{mn} A^{pq} A^{rs} \mathbf{a}_n \mathbf{b}_q \mathbf{c}_s \mathbf{e}_{mpr} \sqrt{g} = \\ &= (\det A^{mn}) \frac{g}{\sqrt{g}} \mathbf{e}^{nqs} \mathbf{a}_n \mathbf{b}_q \mathbf{c}_s = g \det(A^{mn}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Здесь использованы формулы вычисления определителя матрицы, которые мы предлагаем доказать читателю в качестве упражнения

$$\begin{aligned} \det(A^{mn}) &= \mathbf{e}_{mnp} A^{m1} A^{n2} A^{p3}, \quad A_{*1}^{m*} A_{*2}^{n*} A_{*3}^{p*} \mathbf{e}_{mnp} = \det(A_{*n}^{m*}), \\ A^{mr} A^{ns} A^{pt} \mathbf{e}_{mnp} &= \det(A^{mn}) \mathbf{e}^{rst}. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

*Упражнение: доказать формулы*

$$\det \mathbf{A} = g \det(A^{mn}) = \frac{1}{g} \det(A_{mn}) = \det(A_{*n}^{m*}) = \det(A_{n*}^{*m}). \quad (4.7.11)$$

Формулы (4.7.11) можно принять в качестве определения для определителя тензора. Тогда формула (4.7.9) дает геометрическое истолкование определителя  $\mathbf{A}$ .

*Упражнение: доказать формулы*

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}, \quad \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}. \quad (4.7.12)$$

Докажем последнюю формулу. Пусть  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  — три линейно независимых вектора;  $\mathbf{a}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{a}'' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{c}'' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}'$ . Тогда

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{(\mathbf{a}'' \times \mathbf{b}'') \cdot \mathbf{c}''}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} = \frac{(\mathbf{a}'' \times \mathbf{b}'') \cdot \mathbf{c}''}{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}'} \cdot \frac{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}'}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}.$$

Определитель  $\mathbf{E}$  равен, очевидно, единице. Итак, для обратимости линейного отображения необходимо и достаточно, чтобы определитель тензора этого отображения был отличен от нуля. Введем понятие правого обратного тензора  $\mathbf{A}^{-1}$ , как решения уравнения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$

Левым обратным тензором  $\mathbf{A}_*^{-1}$  называется решение уравнения

$$\mathbf{A}_*^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (4.7.13)$$

Покажем, что левый и правый обратные тензоры совпадают. Действительно, умножая (4.7.13) на  $\mathbf{A}^{-1}$  справа, получаем

$$\mathbf{A}_*^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_*^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Поэтому в дальнейшем будем говорить просто об обратном тензоре. Обратный тензор существует только для тензоров, определитель которых отличен от нуля. Такие тензоры называются невырожденными. Вырожденными называют тензоры с нулевым определителем. Вычисление обратного тензора может быть выполнено многими способами. Один из них основан на использовании тождества Кэли-Гамильтона, которое мы приведем без доказательства.

**Тождество Кэли-Гамильтона.** Произвольный тензор второго ранга  $\mathbf{A}$  удовлетворяет уравнению

$$-\mathbf{A}^3 + I_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 - I_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_3(\mathbf{A})\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (4.7.14)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{A}) &= \operatorname{tr} \mathbf{A}, & I_2(\mathbf{A}) &= \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2], \\ I_3(\mathbf{A}) &= \det \mathbf{A} = \frac{1}{6}(\operatorname{tr} \mathbf{A})^3 - \frac{1}{2}\operatorname{tr} \mathbf{A} \operatorname{tr} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{3}\operatorname{tr} \mathbf{A}^3. \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

Функции  $I_k(\mathbf{A})$  называются главными инвариантами тензора  $\mathbf{A}$ . Смысл этого термина будет показан в следующем параграфе. В (4.7.14) входят степени тензоров, которые определяются стандартным образом

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}.$$

Тождество Кэли-Гамильтона можно использовать для вычисления степеней тензора выше второй, а также отрицательные степени невырожденных тензоров. Для выражения, например, четвертой степени тензора через степени тензора не выше второй достаточно умножить (4.7.14) на  $\mathbf{A}$  и затем исключить из результата третью степень тензора. В результате получим

$$\mathbf{A}^4 = (I_1^2 - I_2)\mathbf{A}^2 + (I_3 - I_1 I_2)\mathbf{A} + I_1 I_3 \mathbf{E}.$$

Обратный тензор получается после умножения (4.7.14) на  $\mathbf{A}^{-1}$

$$I_3(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^2 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{E}.$$

Если обратный тензор линейного отображения известен, то легко решить линейное уравнение

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}.$$

Тензор  $\mathbf{A}$  называется унитарным, если его определитель равен единице. Такие тензоры встречаются при изучении деформации несжимаемых сред, т.е. таких сред, объем которых не меняется в процессе деформации.

*Упражнение: доказать формулу*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

В заключение этого пункта приведем полезное тождество, справедливое для любого невырожденного тензора  $\mathbf{A}$  и для любой пары векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-\text{T}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (4.7.16)$$

Доказательство этого тождества оставляем читателю. Отправной точкой при доказательстве является формула (4.7.9) и произвольность входящих в нее линейно независимых векторов.

*Упражнение: доказать тождество Кэли-Гамильтона.*

*Подсказка: выбираем произвольный базис  $\mathbf{e}_m$  в  $\mathbb{T}_1$  и выражаем в нем тензор  $\mathbf{A} = A_n^m \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n$ . Далее исходим из истинного тождества*

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_m = A_m^q \mathbf{e}_q \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}_m^q \cdot \mathbf{e}_q = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_m^q \equiv \mathbf{A} \delta_m^q - A_m^q \mathbf{E}. \quad (4.7.17)$$

Нетрудно убедиться, что скалярные произведения тензоров второго ранга  $\mathbf{B}_m^q$  коммутативны. В таком случае уравнение (4.7.17) можно рассматривать как обычную однородную систему трех уравнений для трех неизвестных  $\mathbf{e}_m$ . Отличие от скалярного случая в том, что неизвестные являются векторами, коэффициенты системы являются тензорами второго ранга (специального вида), а обычное произведение заменено скалярным. Важно здесь то, что внутреннее умножение тензоров рассматриваемого типа коммутативно. Именно поэтому здесь справедливы все факты известные для скаляров. Система (4.7.17) заведомо имеет нетривиальное решение, и, следовательно, ее определитель равен нулю. Используя формулу (3.7.9) для вычисления определителя, записываем

$$\mathbf{e}_{mnp} \mathbf{B}_1^m \cdot \mathbf{B}_2^n \cdot \mathbf{B}_3^p = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{B}_n^m \cdot \mathbf{B}_q^p = \mathbf{B}_q^p \cdot \mathbf{B}_n^m). \quad (4.7.18)$$

Используя (4.7.17) и вычислив скалярные произведения в этом уравнении, получим тождество Кэли-Гамильтона. Начинаящим следует обратить внимание на те упрощения, которые возникли бы в тензорном анализе, если бы произведение тензоров было бы коммутативно всегда.

*Упражнение: доказать равенство*

$$\det(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = \det \mathbf{S} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^{\text{T}}, \quad \mathbf{T} = -\mathbf{T}^{\text{T}} = \mathbf{t} \times \mathbf{E}. \quad (4.7.19)$$

*Подсказка.* Выберем тройку линейно независимых векторов  $\mathbf{e}_k$  и воспользуемся определением 4.7.9. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon \det(\mathbf{S} + \mathbf{t} \times \mathbf{E}) &= [(\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{t} \times \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{t} \times \mathbf{e}_2)] \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{t} \times \mathbf{e}_3) \\ &= [(\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_1) \times (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_2)] \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_3 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_1)[\mathbf{t} \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)] + \\ &\quad (\mathbf{t} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_2)[\mathbf{t} \cdot (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)] + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_3)[\mathbf{t} \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)], \quad \varepsilon = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Чтобы получить отсюда 4.7.19, достаточно вспомнить определение взаимного базиса и формулы для контравариантных координат вектора.

## 4.8 Ортогональные тензоры

Чрезвычайно важным классом тензоров второго ранга являются так называемые ортогональные тензоры. К множеству ортогональных тензоров принадлежат так называемые тензоры поворота, посредством которых описываются спиновые движения, играющие важную роль в механике.

Рассмотрим специальный класс линейных отображений  $T_1 \rightarrow T_1$ , не меняющих длин векторов

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}. \quad (4.8.1)$$

По условию

$$|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|,$$

откуда

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \quad (4.8.2)$$

*Упражнение:* доказать, что из (4.8.2) следует необходимость выполнения равенства

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}. \quad (4.8.3)$$

Последнее равенство можно принять за определение ортогонального тензора, как тензора, транспонированный к которому совпадает с обратным к нему, т.е.  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ . Поскольку транспонированный тензор существует всегда, то любой ортогональный тензор невырожден и, следовательно, обратим. Множество ортогональных тензоров не пусто (ибо единичный тензор является, очевидно, ортогональным) и образует группу — одно из центральных понятий в математике и физике. Поэтому напомним определение группы. Говорят, что множество  $\Gamma$  элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$  называется группой, если в нем введен ассоциативный закон композиции элементов, обозначаемый ниже символом  $\odot$  и не выводящий за пределы этого множества. Кроме того,

среди элементов этого множества содержится единичный элемент, и каждый элемент имеет обратный. Таким образом, имеем следующее

**Определение:** множество элементов  $\Gamma = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots\}$  с законом композиции  $\odot$  элементов называется группой, если

$$a) \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{y} \in \Gamma \Rightarrow \mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \mathbf{z} \in \Gamma;$$

$$б) \quad \mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z};$$

$$в) \quad \text{в } \Gamma \text{ существует единичный элемент } \mathbf{e}: \mathbf{e} \odot \mathbf{x} = \mathbf{x} \odot \mathbf{e} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma;$$

г) для любого элемента  $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$  существует обратный элемент  $\mathbf{x}^{-1}$  такой, что  $\mathbf{x}^{-1} \odot \mathbf{x} = \mathbf{x} \odot \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{e}$ .

В рассматриваемом нами случае множество  $\Gamma$  есть множество тензоров, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \quad (4.8.4)$$

В качестве закона композиции элементов принимается внутреннее умножение тензоров второго ранга. Этот закон ассоциативен:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Покажем, что этот закон композиции не выводит за пределы исходного множества, т.е. если  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$  – ортогональные тензоры, то  $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$  также является ортогональным. Для этого надо показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_3^T = \mathbf{E} &\Rightarrow (\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1) \cdot (\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1)^T = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{Q}_2^T = \\ &= \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Роль единицы на множестве ортогональных тензоров выполняет единичный тензор  $\mathbf{E}$ . Существование обратного элемента обеспечено самим определением ортогонального тензора.

Множество ортогональных тензоров называется полной ортогональной группой и обозначается символом  $\mathbf{O}$ . Для ортогонального тензора имеем

$$\det \mathbf{E} = \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) = (\det \mathbf{Q})^2 = 1 \Rightarrow \det \mathbf{Q} = \pm 1.$$

Все множество ортогональных тензоров можно разбить на два подмножества в зависимости от знака  $\det \mathbf{Q}$ . Множество тензоров, у которых  $\det \mathbf{Q} = +1$ , само образует группу, ибо если  $\det \mathbf{Q}_1 = +1$  и  $\det \mathbf{Q}_2 = +1$ , то и  $\det \mathbf{Q}_3 = \det(\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) = +1$ . Эта группа называется собственно ортогональной группой и обозначается символом  $\mathbf{O}_+$ , а ее элементы называются собственно ортогональными тензорами или тензорами поворота. Произвольный ортогональный



тензор является либо тензором поворота, либо произведением тензора поворота на тензор инверсии ( $-\mathbf{E}$ ). Поэтому при изучении ортогональных тензоров достаточно ограничиться изучением тензоров поворота. Рассмотрим действие ортогонального тензора на вектор  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (4.8.5)$$

Вычисляя длину вектора  $\mathbf{a}'$ , получаем

$$|\mathbf{a}'|^2 = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2. \quad (4.8.6)$$

Итак, длина вектора  $\mathbf{a}'$  равна длине вектора  $\mathbf{a}$ , т.е. вектор  $\mathbf{a}'$  отличается от  $\mathbf{a}$  только направлением. Поэтому вектор  $\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$  можно рассматривать как повернутый вектор  $\mathbf{a}$ . Отсюда, казалось бы, следует, что любой ортогональный тензор можно было бы назвать тензором поворота, а не только такой тензор  $\mathbf{Q}$ , у которого  $\det \mathbf{Q} = +1$ . Однако это не так, и ниже мы это увидим. Важным свойством ортогонального тензора является то, что он не меняет скалярного произведения векторов. Пусть

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{b}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}.$$

Тогда имеем

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.8.7)$$

Иными словами, в результате действия ортогонального тензора  $\mathbf{Q}$  на векторы не меняются не только длины векторов, но не меняются и углы между ними. Выясним теперь точный смысл термина “тензор поворота”, т.е. рассмотрим влияние знака определителя ортогонального тензора  $\mathbf{Q}$ . Для этого нам необходимо рассмотреть действие тензора на тройку линейно-независимых векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ :

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \neq 0. \quad (4.8.8)$$

Прежде всего, нам необходимо придать точный смысл понятиям “правая и левая тройка векторов”. Эти понятия зависят от выбора ориентации в пространстве. Ниже мы будем считать, что все рассмотрения проводятся в правоориентированном пространстве. В левоориентированном пространстве названия правая и левая тройка лучше бы поменять местами, но можно этого и не делать. Построим на векторах  $\mathbf{e}_k$  трехгранник (Рис.4.1). Соединим концы векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  и получим треугольник  $ABC$ . Далее, из точки  $O$  — вершины трехгранника — проведем вектор  $\mathbf{m}$ , который ортогонален плоскости треугольника  $ABC$ . В плоскости треугольника  $ABC$  проводим круговую стрелку, показывающую направление обхода вершин треугольника: первая вершина —

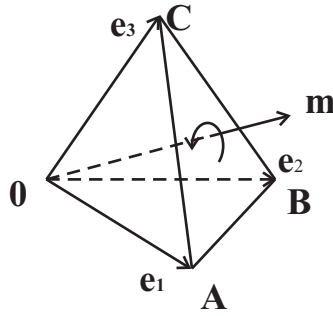


Рис. 4.1: Определение правой тройки векторов

конец вектора  $\mathbf{e}_1$ , вторая — конец  $\mathbf{e}_2$  и третья — конец  $\mathbf{e}_3$ . Если при взгляде с конца вектора  $\mathbf{m}$  обход вершин осуществляется против хода часовой стрелки, то тройка векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  называется правой. В противном случае, т.е. если обход совершается по ходу часовой стрелки, тройка векторов называется левой. На Рис.4.1 показана правая тройка векторов. Если бы мы взяли тройку  $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$ , то эта тройка  $\mathbf{e}'_k$  была бы левой. Как известно, для правой тройки векторов  $\mathbf{e}_k$  смешанное произведение  $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3$  равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Для левой тройки  $\mathbf{e}_k$  смешанное произведение  $(\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3$  равно объему параллелепипеда, взятому со знаком минус (объем, разумеется, величина неотрицательная).

Изучим теперь действие  $\mathbf{Q}$  на линейно независимую тройку векторов:

$$\mathbf{e}'_m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_m. \quad (4.8.9)$$

Определитель тензора вычисляется по формуле

$$\det \mathbf{Q} = \frac{(\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}. \quad (4.8.10)$$

Из (4.8.10) видим, что если  $\det \mathbf{Q} = +1$ , то тензор  $\mathbf{Q}$  переводит правую тройку  $\mathbf{e}_m$ , в правую тройку векторов  $\mathbf{e}'_m$ , а левую тройку  $\mathbf{e}_m$  переводит в левую тройку  $\mathbf{e}'_m$ . Как мы видели,  $\mathbf{Q}$  не меняет длин векторов, т.е.  $|\mathbf{e}'_m| = |\mathbf{e}_m|$ . Кроме того,  $\mathbf{Q}$  не меняет и углов между векторами, т.е.

$$\mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}'_n = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \cos(\widehat{\mathbf{e}'_m, \mathbf{e}'_n}) = \cos(\widehat{\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n}).$$

Отсюда видим, что действие  $\mathbf{Q}$  на тройку векторов  $\mathbf{e}_m$  сводится к повороту рассматриваемой тройки как жесткого целого, при условии, что  $\det \mathbf{Q} = +1$ . Таким образом, тройки  $\mathbf{e}_m$  и  $\mathbf{e}'_m$  могут быть совмещены друг с другом посредством поворота в пространстве. Именно поэтому ортогональный тензор  $\mathbf{Q} : \det \mathbf{Q} = +1$  называется тензором поворота. Если же  $\det \mathbf{Q} = -1$ , то из

(4.8.10) видим, что  $\mathbf{Q}$  переводит правую тройку в левую и наоборот. В этом случае никакими поворотами тройки  $\mathbf{e}_k$  и  $\mathbf{e}'_k = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k$  совместить невозможно. Нужна еще одна операция, называемая инверсией. Ортогональный тензор  $\mathbf{Q} = -\mathbf{E}$ ,  $\det(-\mathbf{E}) = -1$ , называется тензором инверсии. Тогда ортогональный тензор  $\mathbf{Q} : \det \mathbf{Q} = -1$  можно представить в виде произведения

$$\mathbf{Q} = (-\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}; \quad \det \mathbf{Q} = -1; \quad \det \mathbf{P} = +1,$$

где  $\mathbf{P}$  уже является тензором поворота.

Обратимся к описанию различных форм представлений тензоров поворота. Одним из наиболее простых представлений является следующее. Выберем произвольную линейно независимую тройку векторов  $\mathbf{d}_m$ , удовлетворяющую условию (4.8.8). При действии тензора  $\mathbf{Q}$  тройка векторов  $\mathbf{d}_m$  переходит в тройку  $\mathbf{D}_m$  (здесь вектор обозначен прописной буквой):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{d}^m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{Q} = \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m, \end{aligned} \quad (4.8.11)$$

где  $\mathbf{d}^m$  взаимная к  $\mathbf{d}_n$  тройка векторов:  $\mathbf{d}^m \cdot \mathbf{d}_s = \delta_s^m$ . Если подействовать тензором  $\mathbf{Q}$  на векторы взаимного базиса  $\mathbf{d}^m$ , то получим:

$$\mathbf{D}^m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}^m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}^m \otimes \mathbf{d}_m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}^m \otimes \mathbf{d}_m = \mathbf{Q}. \quad (4.8.12)$$

Легко убедиться, что векторы:  $\mathbf{D}_m$  и  $\mathbf{D}^n$  образуют взаимные (биортогональные) тройки векторов:

$$\mathbf{D}_n \cdot \mathbf{D}^m = \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}^m = \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{d}^m = \delta_n^m.$$

Итак, любой ортогональный тензор может быть представлен в формах

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m = \mathbf{D}^m \otimes \mathbf{d}_m, \quad (4.8.13)$$

где

$$\mathbf{D}_m \cdot \mathbf{D}^n = \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}^n = \delta_m^n; \quad \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{D}_n = \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n. \quad (4.8.14)$$

Сама возможность представления ортогонального тензора в форме (4.8.13) оказывается часто очень полезной. При этом следует иметь в виду

**Упражнение:** доказать, что символы Леви-Чивиты для троек векторов  $\mathbf{d}_m$  и  $\mathbf{D}_m$  связаны соотношениями

$$\varepsilon'_{mnp} \equiv (\mathbf{D}_m \times \mathbf{D}_n) \cdot \mathbf{D}_p = \det \mathbf{Q} (\mathbf{d}_m \times \mathbf{d}_n) \cdot \mathbf{d}_p \equiv \det \mathbf{Q} \varepsilon_{mnp}; \quad (4.8.15)$$

$$\varepsilon'^{mnp} \equiv (\mathbf{D}^m \times \mathbf{D}^n) \cdot \mathbf{D}^p = \det \mathbf{Q} (\mathbf{d}^m \times \mathbf{d}^n) \cdot \mathbf{d}^p \equiv \det \mathbf{Q} \varepsilon^{mnp}.$$

**Указание:** воспользоваться (4.8.14) и (3.7.21).

Из (4.8.15) видим, что для тензоров поворота ( $\det \mathbf{Q} = +1$ ) символы Леви-Чивиты для троек  $\mathbf{d}_m$  и  $\mathbf{D}_m$  совпадают. Покажем примеры использования (4.8.13) – (4.8.13).

**Упражнение:** для любого вектора  $\mathbf{a}$  и для любого ортогонального тензора  $\mathbf{Q}$  доказать тождества

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}];$$

$$(\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}]. \quad (4.8.16)$$

Приведем подробное доказательство второго из тождеств (4.8.16). Доказательство первого тождества проводится аналогично и должно быть выполнено самостоятельно. Выберем тройку линейно независимых векторов  $\mathbf{d}_m$  в качестве базиса. Тогда будем иметь

$$\mathbf{a} = \alpha_p \mathbf{d}^p; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m.$$

Используя эти разложения, получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T &= (\mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m \times \alpha_p \mathbf{d}^p) \cdot \mathbf{d}^s \otimes \mathbf{D}_s = \alpha_p (\mathbf{D}_m \otimes \varepsilon^{mpt} \mathbf{d}_t) \cdot \mathbf{d}^s \otimes \mathbf{D}_s = \\ &= \alpha_p \mathbf{D}_m \otimes \varepsilon^{mpt} \delta_t^s \mathbf{D}_s = \alpha_p \varepsilon^{mpt} \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{D}_t = (\det \mathbf{Q})^2 \alpha_p \varepsilon^{mpt} \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{D}_t. \end{aligned}$$

Здесь мы добавили множитель  $(\det \mathbf{Q})^2 = 1$ . Продолжим вычисления

$$(\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q} \alpha_p \det \mathbf{Q} \varepsilon^{mpt} \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{D}_t = \det \mathbf{Q} \alpha_p \varepsilon^{mpt} \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{D}_t.$$

Здесь мы использовали второе из тождеств (4.8.15). Вновь используя это тождество, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \det \mathbf{Q} \alpha_p (\mathbf{D}^m \times \mathbf{D}^p) \cdot \mathbf{D}^t \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{D}_t = \\ &= \det \mathbf{Q} \alpha_p \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{D}^m \times \mathbf{D}^p = \det \mathbf{Q} \mathbf{E} \times \alpha_p \mathbf{D}^p. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\mathbf{D}_m \otimes \mathbf{D}^m = \mathbf{E}$ . Используя теперь тождества

$$\mathbf{E} \times \mathbf{D}^p = \mathbf{D}^p \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}_p = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}^p,$$

получаем

$$(\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q} \alpha_p (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}^p) \times \mathbf{E} = \det \mathbf{Q} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}].$$

Тождество доказано. Мы настоятельно рекомендуем доказать и первое из тождеств (4.8.16), поскольку техника доказательства весьма типична для многих ситуаций. Сами же тождества (4.8.16) будут многократно использоваться при изучении движений твердых тел.

Можно показать другой способ вывода тождеств (4.8.16). Покажем и этот путь, т.к. он полезен во многих ситуациях. Будем исходить из представления (4.7.9)

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b})' \cdot \mathbf{c}'}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} = \frac{[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}.$$

Это выражение справедливо для произвольного тензора второго ранга и произвольной тройки линейно независимых тензоров. Очевидно, что мы можем в качестве вектора  $\mathbf{c}$  последовательно выбрать три линейно независимых вектора  $\mathbf{e}_k$ . Предыдущую формулу перепишем в виде трех выражений

$$\det \mathbf{A}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_k = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k. \quad (4.8.17)$$

Умножая обе части этих равенств тензорно на  $\mathbf{e}^k$  и суммируя по  $k$ , получаем

$$\det \mathbf{A}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot \mathbf{A}.$$

Предполагая тензор  $\mathbf{A}$  невырожденным и умножая это равенство скалярно на  $\mathbf{A}^{-1}$  слева, получаем тождество (4.7.16)

$$\det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}),$$

которое ранее приводилось без доказательства. Последнее равенство верно для любой пары векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ . Перепишем его в эквивалентном виде

$$\det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b}_k = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_k,$$

где  $\mathbf{b}_k$  — линейно независимая тройка векторов. Отсюда вытекает равенство

$$\det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{A}. \quad (4.8.18)$$

Умножая это равенство скалярно на  $\mathbf{A}^{-1}$  слева, получаем искомое тождество

$$\det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}. \quad (4.8.19)$$

Принимая здесь  $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{Q}$  ортогональный тензор,  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$ ,  $\mathbf{Q}^{-\top} = \mathbf{Q}$ , приходим к тождеству (4.8.16).

В заключение этого пункта поясним смысл термина ”инвариант тензора”. Равенством (4.8.5) введено в рассмотрение ортогональное преобразование вектора  $\mathbf{a}'$ . Если в этом равенстве  $\mathbf{Q}$  есть тензор поворота, то  $\mathbf{a}'$  есть

повернутый вектор. Понятно, что повернутый вектор отличается от исходного. Однако у него есть скалярная характеристика (модуль вектора), которая не меняется при поворотах и зеркальных отражениях вектора. Скалярная характеристика вектора, которая не меняется при ортогональных преобразованиях вектора (4.8.5), называется инвариантом вектора. Можно доказать, что любой инвариант вектора является функцией модуля вектора. Поэтому модуль вектора можно назвать главным инвариантом вектора, хотя этот термин и не используется, поскольку термин модуль вектора и короче, и понятнее. Тензор второго ранга является совокупностью упорядоченных пар векторов (диад). Можно ввести понятие ортогонального преобразования тензора второго ранга

$$\mathbf{A}' = \mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}' + \dots + \mathbf{c}' \otimes \mathbf{d}' = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \dots + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (4.8.20)$$

Если в этом определении  $\mathbf{Q}$  есть тензор поворота, то  $\mathbf{A}'$  можно назвать повернутым тензором.

*Определение:* скалярная функция  $f(\mathbf{A})$  тензора  $\mathbf{A}$  называется инвариантом тензора  $\mathbf{A}$ , если выполняется равенство

$$f(\mathbf{A}') = f(\mathbf{A}). \quad (4.8.21)$$

Часто вместо термина инвариант тензора используется более полный термин: ортогональный инвариант тензора. Не всякая скалярная функция тензора  $f(\mathbf{A})$  является инвариантом тензора  $f(\mathbf{A})$ . Рассмотрим, например, функцию

$$g(\mathbf{A}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  есть заданный вектор. Легко убедиться, что

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{n} \neq \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}.$$

Примерами инвариантов тензора  $\mathbf{A}$ , являются скалярные функции

$$f(\mathbf{A}) = \text{tr} \mathbf{A}, \quad f(\mathbf{A}) = \text{tr} \mathbf{A}^n, \quad f(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}.$$

Покажем, например, что первая из этих функций действительно является инвариантом

$$\text{tr} \mathbf{A}' = \text{tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}) = \text{tr} \mathbf{A}.$$

Здесь использовано тождество (4.4.14). Читатель должен убедиться самостоятельно, что остальные функции, в выше отмеченном примере, являются инвариантами. Понятно, что можно построить сколь-угодно много функций, являющихся инвариантами тензора второго ранга. Однако не все они являются

функционально независимыми. Можно доказать, что симметричный тензор второго ранга имеет не более трех (как правило, ровно три) функционально независимых инвариантов. Все остальные инварианты могут быть выражены через выбранные независимые инварианты. В качестве последних можно, например, выбрать следующие

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{A}^2, \quad \operatorname{tr} \mathbf{A}^3.$$

В общем случае тензор второго ранга (несимметричный) имеет шесть независимых инвариантов. Инварианты  $I_k(\mathbf{A})$ , входящие в тождество Кэли-Гамильтона (4.7.14), принято называть главными инвариантами тензора  $\mathbf{A}$ .

## 4.9 Теорема Эйлера

Приведем доказательство одной чрезвычайно важной в кинематике твердого тела теоремы. Обычно доказательство этой теоремы опирается на теорему о спектральном разложении несимметричного тензора. Однако последняя теорема, будучи громоздкой, в теоретической механике не находит приложений. Поэтому мы предпочитаем другое и значительно более простое доказательство.

**Теорема Эйлера:** произвольный тензор поворота  $\mathbf{P}$ , отличный от  $\mathbf{E}$ , допускает единственное представление

$$\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (4.9.1)$$

где единичный вектор  $\mathbf{m}$  является неподвижным вектором тензора  $\mathbf{P}$  и определяет прямую в пространстве, называемую осью поворота;  $\theta$  называется углом поворота и считается положительным, если поворот при взгляде с конца вектора  $\mathbf{m}$  происходит против хода часовой стрелки.

**Доказательство.** Единичный вектор  $\mathbf{m}$ , не меняющийся при действии на него тензора  $\mathbf{P}$ , называется неподвижным вектором тензора  $\mathbf{P}$ . Не для всякого тензора второго ранга неподвижный вектор существует. Но для тензора поворота (собственно ортогонального тензора) он не только существует, но и определяет единственную прямую, которая называется осью поворота. Сам же вектор  $\mathbf{m}$  определяется с точностью до множителя ( $\pm 1$ ). По определению, неподвижный вектор является решением уравнения

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}; \quad |\mathbf{m}| = 1. \quad (4.9.2)$$

Вектор  $\mathbf{m}$ , являющийся решением уравнения (4.9.2), называется правым неподвижным вектором тензора  $\mathbf{P}$ . Но легко убедиться, что одновременно

он является и левым неподвижным вектором  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{m}$ . В самом деле, умножая (4.9.2) скалярно на  $\mathbf{P}^\top$  слева, получаем

$$\mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{P}.$$

Уравнение (4.9.2) можно переписать в эквивалентной форме

$$(\mathbf{P} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}; \quad |\mathbf{m}| = 1, \quad (4.9.3)$$

т.е. вектор  $\mathbf{m}$  является решением однородного линейного уравнения. Из курса линейной алгебры известно, что однородная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое (нетривиальное) решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю

$$\det(\mathbf{P} - \mathbf{E}) \equiv \det(\mathbf{P}_{*t}^{s*} - \delta_t^s) = 0. \quad (4.9.4)$$

Покажем, что равенство (4.9.4) действительно выполняется. Для этого выпишем цепочку тождественных преобразований

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P} - \mathbf{E}) &= \det[\mathbf{P} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{P}^\top)] = \det \mathbf{P} \det(\mathbf{E} - \mathbf{P}^\top) = \det(\mathbf{E} - \mathbf{P}^\top) = \\ &= \det(\mathbf{E} - \mathbf{P})^\top = \det(\mathbf{E} - \mathbf{P}) = \det[(-\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{E})] = \\ &= \det(-\mathbf{E}) \det(\mathbf{P} - \mathbf{E}) = -\det(\mathbf{P} - \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Получили, что  $\det(\mathbf{P} - \mathbf{E}) = -\det(\mathbf{P} - \mathbf{E})$ , а это возможно, если верно равенство (4.9.4). Итак, ненулевое решение (4.9.3) существует. Понятно, что если  $\mathbf{m}$  есть решение (4.9.3), то и  $(-\mathbf{m})$  есть решение этого уравнения. Однако оба эти вектора определяют одну и ту же прямую, натянутую на вектор  $\mathbf{m}$ . Покажем теперь, что тензор поворота  $\mathbf{P}$ , отличный от  $\mathbf{E}$ , имеет не более одной неподвижной прямой. Допустим обратное, т.е. пусть (4.9.3) имеет два решения  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  таких, что  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq \mathbf{0}$ . Если  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = \mathbf{0}$ , то такие решения рассматриваются как совпадающие, т.к. они определяют одно и то же семейство прямых. Если  $\mathbf{P}$  имеет два различных неподвижных вектора  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  :  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq \mathbf{0}$ , то он имеет и третий неподвижный вектор  $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ . Доказательство этого утверждения немедленно вытекает из тождества (4.7.16), если в нем принять  $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{A}^{-\top} = \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{m}_2$ ,  $\det \mathbf{P} = 1$ ;

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_1) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_2) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2).$$

Но по условию мы имеем  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2$ . Поэтому  $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ . Следовательно, вектор  $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$  также является неподвижным вектором  $\mathbf{P}$ . Итак, если  $\mathbf{P}$  имеет два неподвижных вектора  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$ , то оно имеет



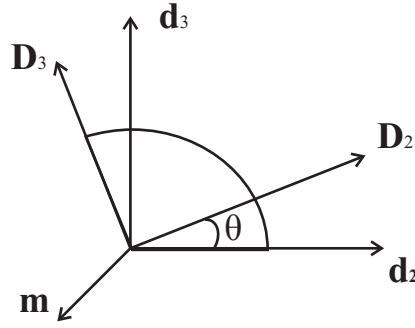


Рис. 4.2: К теореме Эйлера

и третий неподвижный вектор  $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ . Причем тройка векторов  $\mathbf{m}_k$ , очевидно, является линейно независимой и допускает построение взаимного базиса  $\mathbf{m}^k$ . Тогда имеем

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_k \otimes \mathbf{m}^k = \mathbf{m}_k \otimes \mathbf{m}^k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}.$$

Таким образом,  $\mathbf{P}$  может иметь более одного неподвижного вектора, только в том случае, когда он совпадает с единичным тензором, а это исключено условием теоремы. Выберем теперь правую ортонормированную тройку векторов  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{m}, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ . Согласно (4.8.13) мы можем записать

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{m} + \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{d}_3,$$

где тройка векторов  $\mathbf{D}_i$  также является правой ортонормированной. Умножая это равенство скалярно на  $\mathbf{m}$  справа и учитывая (4.9.2), получаем

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{D}_1 = \mathbf{m}.$$

Предыдущее равенство принимает вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \quad (4.9.5)$$

Здесь все четыре вектора  $\mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$  лежат в одной плоскости, т.к. все они ортогональны одному и тому же вектору  $\mathbf{m}$ . Поэтому векторы  $\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{D}_3$  можно разложить по векторам  $\mathbf{d}_2$  и  $\mathbf{d}_3$  — см. (Рис.4.2).

$$\mathbf{D}_2 = \cos \theta \mathbf{d}_2 + \sin \theta \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{D}_3 = -\sin \theta \mathbf{d}_2 + \cos \theta \mathbf{d}_3, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Подставляя эти разложения в (4.9.5) и проводя элементарные преобразования, получаем

$$\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + (\cos \theta \mathbf{d}_2 + \sin \theta \mathbf{d}_3) \otimes \mathbf{d}_2 + (-\sin \theta \mathbf{d}_2 + \cos \theta \mathbf{d}_3) \otimes \mathbf{d}_3 =$$

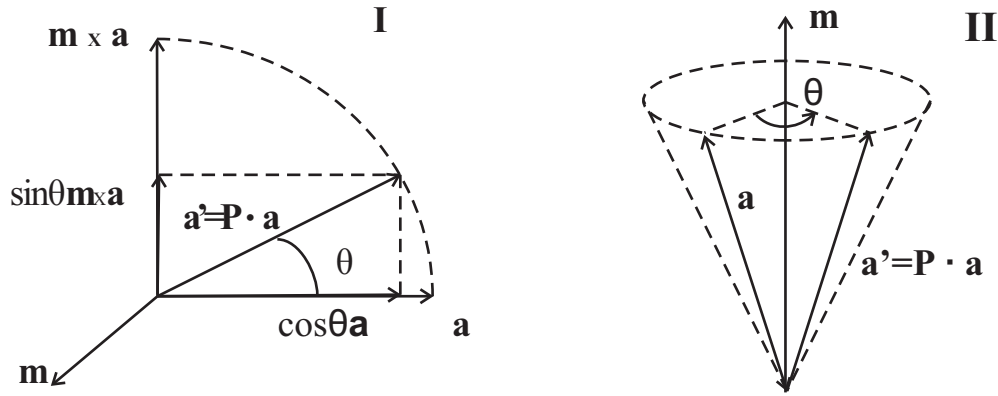


Рис. 4.3: I. Поворот вектора, ортогонального оси поворота; II. Поворот вектора общего направления

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) + \sin \theta (\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_3) = \\
 &= \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E},
 \end{aligned}$$

где использованы тождества

$$\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3;$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{E} = \mathbf{m} \times (\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) = \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_3;$$

которые справедливы для любой правой ортонормированной тройки векторов  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{m}, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ . Установленным равенством и заканчивается доказательство теоремы Эйлера (4.9.1). Обратим внимание, что замена в (4.9.1) вектора  $\mathbf{m}$  на вектор  $-\mathbf{m}$  влечет за собой замену  $\theta$  на  $-\theta$ . При этом сам тензор  $\mathbf{P}$  не меняется. Теорема Эйлера позволяет дать очень ясное представление о результате действия тензора поворота  $\mathbf{P}$  на вектор  $\mathbf{a}$ . Если вектор  $\mathbf{a}$  параллелен оси поворота (лежит на оси поворота), т.е.  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{m}$ , то  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$  и вектор  $\mathbf{a}$  не меняется при действии на него тензора  $\mathbf{P}$ . Пусть  $\mathbf{a}$  ортогонален оси поворота:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{m} = 0$ . Тогда имеем

$$\mathbf{a}' \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \cos \theta \mathbf{a} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{a}.$$

Изобразим этот результат на Рис.4.3. Из Рис.4.3 видим, что действие тензора поворота на вектор  $\mathbf{a}$ , ортогональный оси поворота, сводится к повороту этого вектора на угол  $\theta$  вокруг  $\mathbf{m}$ . Если  $\theta > 0$ , то поворот производится против движения часовой стрелки при взгляде с конца  $\mathbf{m}$ . Поворот произвольного вектора  $\mathbf{a}$  показан на Рис.4.3, при этом проекция вектора  $\mathbf{a}$  на  $\mathbf{m}$  сохраняется, а часть вектора  $\mathbf{a}$ , ортогональная  $\mathbf{m}$ , поворачивается на угол  $\theta$  вокруг  $\mathbf{m}$ . Следует обратить внимание на то, что угол  $\theta$  равен углу между проекциями векторов  $\mathbf{a}'$  и  $\mathbf{a}$  на плоскость, ортогональную оси поворота, но не между самими векторами.

Теорема Эйлера делает ясным еще один важный факт. А именно, тензор поворота полностью определяется заданием не более чем трех независимых параметров. В представлении (4.9.1) ими являются: угол  $\theta$  и два угла, фиксирующие положение  $\mathbf{m}$  (или  $-\mathbf{m}$ ) относительно какого-либо базиса. Выбор именно этих трех независимых параметров необязателен: существует бесконечно много различных троек независимых параметров, полностью определяющих тензор поворота. Отсюда следует, что множество ортогональных тензоров образуют трехмерное пространство. Хотя последнее и не является линейным пространством, но оно позволяет установить взаимно однозначное соответствие между кососимметричными тензорами второго ранга, множество которых образует линейное пространство, и тензорами поворота. А отсюда, в свою очередь, следует, что повороты можно описывать векторами, т.к. существует однозначная связь между кососимметричными тензорами второго ранга и векторами. Подробно этот факт будет обсуждаться в кинематике абсолютно твердого тела.

Наконец, теорема Эйлера дает простой способ вычисления угла поворота  $\theta$  и неподвижного вектора  $\mathbf{m}$ . Из (4.9.1) следует, что

$$1 + 2 \cos \theta = \text{tr} \mathbf{P}; \quad -2 \sin \theta \mathbf{m} = \mathbf{P}_\times. \quad (4.9.6)$$

Тензор поворота  $\mathbf{P}$  в правых частях (4.9.6) может быть задан в произвольной форме. Например, если  $\mathbf{P}$  задан в виде разложения

$$\mathbf{P} = P^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = P_{*n}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n,$$

то

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cos \theta &= P^{mn} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = g_{mn} P^{mn} = P_{*m}^{m*}, \\ -2 \sin \theta \mathbf{m} &= P^{mn} \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n = \varepsilon_{mnt} P^{mn} \mathbf{e}^t. \end{aligned}$$

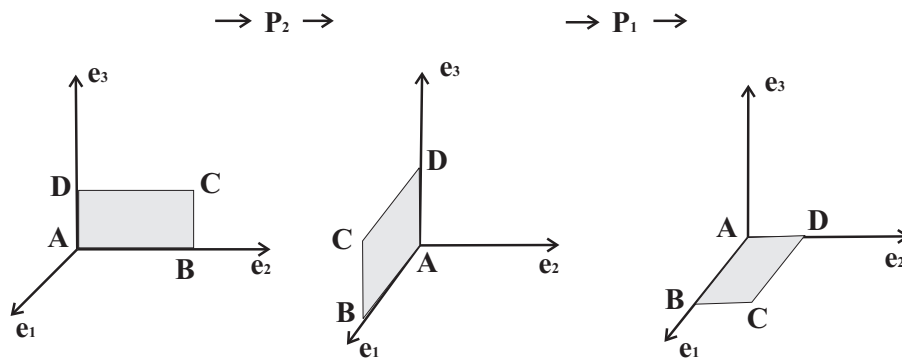
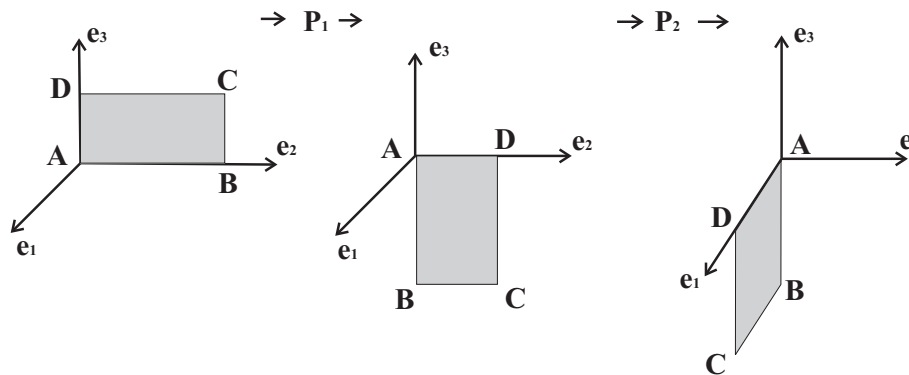
Если тензор  $\mathbf{P}$  задан в виде (4.8.13), то

$$1 + 2 \cos \theta = \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{d}^m; \quad -2 \sin \theta \mathbf{m} = \mathbf{D}_m \times \mathbf{d}^m.$$

## 4.10 Правило квазикоммутативности поворотов

Введем в рассмотрение понятие сложного поворота. Пусть задан вектор  $\mathbf{a}$  и тензоры  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$ . Повернем вектор  $\mathbf{a}$  тензором  $\mathbf{P}_1$  и найдем вектор  $\mathbf{a}' = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}$ . Далее вектор  $\mathbf{a}'$  повернем тензором  $\mathbf{P}_2$  и найдем вектор  $\mathbf{a}'' = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}'$ . В результате вектор  $\mathbf{a}''$  вычисляется как сложный поворот вектора  $\mathbf{a}$ :

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1. \quad (4.10.1)$$

Рис. 4.4: Композиция поворотов  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1$ Рис. 4.5: Композиция поворотов  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$ 

Из (4.10.1) видим, что при последовательном проведении двух поворотов результирующий поворот выражается через произведение составляющих поворотов. Этот факт выражают словами: композиция поворотов мультипликативна. Мы знаем, что в общем случае произведение тензоров не коммутативно, т.е. если  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  суть тензоры поворота, то

$$\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2. \quad (4.10.2)$$

В сказанном легко убедиться непосредственно. Пусть  $\mathbf{P}_1$  — поворот вокруг  $\mathbf{e}_1$  на угол  $(-\pi/2)$  -см. Рис.4.4. Пусть  $\mathbf{P}_2$  — поворот вокруг  $\mathbf{e}_3$  на угол  $(-\pi/2)$ . Тогда композиция поворотов  $\mathbf{P}_2$  и  $\mathbf{P}_1$  представлена на Рис.4.4.

Проведем теперь повороты в обратной последовательности  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$  — см. Рис.4.5. Сравнивая заключительные позиции на Рис.4.4 и Рис.4.5, наглядно убеждаемся в справедливости (4.10.2). Не следует, однако, абсолютизировать условие (4.10.2). Дело в том, что существует вполне определенное правило квазикоммутативности (т.е. как бы перестановочности) поворотов, играющее важную роль в динамике и кинематике твердого тела. Сейчас мы выведем это правило. Но сначала рассмотрим некое специальное преобразова-

ние тензора поворота  $\mathbf{P}$ . Пусть  $\mathbf{S}$  — тензор поворота. Тогда  $\mathbf{S}^T$  есть обратный поворот. Рассмотрим композицию поворотов  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}^T$  — такое преобразование  $\mathbf{P}$  называется преобразованием подобия. Что мы получили в результате такой манипуляции? Введем обозначение

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (4.10.3)$$

т.е. через  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})$  мы обозначили поворот вокруг  $\mathbf{m}$  на угол  $\varphi$ . Рассмотрим тензор поворота  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S}^T$ :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S}^T = (1 - \cos \varphi)(\mathbf{S} \cdot \mathbf{m}) \otimes (\mathbf{S} \cdot \mathbf{m}) + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{S} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{S}^T).$$

Здесь мы учли тождество  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}$  и должны вспомнить тождество (4.8.16). Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S}^T = (1 - \cos \varphi) \mathbf{m}' \otimes \mathbf{m}' + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{m}' \times \mathbf{E} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}'), \quad (4.10.4)$$

где  $\mathbf{m}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}$ .

Итак, в результате преобразования подобия (4.10.4) мы приходим к тензору поворота  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}')$ , который поворачивает на тот же угол  $\varphi$ , но вокруг повернутой оси  $\mathbf{m}'$ . Теперь легко установить правило квазикоммутативности поворотов  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})$  и  $\mathbf{Q}(\theta \mathbf{n})$ :

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{n}) \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})}_{\mathbf{Q}(\theta \mathbf{n}') \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})} = \quad (4.10.5)$$

где  $\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}$ . В (4.10.5) подчеркнутый тензор есть единичный тензор. В левой части (4.10.5) мы сначала поворачиваем на угол  $\theta$  вокруг  $\mathbf{n}$ , а затем поворачиваем на угол  $\varphi$  вокруг  $\mathbf{m}$ . В правой части (4.10.5) мы сначала поворачиваем на угол  $\varphi$  вокруг  $\mathbf{m}$ , а затем — на тот же угол  $\theta$ , но уже вокруг повернутой оси  $\mathbf{n}'$ . С физической точки зрения правило квазикоммутативности играет ту же роль, что и настоящая коммутативность (перестановочность). Это правило чрезвычайно важно в кинематике абсолютно твердого тела. Из (4.10.5) сразу видим, когда квазикоммутативность становится истинной коммутативностью. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор  $\mathbf{n}'$  совпал бы с  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \pm \mathbf{m},$$

т.е.  $\mathbf{n}$  должен быть неподвижным вектором тензора  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})$ . Иными словами, оси поворотов тензоров  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})$  и  $\mathbf{Q}(\theta \mathbf{n})$  должны совпадать. При этом легко убедиться в справедливости равенства  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) = \mathbf{Q}((\varphi + \theta)\mathbf{m})$ .

В механике теорема Эйлера особенно эффективна в тех задачах, в которых ось поворота заранее известна и фиксирована во времени. Таких задач много. Кроме того, общая ситуация может быть сведена к трем последовательным поворотам вокруг заранее и произвольно выбранных фиксированных осей. Это можно сделать многими способами. Подробнее этот вопрос будет обсужден при изложении кинематики абсолютно твердого тела.

*Замечание.* Говоря выше о поворотах, мы имели в виду именно последовательность поворотов в смысле порядка произведения этих поворотов. Не следует путать эту последовательность с временной последовательностью. Поворот — это мгновенное действие. В какой бы последовательности мы не производили повороты, все они происходят в один и тот же момент времени. Изменение поворотов во времени определяется изменением аргумента  $\mathbf{t}$  в выражениях типа  $\mathbf{Q}(\varphi(\mathbf{t}) \mathbf{m}(\mathbf{t}))$ .

## 4.11 Спектральное и полярное разложение тензоров

Чтобы однозначно определить тензор второго ранга, достаточно знать его значения на трех некопланарных векторах:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{T}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_k \otimes \mathbf{e}^k.$$

Действие тензора на вектор сводится к тому, что результирующий вектор получается из исходного поворотом и растяжением. Однако для каждого тензора второго ранга существуют такие векторы, действие тензора на которые сводится только к изменению их длины, т.е.

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m}. \quad (4.11.1)$$

Такие векторы называются собственными векторами тензора  $\mathbf{T}$ , а числа  $\lambda$  называются собственными числами  $\mathbf{T}$ . Изучим собственные векторы и собственные числа симметричных тензоров второго ранга.

*Теорема.* Для каждого тензора второго ранга  $\mathbf{T} : \mathbf{T} = \mathbf{T}^T$  существует по крайней мере три собственных вектора, ортогональных между собой. Собственные числа, соответствующие этим векторам, вещественны. Если собственные векторы  $\mathbf{T}$  принять в качестве базиса в  $\mathbf{T}_1$ , то справедливо представление

$$\mathbf{T} = \lambda_{(1)} \mathbf{m}_{(1)} \otimes \mathbf{m}_{(1)} + \lambda_{(2)} \mathbf{m}_{(2)} \otimes \mathbf{m}_{(2)} + \lambda_{(3)} \mathbf{m}_{(3)} \otimes \mathbf{m}_{(3)}, \quad (4.11.2)$$

где  $\lambda_{(k)}$  — собственные числа  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{m}_{(k)} : \mathbf{m}_{(k)} \cdot \mathbf{m}_{(s)} = \delta_{ks}$ .

Представление (4.11.2) называется спектральным разложением симметричного тензора второго ранга.

**Доказательство.** По определению, собственный вектор тензора  $\mathbf{T}$  есть решение уравнения (4.11.1), где  $\mathbf{T} : \mathbf{T} = \mathbf{T}^T$  задан и ищутся векторы  $\mathbf{m}$  и числа  $\lambda$ . Выберем в  $\mathbb{T}_1$  какой-либо базис  $\mathbf{e}_k$ , через  $\mathbf{e}^k$  обозначим, как всегда, взаимный базис. Тогда можем записать

$$\mathbf{T} = \Gamma_{*n}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n, \quad \mathbf{m} = m^k \mathbf{e}_k. \quad (4.11.3)$$

Поскольку  $\mathbf{T}$  симметричен, то  $\Gamma_{*n}^{m*} = \Gamma_{n*}^{*m} = \Gamma_n^m$ . Подставляя (4.11.3) в (4.11.1), приходим к линейной системе алгебраических уравнений для нахождения координат  $m^k$

$$\Gamma_s^k m^s = \lambda m^k \quad \Rightarrow \quad (\Gamma_s^k - \lambda \delta_s^k) m^s = 0. \quad (4.11.4)$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю

$$\det(\Gamma_n^m - \lambda \delta_n^m) = -\lambda^3 + I_1(\mathbf{T})\lambda^2 - I_2(\mathbf{T})\lambda + I_3(\mathbf{T}) = 0, \quad (4.11.5)$$

где  $I_k(\mathbf{T})$  называются главными инвариантами тензора  $\mathbf{T}$  и определяются выражениями (4.7.15). Уравнение (4.11.5) называется характеристическим для тензора  $\mathbf{T}$  и имеет либо три вещественных корня, либо один вещественный и два комплексно сопряженных. Последняя ситуация для симметричного тензора невозможна. Действительно, каждому корню уравнения (4.11.5) соответствует ненулевое решение системы (4.11.4). Пусть  $\lambda$  — корень (4.11.5), тогда ему соответствует собственный вектор  $\mathbf{m}$ . Если  $\lambda$  — комплексный корень, то комплексно сопряженная величина  $\bar{\lambda}$  также является корнем (4.11.5); ему соответствует собственный вектор  $\bar{\mathbf{m}}$ , который комплексно сопряжен вектору  $\mathbf{m}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m}, \quad \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{m}} = \bar{\lambda} \bar{\mathbf{m}} \quad \Rightarrow \\ \mathbf{m} \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{m}} - \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{m} = (\bar{\lambda} - \lambda) \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0, \end{aligned} \quad (4.11.6)$$

т.к.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$  для любых векторов  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и любых симметричных тензоров  $\mathbf{T}$ . Пусть  $\mathbf{m} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — вещественные векторы. Тогда  $\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ . Поэтому  $\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0 \Rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{0}$ . По условию  $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ , поэтому  $\mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} \neq 0$  и, следовательно, из (4.11.6) получаем, что  $\lambda = \bar{\lambda}$ , т.е.  $\lambda$  — вещественно. Итак, характеристическое уравнение (4.11.5) имеет три вещественных корня. Легко убедиться, что собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны между собой

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_{(k)} = \lambda_{(k)} \mathbf{m}_{(k)}, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_{(s)} = \lambda_{(s)} \mathbf{m}_{(s)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_{(k)} - \lambda_{(s)})\mathbf{m}_{(k)} \cdot \mathbf{m}_{(s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{(k)} \cdot \mathbf{m}_{(s)} = 0, \quad \lambda_{(k)} \neq \lambda_{(s)}.$$

Если все три собственных числа  $\lambda_{(k)}$  различны, то представление (4.11.2) получается в результате следующей цепочки равенств

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_{(k)} = \lambda_{(k)} \mathbf{m}_{(k)} &\quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}_{(k)} \otimes \mathbf{m}_{(k)} = \lambda_{(k)} \mathbf{m}_{(k)} \otimes \mathbf{m}_{(k)} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \sum_{k=1}^3 \mathbf{m}_{(k)} \otimes \mathbf{m}_{(k)} &= \sum_{k=1}^3 \lambda_{(k)} \mathbf{m}_{(k)} \otimes \mathbf{m}_{(k)}, \end{aligned}$$

поскольку  $\sum_{k=1}^3 \mathbf{m}_{(k)} \otimes \mathbf{m}_{(k)} = \mathbf{E}$  для любой тройки ортонормированных векторов:  $\mathbf{m}_{(k)} \cdot \mathbf{m}_{(s)} = \delta_{ks}$ , а ортогональность собственных векторов  $\mathbf{m}_{(k)}$  (для различных  $\lambda_{(k)}$ ) доказана. Можно принять, что  $|\mathbf{m}_{(k)}| = 1$ , т.к. собственный вектор определяется с точностью до произвольного скалярного множителя.

Если среди корней  $\lambda_k$  есть равные, то собственные векторы уже не обязательно ортогональны. Кроме того, собственных векторов становится бесконечно много. Опуская соответствующие рассуждения, опишем возникающую здесь ситуацию. Пусть совпадают два корня уравнения (4.11.5). Тогда все пространство  $\mathbf{T}_1$  разлагается на прямую сумму двух подпространств: плоскость и ортогональную ей прямую. Если  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ , то упомянутой прямой соответствует вектор  $\mathbf{m}_{(3)}$ . Представление (4.11.2) для симметричного тензора принимает вид:

$$\mathbf{T} = \lambda_{(3)} \mathbf{m}_{(3)} \otimes \mathbf{m}_{(3)} + \lambda_{(1)} (\mathbf{E} - \mathbf{m}_{(3)} \otimes \mathbf{m}_{(3)}). \quad (4.11.7)$$

Из этой формулы видно, что любой вектор, ортогональный  $\mathbf{m}_{(3)}$ , является собственным для  $\mathbf{T}$  и ему соответствует собственное число  $\lambda_{(1)}$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \lambda_{(1)} \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{m}_{(3)} = 0.$$

Множество этих векторов образует плоскость, ортогональную  $\mathbf{m}_{(3)}$ . Если совпадают все три собственных числа, то  $\mathbf{T}$  — шаровой тензор:  $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{E}$ . Любой вектор является собственным для шарового тензора.

**Определение.** Симметричный тензор второго ранга называется положительно определенным, если для любого вектора  $\mathbf{a} \neq 0$  справедливо неравенство

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} > 0, \quad (\mathbf{T} = \mathbf{T}^T).$$

Используя доказанную теорему о спектральном разложении тензора второго ранга, получаем, что  $\mathbf{T}$  положительно определен тогда и только тогда, когда его собственные числа положительны.



Для положительно определенного тензора можно определить дробные степени тензора

$$\mathbf{T}^\alpha = \lambda_{(1)}^\alpha \mathbf{m}_{(1)} \otimes \mathbf{m}_{(1)} + \lambda_{(2)}^\alpha \mathbf{m}_{(2)} \otimes \mathbf{m}_{(2)} + \lambda_{(3)}^\alpha \mathbf{m}_{(3)} \otimes \mathbf{m}_{(3)}. \quad (4.11.8)$$

Нам понадобится эта формула при  $\alpha = 1/2$ . Следует указать, что операции возведения в дробную степень и извлечения корня из тензора не эквивалентны. Например, пусть задан тензор  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^3 \lambda_{(s)} \mathbf{m}_{(s)} \otimes \mathbf{m}_{(s)}, \quad \lambda_{(s)} > 0.$$

Тогда

$$\mathbf{T}^{1/2} = \sum_{k=1}^3 \sqrt{\lambda_{(s)}} \mathbf{m}_{(s)} \otimes \mathbf{m}_{(s)}. \quad (4.11.9)$$

Если же под корнем из тензора понимать одно из решений квадратного уравнения

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}^2 = \mathbf{T}, \quad (4.11.10)$$

то имеем несколько решений этого уравнения

$$\mathbf{X} = \sum_{s=1}^3 \varepsilon_s \sqrt{\lambda_{(s)}} \mathbf{m}_{(s)} \otimes \mathbf{m}_{(s)}, \quad \varepsilon_{(s)} = \pm 1. \quad (4.11.11)$$

Тензор  $\mathbf{T}^{1/2}$  содержится во множестве (4.11.11) при  $\varepsilon_s = 1$ . Всего в (4.11.11) содержится  $8 = 2^3$  различных решений уравнения (4.11.10). Под  $\mathbf{T}^{1/2}$  понимается только одно из решений.

Для невырожденных несимметричных тензоров часто используется

**Теорема о полярном разложении тензора:** любой невырожденный тензор  $\mathbf{T}$ :  $\det \mathbf{T} \neq 0$  представим в виде разложений

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}, \quad (4.11.12)$$

где  $\mathbf{Q}$  — ортогональный тензор;  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  — симметричные положительно определенные тензоры;  $\mathbf{U}$  — правое ядро  $\mathbf{T}$ ;  $\mathbf{V}$  — левое ядро  $\mathbf{T}$ . Доказательство теоремы очевидно. Действительно, из (4.11.12) имеем

$$\mathbf{T}^\Gamma = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^\Gamma = \mathbf{Q}^\Gamma \cdot \mathbf{V}.$$

Вычисляя произведения  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\Gamma$  и  $\mathbf{T}^\Gamma \cdot \mathbf{T}$ , получаем

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\Gamma = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\Gamma \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\Gamma)^{1/2},$$

$$\mathbf{T}^\top \cdot \mathbf{T} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{U} = (\mathbf{T}^\top \cdot \mathbf{T})^{1/2}. \quad (4.11.13)$$

Заметим, что тензоры  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top$  и  $\mathbf{T}^\top \cdot \mathbf{T}$  симметричны и положительно определены:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^\top \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}|^2 > 0, \quad \forall \mathbf{a} \neq 0, \quad \forall \mathbf{T} : \det \mathbf{T} \neq 0.$$

Поэтому в соответствии с (4.11.8) ядра  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  определены однозначно. После построения ядер ортогональный тензор  $\mathbf{Q}$  находится по формуле

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{T}. \quad (4.11.14)$$

*Упражнение.* Убедиться в справедливости этих формул и показать, что тензор  $\mathbf{Q}$  действительно ортогонален.

Легко устанавливается связь между правым и левым ядрами тензора. Собственно, она уже дана формулой (4.11.12)

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^\top. \quad (4.11.15)$$

Последние формулы вытекают непосредственно из (4.11.12)

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \underline{\mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q}} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q},$$

где подчеркнутое слагаемое есть единичный тензор.

*Упражнение.* Продумать теорему о полярном разложении применительно к симметричному тензору второго ранга. Совпадают ли для него правые и левые ядра? Чем отличаются ядра от самого тензора?

## Глава 5

# Кинематика: описание движений

*Непосредственное наблюдение показывает, что все предметы окружающего нас мира находятся в непрерывном движении. Чередование дней и ночей обусловлено суточным вращением Земли, а смена времен года объясняется движением Земли вокруг Солнца. Летают птицы и самолеты. Беспорядочно мечутся молекулы воздуха, которым мы дышим. Даже предметы, которые нам кажутся неподвижными, например, дома, на самом деле движутся в космическом пространстве по весьма замысловатым траекториям, как это хорошо понимали древние философы. На бытовом уровне представление о движении присуще всем людям и не связано с уровнем их образования. Однако в рациональной науке интуитивное представление о движении тел необходимо выразить на строгом математическом языке, что уже требует определенной подготовки. При этом описание движений является чисто геометрической проблемой и может быть выполнено относительно любой системы отсчета. Поэтому в кинематике никакие физические принципы не используются. Построение собственно механики начинается с введения инерциальной системы отсчета.*

### 5.1 Системы отсчета и системы координат

Движение какого бы то ни было тела можно наблюдать только относительно каких-то других тел. В качестве тела отсчета в физике принято использовать некую воображаемую конструкцию, описанную в первой главе под названием системы отсчета. Можно ввести сколь угодно много различных систем отсчета, движущихся относительно друг друга произвольным образом. Таким образом, каждая система отсчета обладает своим собственным движением. Когда мы наблюдаем движение какого-либо тела относительно выбранной системы отсчета, то должны помнить, что наблюдаемое движение не носит

абсолютного характера, а развивается на фоне движущейся системы отсчета, собственное движение которой принципиально непознаваемо. Движение одного и того же тела, наблюдаемое относительно разных систем отсчета, будет описываться в этих системах отсчета по-разному. Чтобы наблюдать движение тела относительно выбранного тела отсчета, все точки тела отсчета должны быть как-то помечены. Только в этом случае можно заметить, что рассматриваемое материальное тело перемещается из одной точки тела отсчета в другую. Чтобы пометить все точки тела отсчета используются системы координат, взаимно однозначно сопоставляющие каждой точке тела отсчета тройку чисел  $y^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Например, точке  $A$  тела отсчета отвечает тройка чисел  $y_A^i$ . Другой точке тела отсчета  $B$  отвечает другая тройка чисел  $y_B^i$ . Обычно система координат выбирается так, что точкам тела отсчета отвечают неизменные во времени тройки чисел  $y^k$ . В таком случае говорят, что выбранная система координат неподвижна относительно тела отсчета. Можно использовать и подвижные системы координат. При этом одной и той же точке  $A$  тела отсчета в разные моменты времени будут отвечать разные тройки чисел  $y^k(t)$  такие, что в каждый момент времени  $t$  соответствие между точками тела отсчета и тройками чисел  $y^k(t)$  является взаимно однозначным. Поясним сказанное примерами. При этом мы считаем, что изучающий перечел первый параграф главы три о системах отсчета. Простейшей координатной системой в данном теле отсчета является декартова система координат  $x, y, z$ . Она строится так. Выберем произвольную точку тела отсчета  $O$ , которую примем за начало декартовой системы координат. В этой точке построим тройку ортонормированных векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Тогда радиус-вектор

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad -\infty < x, y, z < \infty \quad (5.1.1)$$

будет определять точку тела отсчета, помеченную координатами  $x, y, z$ . Когда координаты  $x, y, z$  пробегают все допустимые значения, конец радиус-вектора пробегает все точки тела отсчета. Система координат  $x, y, z$  неподвижна относительно тела отсчета. Можно использовать подвижную декартову систему координат  $x', y', z'$ . Например, такую

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (5.1.2)$$

Начало этой подвижной системы координат ( $x' = 0, y' = 0, z' = 0$ ) движется относительно тела отсчета вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ . Неподвижная точка тела отсчета  $A$  в подвижной системе координат будет определяться переменными во времени координатами  $x', y', z'$ . Пусть, например, точка  $A$  имеет координаты  $x = 2, y = 4, z = 5$ . Тогда в подвижной системе ее координаты

определяются выражениями

$$x' = 2 - vt, \quad y' = 4, \quad z' = 5,$$

т.е. эти координаты неподвижной точки тела отсчета меняются во времени. Могут быть системы координат, меняющиеся во времени более сложным образом. Например, пульсирующая система координат

$$x' = (1 - e_1 \cos \omega t)x, \quad y' = (1 - e_2 \cos \omega t)y, \quad z' = (1 - e_3 \cos \omega t)z, \quad (5.1.3)$$

где  $e_k : 0 < e_k < 1$  — постоянные числа,  $\omega$  — частота пульсации. Начало системы координат (5.1.3) совпадает с началом в системе координат  $x, y, z$  и неподвижно в теле отсчета. Но, например, точка с координатами  $x = y = z = 1$  имеет переменные во времени координаты

$$x' = 1 - e_1 \cos \omega t, \quad y' = 1 - e_2 \cos \omega t, \quad z' = 1 - e_3 \cos \omega t.$$

Наоборот, фиксированным координатам подвижной системы координат отвечают различные точки тела отсчета. Например, координатам  $x' = y' = z' = 1$  отвечает множество точек тела отсчета с координатами

$$x = \frac{1}{1 - e_1 \cos \omega t}, \quad y = \frac{1}{1 - e_2 \cos \omega t}, \quad z = \frac{1}{1 - e_3 \cos \omega t}.$$

Здесь разным моментам времени отвечают разные точки системы отсчета. При  $t = 0$  точке с координатами  $x' = y' = z' = 1$  отвечает точка тела отсчета с координатами

$$x = 1/(1 - e_1), \quad y = 1/(1 - e_2), \quad z = 1/(1 - e_3).$$

Но при  $\omega t = \pi/2$  точке с координатами  $x' = y' = z' = 1$  отвечает уже другая точка тела отсчета с координатами  $x = y = z = 1$ . Наряду с декартовыми системами координат могут использоваться и другие системы координат. Чаще других используются цилиндрические и сферические системы координат — они описаны в главе 3.

**Важно запомнить:** многие физические или геометрические характеристики зависят от выбора системы отсчета, но ни одна из них не зависит от выбора системы координат.

Конечно, координатное описание того или иного факта будет выражаться по-разному в разных системах координат. Однако векторное (или тензорное) описание того же самого факта имеет инвариантный, т.е. независимый от выбора системы координат, вид. В данной книге системы координат практически использоваться не будут. Задачи будут рассматриваться непосредственно

в векторном (или тензорном) виде. Таким образом, без использования координатных систем вполне можно обойтись. Однако исключить из рассмотрения системы отсчета, включая отсчетную систему координат, невозможно. Без системы отсчета практически все понятия, используемые в физике, теряют всякий смысл.

## 5.2 Кинематика точки. Траектория. Скорость и ускорение

Вообразим, что имеется некое тело  $T$ , движущееся относительно выбранной системы отсчета. Разные точки тела  $T$  совершают движения, которые могут достаточно сильно различаться между собой. В процессе движения тело  $T$  может деформироваться и менять свою форму. Чтобы полностью описать движение тела  $T$ , необходимо описать движение каждой точки этого тела. Поэтому, прежде всего, мы должны научиться описывать движение одной точки тела. Полностью движение тела  $T$  будет определено, если мы будем знать описание движений всех его точек. Конечно, мы можем вообразить тело  $T$  настолько малым, что все тело может рассматриваться как точка. Ниже мы будем говорить просто о точке, не указывая отдельно является ли она просто выбранной точкой тела  $T$  или само тело  $T$  сводится к точке. Обратим внимание на то, что термин точка у нас несколько перегружен. В предыдущем параграфе мы говорили о точках системы отсчета. Здесь мы говорим о точках тела. Смешивать эти точки категорически нельзя. Есть система отсчета со всеми ее точками и есть тела со всеми своими точками. Точки тела движутся относительно точек системы отсчета. Чтобы различить эти две категории точек, мы будем использовать термин материальная точка для обозначения точек тела. При этом материальная точка может и не иметь выраженных атрибутов материальности. Например, тело  $T$  может быть солнечным зайчиком, тогда материальная точка — это помеченная точка на этом зайчике.

Итак, рассмотрим материальную точку  $A$ . В данный момент времени  $t$  точка  $A$  занимает определенное положение в выбранной системе отсчета. Это положение определяется радиус-вектором  $\mathbf{R}_A(t)$ , который в дальнейшем будем называть **вектором положения** точки  $A$ . Напомним, что радиус-вектор  $\mathbf{R}_A(t)$  — это вектор, выходящий из начала в системе отсчета и заканчивающийся в той точке системы отсчета, в которой в данный момент времени находится материальная точка  $A$ . При движении материальной точки ее по-

ложение в системе отсчета меняется. Поэтому меняется во времени и вектор положения  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$  точки  $A$ . С течением времени конец вектора положения  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$  прочертит в системе отсчета некоторую кривую, которая называется траекторией точки  $A$ . Хорошее представление о траектории имеет каждый, кто наблюдал след, оставляемый в небе реактивным самолетом.

Важной характеристикой движения является интенсивность изменения положения точки. Эта характеристика называется скоростью. На бытовом уровне это понятие хорошо знакомо всем людям. По представлениям большинства людей скорость это то, что измеряется спидометром автомобиля или другого транспортного средства, т.е. скорость — это расстояние, пройденное в единицу времени. Такое представление о скорости, конечно, правильно, но только до некоторой степени. Профессиональные автогонщики, например, имеют несколько иное представление о скорости. Они хорошо знают, что не только величина скорости машины имеет значение, но и направление движения машины. Более того, именно изменение направления движения требует от них наибольшего внимания и мастерства. На прямой, как стрела, трассе даже гонщики невысокого класса без труда достигнут максимальной скорости. Но по трассе с большим числом поворотов только истинные мастера могут поддерживать максимальную для данной трассы и данной машины скорость. Тот, кто не поленится обдумать все сказанное, с неизбежностью поймет, что скорость характеризуется не только числом, выражающим пройденное в единицу времени расстояние, но и направлением. А мы уже знаем, что объекты, полностью определяемые заданием одного числа и направления в пространстве (т.е. в системе отсчета) называются векторами. Таким образом скорость точки  $A$  — это вектор, характеризующий интенсивность изменения положения точки  $A$  в выбранной системе отсчета. Формально вектор скорости  $\mathbf{V}_A$  точки  $A$  вводится как предел следующего отношения

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_A(\mathbf{t} + \Delta t) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t})}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{R}_A(\mathbf{t})}{dt}. \quad (5.2.1)$$

Скорость  $\mathbf{V}_A(\mathbf{t})$  в каждый момент времени  $\mathbf{t}$  может быть вычислена по (5.2.1), если нам известен вектор положения  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$  не только в данный момент времени  $\mathbf{t}$ , но и в близкие к  $\mathbf{t}$  моменты времени  $\mathbf{t} + \Delta t$ , где  $\Delta t$  — некоторая последовательность малых интервалов. Практически (экспериментально) мы, конечно, не сможем точно вычислить предел (5.2.1). Однако в этом и нет особой необходимости. Например, для автомобиля вполне удовлетворительные результаты дадут приближенные (средние) значения скорости

$$\mathbf{V}_{\text{cp}}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{t} + 5\text{сек.}) - \mathbf{R}(\mathbf{t})}{5\text{сек.}}$$

Разумеется, это значение вектора скорости нас устроит, если мы хотим знать изменение скорости автомобиля на достаточно большом интервале времени, например, на протяжении одного часа. Если же мы хотим знать скорость спринтера при прохождении им дистанции 100 метров, то удовлетворительными будут, например, следующие измерения

$$\mathbf{V}_{\text{сп}}(t) = \frac{\mathbf{R}(t + 0,2\text{сек.}) - \mathbf{R}(t)}{0,2\text{сек.}}, \quad 0 \leq t \leq 15\text{сек.}$$

Чисто теоретически вектор положения задается как известная функция времени. В этом случае теоретически точное значение скорости находится без всякого труда по (5.2.1). Пусть, например, нам дано, что

$$\mathbf{R}_A(t) = vt \mathbf{m} + a \cos \omega t \mathbf{n}, \quad (5.2.2)$$

где  $v$ ,  $a$ ,  $\omega$  заданные числа, имеющие физическую размерность  $[v] = \text{м/сек.}$ ,  $[t] = \text{сек.}$ ,  $[a] = \text{м}$ ,  $[\omega] = \text{рад/сек.}$ ,  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  заданные единичные векторы. Тогда для скорости  $\mathbf{V}_A(t)$  имеем

$$\mathbf{V}_A(t) = \frac{d\mathbf{R}_A(t)}{dt} = v \mathbf{m} - a\omega \sin \omega t \mathbf{n}. \quad (5.2.3)$$

В этом выражении нам все известно, и мы в состоянии найти вектор  $\mathbf{V}_A(t)$  в любой интересующий нас момент времени. Спидометр у автомобиля измеряет модуль вектора скорости, который вычисляется стандартным образом. Например, для вектора скорости (5.2.3) имеем

$$V_A = \sqrt{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{V}_A} = \sqrt{v^2 - 2va \sin \omega t \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + a^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}.$$

Направление вектора скорости также можно определить. Для этого нужны специальные приборы, называемые гироскопами, которые на автомобилях не ставятся, но на самолетах они есть. Простые наблюдения показывают, что мы не чувствуем величины скорости. Например, наши ощущения одинаковы, когда мы едем с постоянной скоростью 60 км/час на автомобиле или летим с постоянной скоростью 800 км/час на самолете. Так будет, если мы беседуем со спутником и не наблюдаем за тем, что происходит снаружи автомобиля или самолета. Если же наблюдаем, то наши ощущения окажутся совершенно неправильными. Мы решим, что скорость автомобиля значительно выше, чем у самолета, ибо мы видим как быстро мелькают деревья за окном автомобиля и как медленно проплывает Земля под самолетом. В противоположность сказанному, наблюдения показывают, что всякие изменения скорости как по модулю, так и по направлению мы ощущаем вполне отчетливо. Например,



при торможении автомобиля направление вектора скорости практически не меняется, но модуль вектора скорости меняется весьма сильно. Эффект торможения всем знаком. **Движение с постоянной по модулю скоростью называется равномерным.** При этом направление вектора скорости может меняться. Если же при равномерном движении меняется направление вектора скорости, то такие изменения мы также отчетливо ощущаем, например, при езде на автомобиле со скоростью 60 км/час по извилистой дороге.

Таким образом, наблюдение показывает, что важной характеристикой движения является интенсивность изменения вектора скорости или **ускорение**. Ускорение точки **A** также является векторной величиной и определяется следующим образом

$$\mathbf{W}_A(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}_A(t + \Delta t) - \mathbf{V}_A(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{V}_A}{dt} = \frac{d^2\mathbf{R}_A(t)}{dt^2}. \quad (5.2.4)$$

Например, для движения (5.2.2) вектор ускорения определяется выражением

$$\mathbf{W}_A(t) = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{n}. \quad (5.2.5)$$

В данном примере ускорение направлено вдоль прямой, натянутой на вектор  $\mathbf{n}$ , но меняется по модулю. Впрочем, направление вектора ускорения также меняется: в одни моменты ускорение направлено вдоль  $\mathbf{n}$ , а в другие моменты времени оно имеет противоположное направление. **Движение с постоянным по модулю ускорением называется равноускоренным.** Примером равноускоренного движения является падение камня на Землю с высоты  $\mathbf{h}$ . Опыты такого рода проводил Галилео Галилей. В опытах Галилея различные тела бросались с высоты  $\mathbf{h}$  с нулевой начальной скоростью. Галилей установил, что движение (в вакууме) всех тел, независимо от их веса и формы, определялось вектором

$$\mathbf{R}_A(t) = (\mathbf{h} - \frac{1}{2}gt^2) \mathbf{k}, \quad (5.2.6)$$

где  $\mathbf{g}$  — постоянная величина,  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, ортогональный поверхности Земли и направленный вверх. Разумеется, в (5.2.6) использованы современные обозначения: во времена Галилея понятия вектора еще не существовало, да и сама формула (5.2.6) представлялась совершенно иначе. По (5.2.6) находим

$$\mathbf{V}_A(t) = -gt \mathbf{k}, \quad \mathbf{W}_A(t) = -g \mathbf{k}. \quad (5.2.7)$$

Здесь мы имеем типичный пример равноускоренного движения

$$|\mathbf{W}_A(t)| = g = \text{const},$$

причем величина  $\mathbf{g}$  называется ускорением свободного падения. Можно считать, что  $\mathbf{g} = 9,82 \text{ м/сек}^2$ .

**Важное замечание.** У читателя не должно сложиться ложного впечатления о механике, как описательной науке, т.е. науке, в которой описывается то, что уже известно. В кинематике мы действительно рассматриваем движение, как данное нам заранее. Но на самом деле одной из основных задач механики является определение движений тел при действии неких причин, которые изучаются и вводятся в рассмотрение в механике. Поэтому в дальнейшем сам ход рассуждений изменится и будет выглядеть примерно следующим образом. Мы знаем, что тело-точка  $\mathbf{A}$  существует и потому занимает некое положение в пространстве (системе отсчета). Будем характеризовать это положение радиус-вектором  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$ , который мы заранее не знаем, но он существует. Далее, мы знаем, что скорость и ускорение тела-точки выражаются формулами

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) = \frac{d\mathbf{R}_A(\mathbf{t})}{dt}, \quad \mathbf{W}_A(\mathbf{t}) = \frac{d^2\mathbf{R}_A(\mathbf{t})}{dt^2}. \quad (5.2.8)$$

После этого на основе неких физических законов, которые устанавливаются в механике, составляется выражение вида

$$\mathbf{W}_A(\mathbf{t}) + \mathbf{F}(\mathbf{V}_A, \mathbf{R}_A) = \mathbf{0}. \quad (5.2.9)$$

Исключая отсюда скорость и ускорение с помощью (5.2.8), получаем так называемое уравнение движения

$$\frac{d^2\mathbf{R}_A}{dt^2} + \mathbf{F}\left(\frac{d\mathbf{R}_A}{dt}, \mathbf{R}_A\right) = \mathbf{0}, \quad (5.2.10)$$

в котором вектор положения  $\mathbf{R}_A$  считается неизвестным. Выражение (5.2.10) является дифференциальным уравнением и существуют методы решения таких уравнений. Вектор положения  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$  находится в результате решения уравнения (5.2.10) — в этом и состоит основная задача механики, причем важнейшей частью этой задачи является вывод уравнения движения типа (5.2.10). В кинематике мы просто изучаем движения и способы их описания.

## 5.3 Частные случаи движения материальной точки

### 5.3.1 Прямолинейное движение

Прямолинейным называют движение материальной точки вдоль одной прямой. Пусть в некоторый момент времени, например,  $\mathbf{t} = 0$  точка занимала

положение, определяемое вектором положения  $\mathbf{R}_0$ . Пусть мы знаем, что она движется вдоль прямой, направление которой задается единичным вектором  $\mathbf{e}$ . Уравнение прямой, проходящей через точку  $\mathbf{R}_0$  в направлении вектора  $\mathbf{e}$  имеет вид

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{R}_0 + s \mathbf{e}, \quad -\infty < s < \infty. \quad (5.3.1)$$

Когда параметр  $s$  пробегает все допустимые значения из неограниченного интервала  $-\infty < s < \infty$ , конец радиус-вектора  $\mathbf{r}(s)$  опишет прямую линию, проходящую через точку  $\mathbf{R}_0$ . Параметр  $s$  имеет размерность длины и выражает расстояние от точки  $\mathbf{R}_0$  до точки определяемой значением параметра  $s$ . Например, значению параметра  $s = 5$  м отвечает точка, отстоящая от точки  $\mathbf{R}_0$  ( $s = 0$ ) на 5 м в положительном направлении вектора  $\mathbf{e}$ . Значению параметра  $s = -3$  м отвечает точка, отстоящая от  $\mathbf{R}_0$  на расстояние 3 м в направлении, противоположном  $\mathbf{e}$ . Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Вектор  $\mathbf{e}$ , как и вообще любой вектор (кроме радиус-вектора), не имеет определенного положения в системе отсчета и единственного образа. Фактически вектору  $\mathbf{e}$  отвечает бесконечно много образов (направленных отрезков) в системе отсчета, и все они равноправны и образуют, как принято говорить в математике, класс эквивалентности. Вектор

$$s \mathbf{e}, \quad -\infty < s < \infty. \quad (5.3.2)$$

определяет прямую, натянутую на вектор  $\mathbf{e}$ . В соответствии со сказанным выше, вектор  $s \mathbf{e}$  определяет не одну прямую, а бесконечное семейство параллельных прямых. Когда мы говорим о движении материальной точки вдоль прямой, то, разумеется, речь идет не о семействе прямых, а об одной единственной прямой в системе отсчета. Чтобы выделить эту единственную прямую, необходимо указать положение какой-либо точки этой прямой в системе отсчета. Точку на прямой можно определить заданием ее вектора положения или, что тоже самое, ее радиус-вектора. Важное отличие радиус-вектора от вектора именно в том и состоит, что радиус-вектору отвечает единственный направленный отрезок, идущий из начала системы отсчета в рассматриваемую точку системы отсчета. В выражении (5.3.1), в отличие от выражения (5.3.2), зафиксирована единственная прямая, проходящая через точку тела отсчета, определяемую вектором положения  $\mathbf{R}_0$ . Итак, мы определили прямую, вдоль которой движется материальная точка. Чтобы полностью определить прямолинейное движение материальной точки, мы должны указать закон ее движения вдоль рассматриваемой прямой, т.е. указать ее положения на прямой в любой момент времени. Пусть  $s_A$  означает ту координату  $s$  пря-

мой, в которой в данный момент времени  $\mathbf{t}$  находится материальная точка  $A$ . Тогда задание ее движения сводится к заданию функции

$$s_A = f(\mathbf{t}). \quad (5.3.3)$$

В векторной форме закон движения имеет следующий вид, получаемый по (5.3.1) и (5.3.3)

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_0 + f(\mathbf{t}) \mathbf{e}. \quad (5.3.4)$$

Если функция  $f(\mathbf{t})$  задана, то движение материальной точки полностью определено. Векторы скорости и ускорения находятся по (5.3.4) и имеют вид

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) = \dot{f}(\mathbf{t}) \mathbf{e}, \quad \mathbf{W}_A(\mathbf{t}) = \ddot{f}(\mathbf{t}) \mathbf{e}, \quad (5.3.5)$$

где использованы стандартные обозначения

$$\dot{\psi}(\mathbf{t}) = \frac{d\psi}{dt}, \quad \ddot{\psi}(\mathbf{t}) = \frac{d^2\psi}{dt^2} \quad (5.3.6)$$

для производных по времени,  $\psi$  любая встречающаяся функция: скалярная, векторная или тензорная.

Рассмотрим конкретные случаи задания закона движения (5.3.4).

### 5.3.2 Равномерное движение по прямой

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v} \mathbf{t} \mathbf{e}, \quad f(\mathbf{t}) = \mathbf{v} \mathbf{t}, \quad (5.3.7)$$

где  $\mathbf{v}$  — постоянная величина, имеющая размерность скорости  $[\mathbf{v}] = \text{м/сек}$ . Скорость и ускорение вычисляются по (5.3.5) и (5.3.7).

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{v} \mathbf{e}, \quad \mathbf{W}_A(\mathbf{t}) = 0. \quad (5.3.8)$$

Отсюда видим, что  $\mathbf{v}$  есть величина скорости. В отличие от модуля скорости, величина скорости может иметь любой знак. Если  $\mathbf{v} > 0$ , то материальная точка движется в положительном направлении вдоль прямой, т.е. в сторону возрастания координаты  $s$ . Если  $\mathbf{v} < 0$ , то материальная точка движется в сторону убывания координаты  $s$ . Напомним, что  $-5 < -3$ . Например, спидометр показывает 15 км/час. При этом автомобиль может двигаться как вперед ( $\mathbf{v} = +15$  км/час), так и назад ( $\mathbf{v} = -15$  км/час). По (5.3.8) мы видим, что **при прямолинейном равномерном движении материальной точки, ее ускорение равно нулю**. Данное утверждение справедливо только для прямолинейного движения. Равномерное движение по кривой траектории

всегда имеет отличное от нулевого ускорение. Выше упоминалось, что наши ощущения не фиксируют величины скорости прямолинейного равномерного движения. При этом мы допустили существенную недомолвку. Дело в том, что это верно только в так называемых инерциальных системах отсчета, о которых речь пойдет позднее при формулировке фундаментальных законов механики. В общем случае, равномерное прямолинейное движение относительно, например, “вращающейся” системы отсчета воспринимается нашими ощущениями вполне отчетливо.

### 5.3.3 Колебательное движение материальной точки по прямой

Примем закон движения (5.3.3) в следующем виде

$$f(t) = a \cos \omega t, \quad (5.3.9)$$

где  $a$ ,  $\omega$  — постоянные, имеющие размерности:  $[a] = \text{м}$ ,  $[\omega] = \text{рад/сек}$ , причем  $a > 0$  называется амплитудой колебания, а  $\omega$  называется частотой колебания.

В векторной форме закон движения записывается в виде

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + a \cos \omega t \mathbf{e}. \quad (5.3.10)$$

При этом движении материальная точка совершает колебательное движение около точки  $s = 0$  или, что то же самое, точки  $\mathbf{R}_0$ . Векторы скорости и ускорения даются выражениями

$$\mathbf{V}_A = -a\omega \sin \omega t \mathbf{e}, \quad \mathbf{W}_A = -a\omega^2 \cos \omega t \mathbf{e}. \quad (5.3.11)$$

Здесь и скорость, и ускорение имеют переменные во времени модули и направления: они направлены либо по  $\mathbf{e}$ , либо по  $(-\mathbf{e})$ .

### 5.3.4 Сложное движение материальной точки вдоль двух ортогональных между собой прямых

Пусть дано два семейства прямых, определяемых векторами

$$x \mathbf{m}, \quad y \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1. \quad (5.3.12)$$

где  $-\infty < x, y < \infty$ . Фактически эти прямые выделяют семейство параллельных плоскостей, натянутых на векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ . Пусть материальная точка совершает движение в плоскости, содержащую точку  $\mathbf{R}_0$ . Тогда векторное уравнение этой плоскости имеет вид

$$\mathbf{R}(x, y) = \mathbf{R}_0 + x \mathbf{m} + y \mathbf{n}. \quad (5.3.13)$$

Когда координаты  $x$ ,  $y$  (имеющие размерность длины) пробегают все допустимые значения, конец радиус-вектора  $\mathbf{R}(x, y)$  заметает всю рассматриваемую плоскость. Чтобы задать движение материальной точки вдоль данной плоскости, необходимо задать ее координаты как функции времени

$$x_A = f(t), \quad y_A = g(t), \quad (5.3.14)$$

где  $f(t)$  и  $g(t)$  суть заданные функции времени,  $x_A$  и  $y_A$  — координаты той точки плоскости (5.3.14), в которой в данный момент времени находится точка  $A$ . В векторной форме закон движения (5.3.14) имеет вид

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + f(t) \mathbf{m} + g(t) \mathbf{n}. \quad (5.3.15)$$

По (5.3.15) легко вычислить скорость и ускорение точки  $A$ .

$$\mathbf{V}_A = \dot{f}(t) \mathbf{m} + \dot{g}(t) \mathbf{n}, \quad \mathbf{W}_A = \ddot{f}(t) \mathbf{m} + \ddot{g}(t) \mathbf{n}. \quad (5.3.16)$$

Модули скорости и ускорения даются стандартными выражениями

$$V_A = \sqrt{\dot{f}^2 + \dot{g}^2}, \quad W_A = \sqrt{\ddot{f}^2 + \ddot{g}^2}.$$

Чтобы конкретизировать проводимые рассуждения, рассмотрим частный случай движения

$$x_A = a \cos \omega t, \quad y_A = b \sin \omega t, \quad (5.3.17)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$  постоянные числа, имеющие физическую размерность  $[a] = [b] = \text{м}$ ,  $[\omega] = \text{рад/сек}$ . При движении (5.3.17) материальная точка участвует в двух колебательных движениях. Одно из них происходит с амплитудой  $a$  и частотой  $\omega$  вдоль прямой, натянутой на вектор  $\mathbf{m}$ . Второе колебание с амплитудой  $b$  и частотой  $\omega$  происходит вдоль прямой, натянутой на вектор  $\mathbf{n}$ . В векторной форме закон движения имеет вид (5.3.15) при условии (5.3.17)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + a \cos \omega t \mathbf{m} + b \sin \omega t \mathbf{n}. \quad (5.3.18)$$

При изменении времени конец радиус-вектора  $\mathbf{R}_A(t)$  опишет некую кривую в плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ . Эта кривая называется траекторией материальной точки  $A$ . Важно осознать, что траектория представляет собой кривую, не зависящую от времени. Иными словами, чтобы получить уравнение траектории, необходимо исключить из (5.3.18) время. В случае (5.3.17) или (5.3.18) это можно сделать аналитически. Действительно, по (5.3.17) имеем

$$\left(\frac{x_A}{a}\right)^2 = \cos^2 \omega t, \quad \left(\frac{y_A}{b}\right)^2 = \sin^2 \omega t.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1. \quad (5.3.19)$$

Видим, что координаты материальной точки  $\mathbf{A}$  должны удовлетворять уравнению (5.3.19), которое определяет хорошо известную из аналитической геометрии кривую, являющуюся эллипсом с полуосями  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Радиус-вектор (5.3.18) дает нам информацию о положении материальной точки  $\mathbf{A}$  в каждый момент времени, но увидеть из этого выражения по какой траектории движется эта материальная точка можно только отметив ряд последовательных положений точки. Выражение (5.3.19), напротив, дает хорошее представление о траектории, по которой движется точка, но ничего не говорит о том, в какой именно точке траектории находится материальная точка в данный момент времени. Чтобы совместить представления (5.3.18) и (5.3.19), нужно, прежде всего, дать более удобное описание траектории, которое в явном виде содержало бы возможность фиксации точки траектории. Можно было бы, конечно, разрешить уравнение (5.3.19) относительно одной из координат. Например, мы можем написать

$$y_A = \pm b \sqrt{1 - \frac{x_A^2}{a^2}}. \quad (5.3.20)$$

Это не слишком удобно. Во-первых, нужно думать о том, какой знак и в каких ситуациях нужно выбирать. Во-вторых, непонятно почему мы выразили  $y_A$  как функцию  $x_A$ , а не наоборот. В уравнение (5.3.19) обе координаты входят равноправно и нет оснований предпочесть одну из них другой. Поэтому, как правило, представления типа (5.3.20) не используются. Будем рассуждать так. Две переменные  $x_A$  и  $y_A$  связаны уравнением (5.3.19). Это означает, что фактически только одна из этих переменных может меняться независимо. Можно сказать иначе. Существует некий параметр (который, конечно, можно вводить разными способами) такой, что уравнение (5.3.19) будет выполняться при любом значении этого параметра. Примем, например, следующее представление

$$x_A = a \cos \theta, \quad y_A = b \sin \theta, \quad -\infty < \theta < \infty. \quad (5.3.21)$$

При любом значении  $\theta$  уравнение (5.3.19) выполнено. Смысл параметра  $\theta$  также ясен — это угол составляемый вектором

$$\mathbf{r} = a \cos \theta \mathbf{m} + b \sin \theta \mathbf{n}$$

с вектором  $\mathbf{m}$ . Радиус-вектор

$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{a} \cos \theta \mathbf{m} + \mathbf{b} \sin \theta \mathbf{n} \quad (5.3.22)$$

при заданном значении  $\theta$  однозначно определяет точку на траектории, а при разных значениях  $\theta$  радиус-вектор (5.3.22) определяет траекторию материальной точки. Осталось только задать движение материальной точки  $\mathbf{A}$  вдоль траектории. Закон движения в данном случае очевиден

$$\theta_A = \omega t. \quad (5.3.23)$$

Для другого движения материальной точки по эллиптической орбите закон движения отличается от (5.3.23) и в общем случае имеет вид

$$\theta_A = f(t). \quad (5.3.24)$$

При этом уравнение орбиты (эллипса) определялось бы тем же выражением (5.3.22). Если подставить (5.3.23) в (5.3.22), то придем к закону движения (5.3.18). Может показаться, что в разбиении закона движения (5.3.18) на два представления (5.3.22) и (5.3.23) нет никакой пользы. Однако это не так. Выражение для траектории (5.3.22) дает нам глобальную характеристику движения, закон движения (5.3.24) представляет собой локальную характеристику. В качестве иллюстрации можно вспомнить стратегию подготовки автогонщика к соревнованиям. Прежде всего, он знакомится с трассой по карте, т.е. он изучает траекторию (линия трассы на карте — это и есть траектория) будущей гонки. По виду траектории автогонщик определяет для себя ориентировочный закон движения (вида (5.3.24)) по трассе, и устанавливает, где он может ехать быстрее, а где нужно снизить скорость. Общее изложение траекторного описания движения будет приведено в следующем параграфе. Здесь мы просто ограничиваемся вычислением векторов скорости и ускорения по (5.3.18):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_A(t) &= \omega(-\mathbf{a} \sin \omega t \mathbf{m} + \mathbf{b} \cos \omega t \mathbf{n}), \\ V_A &= |\mathbf{V}_A| = \omega \sqrt{\mathbf{a}^2 \sin^2 \omega t + \mathbf{b}^2 \cos^2 \omega t}, \\ \mathbf{W}_A(t) &= -\omega^2(\mathbf{a} \cos \omega t \mathbf{m} + \mathbf{b} \sin \omega t \mathbf{n}), \\ W_A(t) &= \omega^2 \sqrt{\mathbf{a}^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{b}^2 \sin^2 \omega t}. \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Видим, что рассматриваемое движение не является ни равномерным, ни равноускоренным. Однако оно становится таковым при движении по окружности, когда  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ . Этот случай движения целесообразно рассмотреть отдельно. В заключение обратим еще раз внимание на то, что суперпозиция двух



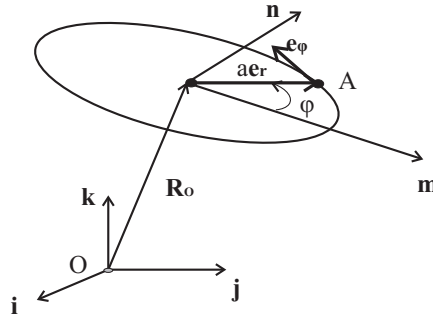


Рис. 5.1: Движение точки по окружности

колебательных движений вдоль ортогональных направлений приводит к движению по эллиптической орбите, которое внешне мало напоминает колебательное движение.

### 5.3.5 Движение материальной точки по окружности

Одним из наиболее часто встречающихся видов движения материальной точки является движение по окружности. Поэтому рассмотрим его подробнее. Пусть движение происходит по окружности с центром в точке  $\mathbf{R}_0$ . Окружность расположена в плоскости, натянутой на единичные ортогональные между собой векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ . Тогда уравнение этой окружности имеет вид

$$\mathbf{R}(\varphi) = \mathbf{R}_0 + a \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{m} + \sin \varphi \mathbf{n}, \quad (5.3.26)$$

где  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор,  $a$  — радиус окружности. Вектор  $a \mathbf{e}_r$  идет из точки  $\mathbf{R}_0$  в точку окружности с координатой  $\varphi$ , которая есть угол между вектором  $a \mathbf{e}_r$  и вектором  $\mathbf{m}$ . — см. Рис.5.1. Закон движения материальной точки  $\mathbf{A}$  зададим в виде

$$\varphi_A(t) = f(t). \quad (5.3.27)$$

Таким образом, в векторной форме закон движения имеет вид

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + a \mathbf{e}_r(\varphi_A(t)). \quad (5.3.28)$$

Вектор скорости определяется выражением

$$\mathbf{V}_A(t) = \dot{\mathbf{R}}_A = a \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}_\varphi(\varphi_A) = v_A \mathbf{e}_\varphi(\varphi_A),$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} = -\sin \varphi \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{n}. \quad (5.3.29)$$

Единичный вектор  $\mathbf{e}_\varphi$  ортогонален вектору  $\mathbf{e}_r$  и направлен по касательной к окружности. Величина скорости  $v_A(t)$  и ее модуль  $V_A = |v_A|$  находятся по

формулам

$$v_A(t) = a\dot{\varphi}(t), \quad V_A = a|\dot{\varphi}_A(t)|.$$

Движение по окружности называется равномерным, если

$$\dot{\varphi}_A(t) = \omega = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \varphi_A = \omega t. \quad (5.3.30)$$

Здесь принято, что при  $t = 0$  материальная точка находилась в положении

$$\mathbf{R}_A(0) = \mathbf{R}_0 + a \mathbf{m}.$$

Нетрудно вычислить и вектор ускорения

$$\mathbf{W}_A = \dot{\mathbf{V}}_A = \ddot{\mathbf{R}}_A = \dot{v}_A \mathbf{e}_\varphi - v_A \dot{\mathbf{e}}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi(\varphi_A) = \dot{\varphi}_A \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} = -\dot{\varphi}_A \mathbf{e}_r(\varphi_A).$$

Таким образом, вектор ускорения записывается в виде

$$\mathbf{W}_A = \dot{v}_A \mathbf{e}_\varphi(\varphi_A) - \frac{v_A^2}{a} \mathbf{e}_r(\varphi_A). \quad (5.3.31)$$

Первое слагаемое в этом выражении называется тангенциальным ускорением. При равномерном движении оно равно нулю. Второе слагаемое

$$(-v_A^2/a)\mathbf{e}_r(\varphi_A)$$

называется нормальным ускорением, оно направлено по радиусу к центру окружности. Поэтому иногда его называют центростремительным ускорением. Модуль вектора ускорения равен

$$W_A = \sqrt{\dot{v}_A^2 + v_A^4/a^2}.$$

Если движение по окружности является равномерным ( $\dot{v}_A = 0$ ), то оно одновременно является и равноускоренным:  $W_A = v_A^2/a = a\omega^2 = \text{const}$ .

### 5.3.6 Равномерное движение материальной точки по спирали

Равномерное движение материальной точки по окружности было рассмотрено выше и определялось выражениями (5.3.28) и (5.3.30)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_0 + a\mathbf{e}_r(\varphi_A), \quad \varphi_A = \omega t. \quad (5.3.32)$$

Движение материальной точки по спирали получается из движения (5.3.32) добавлением к нему равномерного движения вдоль прямой, ортогональной

плоскости окружности, т.е. прямой, натянутой на вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi$ . Координату на этой прямой обозначим через  $z$ . Тогда

$$\dot{z}_A(\mathbf{t}) = v_z = \text{const} \quad \Rightarrow \quad z_A = v_z t. \quad (5.3.33)$$

Таким образом, равномерное движение по спирали определяется заданием вектора

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_0 + v_z t \mathbf{k} + a \mathbf{e}_r(\varphi_A), \quad \varphi_A = \omega t. \quad (5.3.34)$$

Вектор скорости имеет вид

$$\mathbf{v}_A(\mathbf{t}) = v_z \mathbf{k} + a \omega \mathbf{e}_\varphi(\varphi_A), \quad v_A = \sqrt{v_z^2 + a^2 \omega^2}. \quad (5.3.35)$$

Вектор ускорения дается выражением

$$\mathbf{W}_A = -a \omega^2 \mathbf{e}_r(\varphi_A), \quad W_A = a \omega^2. \quad (5.3.36)$$

В данном случае движение происходит по спирали, навитой с равномерным шагом на цилиндрическую поверхность радиуса  $a$  с осью, натянутой на вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi$ . Ускорение (5.3.36) называется осестремительным, поскольку оно направлено к оси цилиндра.

**Упражнение.** Воспользовавшись результатами параграфа 3.8, вычислить тангенциальное и нормальное ускорения для движения (5.3.34) материальной точки по спирали.

## 5.4 Траекторное описание движения материальной точки

Всякая материальная точка  $A$  занимает некоторое положение, определяемое радиус-вектором  $\mathbf{R}_A$ , в пространстве (системе отсчета). Если это положение не меняется во времени, то говорят, что материальная точка покоится относительно выбранной системы отсчета. Движением материальной точки называется изменение ее положения с течением времени. Таким образом, движение определяется заданием векторной функции скалярного аргумента  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$ . Совокупность положений материальной точки в разные моменты времени называется траекторией. Геометрическим образом траектории является некая кривая в системе отсчета. Выберем на этой кривой какую-либо точку и будем называть ее точкой отсчета или началом. Введем в рассмотрение координату  $s$ , отсчитываемую вдоль кривой. Точке отсчета припишем значение координаты  $s = 0$ . Ориентируем эту кривую-траекторию, т.е. выберем одно из двух

возможных направлений на кривой в качестве положительного, например, слева — направо. Тогда точкам, лежащим правее точки  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ , будут приписаны положительные значения координаты  $\mathbf{s}$ , а точкам, лежащим левее координаты  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ , приписываются отрицательные значения координаты  $\mathbf{s}$ . Таким образом, все значения координаты  $\mathbf{s}$  лежат в интервале  $-\mathbf{a} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  положительные числа, могущие принимать и бесконечные значения. Координата  $\mathbf{s}$  имеет размерность длины. Координате  $\mathbf{s} = 5$  м соответствует точка, лежащая “правее” начала  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  и отстоящая от нее на расстояние 5 м, отсчитываемое вдоль кривой. Итак, траектория — это кривая в пространстве, определяемая параметрическим уравнением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{s}), \quad -\mathbf{a} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{b}. \quad (5.4.1)$$

Вектор единичной касательной  $\mathbf{t}(\mathbf{s})$  к этой кривой находится по формуле

$$\mathbf{t}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}'(\mathbf{s}), \quad ( )' \equiv d/ds. \quad (5.4.2)$$

Модуль  $\mathbf{t}(\mathbf{s})$  равен единице в силу очевидного равенства  $|d\mathbf{R}| = |d\mathbf{s}|$ . О кривизне кривой можно судить по изменению направления касательного вектора

$$\frac{d\mathbf{t}(\mathbf{s})}{d\mathbf{s}} = \frac{1}{R(\mathbf{s})}\mathbf{n}(\mathbf{s}), \quad |\mathbf{n}(\mathbf{s})| = 1. \quad (5.4.3)$$

Ортогональность векторов  $\mathbf{t}(\mathbf{s})$  и  $\mathbf{n}(\mathbf{s})$  следует из тождества

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}'(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{s}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{s}) = 0.$$

Вообще говоря, любой вектор, ортогональный к вектору касательной  $\mathbf{t}$ , называется нормалью к кривой. Поэтому в каждой точке кривой существует несчетное множество нормалей. Вектор  $\mathbf{n}(\mathbf{s})$ , введенный согласно (5.4.3) единственным образом, называется главной нормалью к кривой  $\mathbf{R}(\mathbf{s})$ . Обратим внимание, что в (5.4.3) вектор  $\mathbf{n}$  определен только с точностью до выбора положительного направления  $\mathbf{n}$ . Это направление в какой-либо точке кривой может быть выбрано произвольно. Но, сделав этот выбор в одной точке, во всех остальных точках этот выбор уже диктуется соображениями непрерывности. Итак, считаем, что  $\mathbf{n}$  есть непрерывная функция параметра  $\mathbf{s}$ . После того, как выбор положительного направления вектора осуществлен, знак скаляра  $R^{-1}(\mathbf{s})$ , называемого кривизной кривой в точке с координатой  $\mathbf{s}$ , определяется однозначно. Кривизна кривой положительна, если нормаль направлена в сторону выпуклости кривой, и отрицательна в противоположном случае — см. Рис.5.2. На Рис.5.2 кривизна в точке  $\mathbf{A}$  положительна, а кри-

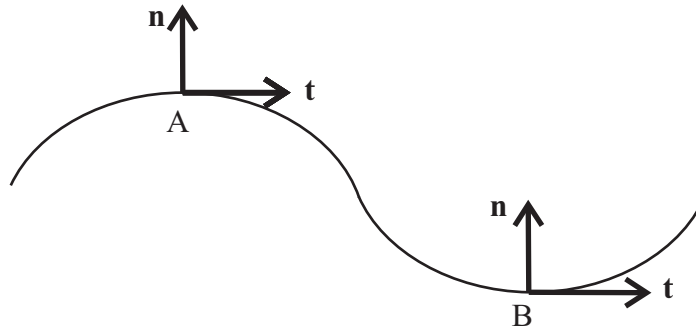


Рис. 5.2: Кривизна кривой

визна в точке **B** отрицательна. Величина  $\mathbf{R}(s)$  называется радиусом кривизны кривой, она имеет размерность длины и может иметь любой знак. Сказанного о кривых нам вполне достаточно, чтобы дать полное траекторное описание движения. Желающие получить дополнительные сведения о кривых могут обратиться к параграфу 3.8 или к многочисленным книгам по дифференциальной геометрии — см., например, [54].

Итак, траектория движения материальной точки определяется заданием уравнения (5.4.1). Как видим, время вообще не входит в это уравнение, т.е. движение материальной точки уравнением траектории еще не определено. Для этого нам нужно задать закон движения точки **A** вдоль траектории, т.е. нам нужно задать координату  $s_A$  как функцию времени

$$s_A(t) = f(t). \quad (5.4.4)$$

Обычно этот закон записывают в упрощенной форме  $\mathbf{s}(t)$ , т.е. опуская индекс **A** и имея в виду, что  $\mathbf{s}$  — это координата точки **A** на траектории. В векторной форме закон движения объединяет уравнение траектории (5.4.1) и закон движения вдоль траектории (5.4.4)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}(s_A(t)). \quad (5.4.5)$$

Вычисляя по (5.4.5) скорость, получаем

$$\mathbf{V}_A(t) = \dot{s}_A(t)\mathbf{t}(s_A(t)), \quad (5.4.6)$$

где  $\mathbf{t}(s_A)$  — единичная касательная к кривой в точке с координатой  $s_A$ . Из (5.4.6) видим, что вектор скорости направлен по касательной к траектории. По (5.4.6) мы можем вычислить вектор ускорения

$$\mathbf{W}_A(t) = \ddot{s}_A(t)\mathbf{t}(s_A(t)) + \frac{\dot{s}_A^2(t)}{\mathbf{R}(s_A)}\mathbf{n}(s_A). \quad (5.4.7)$$

Здесь мы воспользовались формулой (5.4.3). Первое слагаемое в правой части (5.4.7) называется тангенциальным ускорением, а второе — нормальным ускорением. Из (5.4.7) видим, что если траектория имеет кривизну, то ускорение точки  $\mathbf{A}$  отлично от нуля. В частности при равномерном движении точки  $\mathbf{A}$  по траектории ( $\dot{s}_A = \text{const}$ ,  $\ddot{s}_A = 0$ ), ускорение точки  $\mathbf{A}$  отлично от нуля.

#### 5.4.1 Пример 1. Движение частицы по окружности — траекторное описание

Это уравнение уже описано в параграфе 3.3. Оно задавалось выражением (5.3.26)

$$\mathbf{R}(\varphi) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{a}(\cos \varphi \mathbf{m} + \sin \varphi \mathbf{n}), \quad \varphi_A = f(\mathbf{t}). \quad (5.4.8)$$

Здесь параметрическое уравнение траектории задано в функции параметра  $\varphi$  — угловой координаты. Чтобы задать уравнение в зависимости от дуговой координаты  $\mathbf{s}$ , необходимо воспользоваться выражением

$$d\mathbf{R} = \mathbf{t}(\mathbf{s})d\mathbf{s}. \quad (5.4.9)$$

С другой стороны, по (5.4.8) имеем

$$d\mathbf{R} = \mathbf{a}(-\sin \varphi \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{n})d\varphi = \mathbf{t}a d\varphi. \quad (5.4.10)$$

Здесь вектор единичной касательной определяется выражением

$$\mathbf{t} = -\sin \varphi \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{n}.$$

Сравнивая (5.4.9) и (5.4.10), получаем, что  $d\mathbf{s} = \mathbf{a}d\varphi$  или  $\mathbf{s} = \mathbf{a}\varphi$ . В данном случае результат был очевиден заранее. Действительно, длина дуги окружности  $\mathbf{s}$  связана с угловой координатой  $\varphi$  соотношением  $\mathbf{s} = \mathbf{a}\varphi$ , как это известно из школьного курса математике. Однако показанный здесь путь нахождения дуговой координаты  $\mathbf{s}$  верен всегда, но далеко не всегда ведет к столь очевидному результату. Дальнейшее описание можно не приводить, поскольку оно следует из параграфа 5.3 при замене  $\varphi = \mathbf{s}/\mathbf{a}$ .

#### 5.4.2 Пример 2. Полет камня в поле силы тяжести

Рассмотрим задачу о прицельном метании камня. Обратим внимание, что эту задачу на интуитивном уровне умеют решать большинство мальчишек, которые ловко, но не всегда с благими намерениями, поражают выбранные цели. Здесь мы хотим рассмотреть эту задачу на интеллектуальном уровне, что в состоянии выполнить только те, кто получил соответствующее образование.

При этом, забегая далеко вперед, мы воспользуемся известным из школьного курса физики вторым законом Ньютона:

$$\text{масса} \times \text{ускорение} = \text{сила}.$$

Понятия массы и силы также считаем (позднее эти понятия будут введены по возможности строго) интуитивно понятными из школьного курса физики. Поскольку камень бросается на малое расстояние, то Земля может считаться плоской, что совершенно недопустимо, например, при запуске баллистической ракеты на расстояние порядка 10 тысяч километров. Впрочем, полет ракеты имеет мало общего с полетом камня, поскольку ракета имеет собственные двигатели. Горизонтальное направление будем задавать единичным вектором  $\mathbf{n}$ . Натянем на этот вектор прямую, расстояние вдоль которой будем задавать координатой  $x$ . Значению  $x = 0$  отвечает точка, из которой бросается камень в положительном направлении  $\mathbf{n}$ . Вертикальное направление будем задавать единичным вектором  $\mathbf{k}$ , направленным вверх. На этот вектор натянем прямую, расстояние вдоль которой будем определять посредством координаты  $y$ . Точка  $y = 0$  соответствует условно плоской поверхности Земли. Векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}$  ортогональны между собой. Таким образом, положение камня в полете определяется радиус-вектором  $\mathbf{R}(t)$

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{n} + y(t)\mathbf{k}. \quad (5.4.11)$$

Его скорость и ускорение определяются выражениями

$$\mathbf{V}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{n} + \dot{y}(t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{W}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{n} + \ddot{y}(t)\mathbf{k} \quad (5.4.12)$$

соответственно. В полете на камень действует сила тяготения Земли, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{g}\mathbf{k},$$

где  $m$  и  $\mathbf{g}$  суть масса камня и ускорение свободного падения. Знак минус в выражении для силы показывает, что сила направлена вертикально вниз. Кроме силы тяжести, на камень в полете действует сила трения камня о воздух, но влиянием силы трения мы, простоты ради, пренебрежем. Запишем теперь второй закон Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{R}}(t) = -m\mathbf{g}\mathbf{k}. \quad (5.4.13)$$

Здесь нам дан не сам закон движения камня, а только уравнение, которому он удовлетворяет. Чтобы найти закон движения, нам необходимо решить уравнение (5.4.13), которое выражено в дифференциальной форме. В таких

случаях говорят, что необходимо проинтегрировать уравнение (5.4.13). Вообще говоря, нахождение решений дифференциальных уравнений представляет собой довольно сложную математическую проблему, но в данном случае уравнение (5.4.13) является очень простым и без труда интегрируется. Для этого достаточно знать, что производная от постоянного вектора равна нулю.

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}(t) = \text{const.} \quad (5.4.14)$$

Перепишем уравнение (5.4.13) в эквивалентном виде

$$m \left[ \dot{\mathbf{R}}(t) + g\mathbf{tk} \right]' = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}(t) + g\mathbf{tk} = \mathbf{a} = \text{const}, \quad (5.4.15)$$

где постоянный вектор  $\mathbf{a}$  может быть любым. Здесь мы сталкиваемся с важнейшей особенностью, возникающей при отыскании решений дифференциальных уравнений. А именно, само по себе дифференциальное уравнение (5.4.13) не позволяет найти однозначного решения. Удивляться этому не приходится. В самом деле, уравнение (5.4.13) определяет изменение скорости камня в процессе полета. Однако любой мальчишка знает, что при прицельном метании многое определяется тем, как именно он кинет камень, и какую скорость (по величине и по направлению) он сообщит этому камню. На языке математики подобного рода информация называется начальными условиями. В уравнении (5.4.13) эта информация не содержится. Таким образом, чтобы найти однозначное решение задачи, необходимо знать не только закон (в данном случае второй закон Ньютона (5.4.13)), управляющий поведением камня в полете, но и начальные условия. Возможность выполнения начальных условий обеспечивается появлением в решении дифференциального уравнения неких произвольных элементов, называемых произвольными постоянными интегрирования. В решении (5.4.15) роль произвольной постоянной интегрирования играет постоянный вектор  $\mathbf{a}$ . Обратим внимание, что в левой части (5.4.15) стоит функция времени, а в правой его части стоит постоянный вектор. Смысл последнего обнаруживается, если записать решение (5.4.15) в начальный момент времени  $t = \mathbf{0}$ , т.е. в момент времени, когда камень покидает руку бросающего. Тогда получим

$$\dot{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{V}_0, \quad (5.4.16)$$

где вектор  $\mathbf{V}_0$  есть начальная скорость камня. Теперь решение (5.4.15) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{R}}(t) + g\mathbf{tk} = \mathbf{V}_0. \quad (5.4.17)$$

Вновь получили дифференциальное уравнение, но уже более низкого порядка. В отличие от (5.4.13) в это уравнение входит только первая производная



от радиус-вектора. При этом в (5.4.17) уже содержится информация о начальных условиях, т.к. в него входит начальная скорость камня. Уравнение (5.4.17) можно переписать в эквивалентной форме

$$\left[ \mathbf{R}(t) + \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} - \mathbf{V}_0t \right]' = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) + \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} - \mathbf{V}_0t = \mathbf{b}, \quad (5.4.18)$$

где  $\mathbf{b}$  есть произвольный постоянный вектор. Для определения этого вектора необходимо вновь использовать начальные условия. А именно, нам необходимо знать начальное положение камня. Из (5.4.18) мы видим, что  $\mathbf{b} = \mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$ , поскольку место вылета камня мы приняли за начало отсчета. Теперь (5.4.18) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}_0t - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{k}. \quad (5.4.19)$$

Это выражение полностью описывает полет камня. Впрочем, необходимо иметь в виду, что решение (5.4.19) справедливо на ограниченном интервале времени. В самом деле, все знают, что полет прекращается, когда камень упадет на землю или даже раньше, если камень упадет, например, на балкон дома.

**Упражнение.** Формально говоря, в выражении (5.4.19) содержится вся необходимая информация. Поэтому может показаться, что задача полностью решена. Это иллюзия. На самом деле, если иметь в виду какие-либо полезные цели, решение задачи с получением (5.4.19) только начинается. Начинаящему весьма полезно, на основе (5.4.19), проанализировать ситуацию применительно к стрельбе из дальнобойного орудия и найти ответы на следующие вопросы. Каковы время полета снаряда и дальность его полета? Что определяет дальность полета? Понятно, что масса снаряда должна влиять на дальность его полета. Тогда почему в (5.4.19) не входит масса снаряда? Как поразить цель с заданными координатами? Полезно придумать дополнительные вопросы. Цель этого упражнения состоит не в том, чтобы тренироваться в вычислениях, а в том, чтобы читатель убедился, что его интуиция (здравый смысл) и математические вычисления находятся в полном согласии между собой.

Вернемся к траекторному описанию движения. Представим вектор  $\mathbf{V}_0$  в виде разложения

$$\mathbf{V}_0 = V_n\mathbf{n} + V_k\mathbf{k}.$$

Тогда вместо (5.4.19) будем иметь

$$\mathbf{R}(t) = V_n t\mathbf{n} + (V_k t - \frac{1}{2}gt^2)\mathbf{k}.$$

Сравнивая это выражение с (5.4.11), получаем

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}_n t, \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{V}_k t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (5.4.20)$$

Исключая отсюда время с помощью первого уравнения, получаем

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \left( \frac{\mathbf{V}_k}{\mathbf{V}_n} - \frac{1}{2} \frac{g \mathbf{x}}{\mathbf{V}_n^2} \right). \quad (5.4.21)$$

Подставляя это выражение в (5.4.11), получаем

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \mathbf{n} + \mathbf{x} \left( \frac{\mathbf{V}_k}{\mathbf{V}_n} - \frac{1}{2} \frac{g \mathbf{x}}{\mathbf{V}_n^2} \right) \mathbf{k}. \quad (5.4.22)$$

Это уравнение уже определяет траекторию, но определяет ее не через параметр  $s$ , т.е. длину дуги траектории, а посредством координаты  $\mathbf{x}$ .

## 5.5 Движение спутника Земли по круговой орбите

Рассмотрим задачу о движении спутника Земли по круговой орбите. Наше рассмотрение будет в высшей степени схематичным, поскольку мы просто изучаем различные типы движения, а не решаем реальные задачи. Запуск спутника осуществляется следующим образом. Спутник устанавливается на баллистической ракете–носителе, которая стартует с Земли и на расчетной высоте отстреливает спутник с заданной скоростью  $\mathbf{V}_0$ . Далее спутник движется по инерции в поле тяготения Земли. Траектория этого движения определяется начальными условиями, т.е. положением и скоростью спутника в момент отделения спутника от ракеты–носителя. В процессе движения на спутник действует только сила тяготения Земли.

Введем обозначения:  $m$  — масса спутника,  $M$  — масса Земли,  $R_g$  — радиус Земли,  $H$  — высота, на которой спутник отделяется от ракеты. В полете на спутник действует сила, определяемая по закону всемирного тяготения

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{R^3} \mathbf{R}, \quad (5.5.1)$$

где  $G$  — универсальная гравитационная постоянная,  $R$  — расстояние от центра Земли до спутника. Согласно второму закону Ньютона имеем

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -G \frac{mM}{R^3} \mathbf{R}. \quad (5.5.2)$$

Получили нелинейное уравнение для определения  $\mathbf{R}(t)$ , определяющего положение спутника относительно центра Земли, которую считаем неподвижной. Считаем, что спутник движется по плоской орбите, которая, очевидно, лежит в плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{R}_0$  и  $\mathbf{V}_0$ . Введем в этой плоскости единичные ортогональные векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  такие, что

$$\mathbf{R}_0 = r_0 \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0. \quad (5.5.3)$$

Поскольку мы считаем, что спутник движется по круговой орбите, то для вектора положения  $\mathbf{R}(t)$  имеем

$$\mathbf{R}(t) = r(\cos \varphi(t) \mathbf{n} + \sin \varphi(t) \mathbf{m}), \quad (5.5.4)$$

где  $r = \text{const}$ . Угол  $\varphi(t)$  определяет положение спутника на орбите. Скорость и ускорение спутника вычисляются по формулам

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = r\dot{\varphi}(-\sin \varphi(t) \mathbf{n} + \cos \varphi(t) \mathbf{m}), \quad (5.5.5)$$

$$\mathbf{W} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -r\dot{\varphi}^2(\cos \varphi \mathbf{n} + \sin \varphi \mathbf{m}) + r\ddot{\varphi}(-\sin \varphi \mathbf{n} + \cos \varphi \mathbf{m}).$$

Подставляя (5.5.4) и (5.5.5) в уравнение (5.5.2), получаем

$$\begin{aligned} -r\dot{\varphi}^2(\cos \varphi \mathbf{n} + \sin \varphi \mathbf{m}) + r\ddot{\varphi}(-\sin \varphi \mathbf{n} + \cos \varphi \mathbf{m}) = \\ = -G \frac{M}{r^2}(\cos \varphi \mathbf{n} + \sin \varphi \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

Заметим теперь, что векторы

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{n} + \sin \varphi \mathbf{m}, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{n} + \cos \varphi \mathbf{m} \quad (5.5.7)$$

имеют единичную длину и ортогональны между собой. Умножая обе части уравнения (5.5.6) скалярно на второй из векторов (5.5.7), получаем, что

$$\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \omega = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega t + \alpha. \quad (5.5.8)$$

Если считать, что при  $t = 0$  угол  $\varphi = 0$ , то  $\alpha = 0$ . Теперь уравнение (5.5.6) дает

$$\dot{\varphi}^2 = \omega^2 = \frac{GM}{r^3} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (5.5.9)$$

Таким образом, все параметры движения найдены и вектор положения имеет вид

$$\mathbf{R}(t) = r(\cos \omega t \mathbf{n} + \sin \omega t \mathbf{m}). \quad (5.5.10)$$

Обратим внимание, что мы не использовали начальное условие по скорости. Это означает, что начальную скорость нельзя задавать произвольно, если мы хотим, чтобы спутник двигался по круговой орбите. Согласно (5.5.10) имеем

$$\mathbf{V}(t) = r\omega(-\sin \omega t \mathbf{n} + \cos \omega t \mathbf{m}) \Rightarrow \mathbf{V}(0) = r\omega \mathbf{m}. \quad (5.5.11)$$

Таким образом, для движения спутника по круговой орбите начальная скорость должна быть направлена строго ортогонально вектору начального положения  $\mathbf{R}(0)$  и, кроме того, она должна иметь строго определенную величину, определяемую выражением (5.5.11). Если модуль начальной скорости будет меньше этого значения, то спутник будет двигаться по орбите, спускающейся к Земле, и в конце концов, спутник упадет на Землю. Если начальная скорость будет больше найденного значения (5.5.11), то спутник будет двигаться по эллиптической орбите или даже вообще покинет область притяжения Земли. Этот случай мы рассмотрим в следующем пункте. Минимальная скорость, при которой тело может стать спутником Земли, называется первой космической скоростью. Эта скорость зависит от высоты над уровнем Земли. Согласно (5.5.11) имеем

$$V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_g + H}}. \quad (5.5.12)$$

Вычислим силу тяготения (5.5.1) на высоте  $H$

$$F = -m \frac{GM}{(R_g + H)^2}.$$

Величина

$$g = GM/R_g^2 = 9,82 \text{ м/сек}^2$$

называется ускорением свободного падения на уровне поверхности Земли. Поэтому выражение (5.5.12) можно переписать в виде

$$V_0 = \sqrt{\frac{gR_g^2}{R_g + H}} = \sqrt{gR_g} \frac{1}{(1 + H/R_g)^{1/2}}. \quad (5.5.13)$$

Чем больше  $H$ , тем меньше величина скорости, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно стало спутником Земли. Скорость

$$V_1 = \sqrt{gR_g} \simeq 7,9 \text{ км/сек} \quad (5.5.14)$$

называется первой космической скоростью. В (5.5.14) принято, что  $R_g = 6400$  км.

## 5.6 Движение тела в центральном поле тяготения

Выше мы рассмотрели движение спутника Земли по круговой орбите. Там мы видели, что такое движение возможно только при жестком ограничении на величину и направление начальной скорости. Теперь мы откажемся от этого ограничения и рассмотрим более общую ситуацию. Сохраним обозначения предыдущего пункта. Задача сводится к нахождению решения уравнения

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{GM}{R^3}\mathbf{R} \quad (5.6.1)$$

при начальных условиях

$$t = 0: \quad \mathbf{R}(0) = (R_0 + H)\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{R}}(0) = \mathbf{V}_0. \quad (5.6.2)$$

Сначала покажем, что векторы положения  $\mathbf{R}(t)$ , удовлетворяющие уравнению (5.6.1) при всех  $t$  лежат в одной и той же плоскости. Для этого векторно умножим обе части уравнения (5.6.1) на вектор  $\mathbf{R}(t)$ . В результате получим

$$\mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{R}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{L} = \text{const}. \quad (5.6.3)$$

Вектор  $\mathbf{L}$  называется вектором Лапласа. Таким образом, мы видим, что вектор положения  $\mathbf{R}(t)$  и вектор скорости  $\dot{\mathbf{R}}(t)$  всегда лежат в одной и той же плоскости, нормаль к которой совпадает с постоянным вектором  $\mathbf{L}$ . В самом деле, умножая (5.6.3) скалярно на  $\mathbf{R}(t)$ , получаем

$$\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \mathbf{L} = 0.$$

Отсюда следует, что  $\mathbf{R}(t)$  лежит в плоскости, ортогональной  $\mathbf{L}$ . Легко видеть, что эта плоскость натянута на векторы  $\mathbf{R}(0)$  и  $\mathbf{V}_0$ . Если векторы  $\mathbf{R}(0)$  и  $\mathbf{V}_0$  не лежат на одной прямой, то эта плоскость находится однозначно. Выберем в этой плоскости пару единичных ортогональных векторов  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  таких, что

$$\mathbf{R}_0 = R(0)\mathbf{n}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Введем в рассмотрение единичные векторы

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{n} + \sin \varphi \mathbf{m}, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{n} + \cos \varphi \mathbf{m}. \quad (5.6.4)$$

Видим, что они ортогональны между собой. Смысл векторов  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  хорошо знаком тем, кто уже изучил полярную (цилиндрическую) систему координат; но сейчас мы будем использовать их совершенно формально. Вектор  $\mathbf{R}(t)$ , определяющий положение тела относительно Земли, будем искать в виде

$$\mathbf{R}(t) = R(t)(\cos \varphi(t)\mathbf{n} + \sin \varphi(t)\mathbf{m}) = R(t)\mathbf{e}_r(t). \quad (5.6.5)$$

Векторы скорости и ускорения находятся по выражениям

$$\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) = \dot{R}(t)\mathbf{e}_r(t) + R(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi, \quad (5.6.6)$$

$$\mathbf{W}(t) = \ddot{\mathbf{R}}(t) = (\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (5.6.1), получаем

$$(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi = -\frac{GM}{R^2}\mathbf{e}_r. \quad (5.6.7)$$

Это уравнение эквивалентно двум скалярным

$$\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM}{R^2}, \quad (5.6.8)$$

$$R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi} = 0. \quad (5.6.9)$$

Система (5.6.8) — (5.6.9) относительно легко интегрируется. При этом следует различать два случая

$$1) \dot{\varphi} = 0, \quad 2) \dot{\varphi} \neq 0. \quad (5.6.10)$$

В первом случае мы имеем радиальное движение тела

$$\mathbf{R}(t) = R(t)\mathbf{m} = R(t)\mathbf{e}_r(0). \quad (5.6.11)$$

Это движение возможно только в том случае, если начальная скорость  $\mathbf{V}_0$  также была направлена строго вдоль радиуса. Уравнение (5.6.8) при  $\dot{\varphi} = 0$  принимает вид

$$\ddot{R} + \frac{GM}{R^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{R} + g\frac{R_g}{R^2} = 0,$$

где использованы обозначения предыдущего пункта. После умножения последнего уравнения на  $\dot{R}$  оно приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}\dot{R}^2 - gR_g\frac{R_g}{R} \right] = 0.$$

Откуда следует, что выражение, стоящее в квадратных скобках, не зависит от времени, т.е. имеем интеграл движения

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - g\frac{R_g}{R} = A. \quad (5.6.12)$$

Для нахождения  $A$  используем начальные условия (5.6.2), где начальная скорость  $\mathbf{V}_0$  направлена по вектору  $\mathbf{e}_r(0)$

$$\mathbf{V}_0 = V_0\mathbf{e}_r(0). \quad (5.6.13)$$

Тогда для  $A$  получаем выражение

$$\frac{1}{2}V_0^2 - V_1^2 \frac{R_g}{R_g + H} = A,$$

где через  $V_1$  обозначена первая космическая скорость, введенная в предыдущем пункте. Теперь выражение (5.6.12) можно переписать в виде

$$\dot{R}^2 = V_0^2 - \frac{2R_g}{R_g + H} V_1^2 + V_1^2 \frac{2R_g}{R}. \quad (5.6.14)$$

Дальнейший анализ зависит от знака начальной скорости. Если  $V_0 < 0$ , т.е. телу была сообщена скорость по направлению к Земле, то при малых  $t$  величина  $\dot{R}(t) < 0$ , т.е. расстояние тела от центра Земли уменьшается, а тело падает на Землю. При этом ничего интересного не происходит. Если же  $V_0 > 0$ , т.е. телу сообщена начальная скорость по направлению от Земли, то возможны варианты. Если

$$V_0^2 \geq \frac{2R_g}{R_g + H} V_1^2, \quad (5.6.15)$$

то по (5.6.14) видим, что  $\dot{R} > 0$ , т.е. расстояние тела от Земли будет монотонно возрастать до бесконечности, а тело навсегда покинет область притяжения Земли. Минимальное значение скорости, при котором это возможно, называется второй космической скоростью. На поверхности Земли, т.е. при  $H = 0$ , она равна

$$V_2 = \sqrt{2}V_1 \simeq 11,2 \text{ км/сек.}$$

Если же неравенство (5.6.15) нарушено, т.е. начальная скорость меньше  $V_2$ , то наступит момент, когда производная  $\dot{R}$  обратится в нуль, а далее станет отрицательной, т.е. тело начнет падать на Землю. Рассмотрим случай, когда  $\dot{\phi} \neq 0$ . Он немного сложнее рассмотренного. В этом случае  $R\dot{\phi} \neq 0$ , и мы можем переписать уравнение (5.6.9), разделив его на  $R\dot{\phi}$ . Тогда получим

$$\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} + 2\frac{\dot{R}}{R} = \frac{d}{dt} [\ln\dot{\phi} + 2\ln R] = \frac{d}{dt} \ln R^2 \dot{\phi} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$R^2(t)\dot{\phi}(t) = C = \text{const.} \quad (5.6.16)$$

Найденный интеграл называется интегралом площадей и выражает собой один из законов Кеплера. Постоянная  $C$  в (5.6.16) находится по начальным условиям

$$C = \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi(0)(R_g + H). \quad (5.6.17)$$

Исключая  $\dot{\varphi}(\mathbf{t})$  с помощью интеграла (5.6.16) из уравнения (5.6.8), получаем уравнение для нахождения расстояния  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$

$$\ddot{\mathbf{R}} - \frac{C^2}{\mathbf{R}^3} + g \frac{\mathbf{R}_g^2}{\mathbf{R}^2} = 0. \quad (5.6.18)$$

Умножая это уравнение на  $\dot{\mathbf{R}}$ , приводим его к полной производной

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{C^2}{\mathbf{R}^2} - g \frac{\mathbf{R}_g^2}{\mathbf{R}} \right] = 0.$$

Отсюда после несложных преобразований следует интеграл

$$\dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{t}) = V_0^2 + 2V_1^2 \left( \frac{\mathbf{R}_g}{\mathbf{R}(\mathbf{t})} - \frac{\mathbf{R}_g}{\mathbf{R}_g + \mathbf{H}} \right) - (\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi(0))^2 \left( \frac{\mathbf{R}_g + \mathbf{H}}{\mathbf{R}(\mathbf{t})} \right)^2. \quad (5.6.19)$$

Анализ этого уравнения относительно сложен. В принципе, оно полностью интегрируется и его решение можно найти во многих книгах по механике. Но нас сейчас интересует не явное интегрирование уравнения (5.6.19), а характер траектории движения тела в зависимости от значения начальной скорости. Для ответа на этот вопрос достаточно проанализировать правую часть уравнения (5.6.19). Ясно, что функция  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$  должна быть такой, чтобы правая часть (5.6.19) была бы неотрицательной и, кроме того,  $\mathbf{R}(\mathbf{t}) \geq \mathbf{R}_g$ . Допустим, что правая часть (5.6.19) строго положительна. Тогда производная  $\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{t})$  знакопостоянна и функция  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$  либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает. В первом случае тело упадет на Землю, а во втором случае оно покинет область притяжения Земли. В обоих случаях тело не может быть спутником Земли. Наиболее интересен случай когда при некоторых значениях  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$  правая часть (5.6.19) обращается в нуль. При этом также возможны варианты. При анализе этих вариантов изучающий должен обратить внимание на то, что для полного понимания существа вопроса совсем не обязательно находить точное решение уравнения (5.6.19). Более того, для этого вполне достаточно знаний, полученных в школе, поскольку все сводится к анализу квадратного уравнения. Перепишем уравнение (5.6.19) в эквивалентной форме

$$\dot{\mathbf{R}}^2(\mathbf{t}) = -V_\varphi^2(1 + \alpha)^2[x^2 - \alpha x + \mathbf{b}], \quad (5.6.20)$$

где введены обозначения

$$0 \leq x = \frac{\mathbf{R}_g}{\mathbf{R}(\mathbf{t})} \leq 1, \quad \alpha = \frac{\mathbf{H}}{\mathbf{R}_g}, \quad V_\varphi = V_0 \cdot \mathbf{e}_\varphi(0) \neq 0,$$



$$\mathbf{a} = \frac{2V_1^2}{V_\phi^2(1+\alpha)^2}, \quad \mathbf{b} = \frac{2V_1^2 - (1+\alpha)V_0^2}{V_\phi^2(1+\alpha)^3}. \quad (5.6.21)$$

Из (5.6.20) следует, что

$$f(x) \equiv x^2 - ax + b \leq 0. \quad (5.6.22)$$

Если левая часть этого уравнения при  $0 \leq x \leq 1$  строго меньше нуля, то тело либо падает на Землю, либо улетает на бесконечность. В обоих случаях тело не может быть спутником Земли. Необходимыми и достаточными условиями строгой отрицательности первой части неравенства (5.6.22) являются три неравенства

$$\mathbf{b} < 0, \quad 1 - \mathbf{a} + \mathbf{b} < 0, \quad \mathbf{b} - \mathbf{a}^2/4 < 0. \quad (5.6.23)$$

Первые два неравенства суть условия отрицательности функции  $f(x)$  на концах интервала  $x = 0$  и  $x = 1$ . Последнее неравенство определяет отрицательность максимального значения функции  $f(x)$  в точке  $x = \mathbf{a}/2$ , при условии, что

$$\frac{\mathbf{a}}{2} = \frac{V_1^2}{V_\phi^2(1+\alpha)^2} < 1.$$

Если это условие нарушено, то последнее неравенство в (5.6.23) следует отбросить. Обсуждаемые неравенства налагают ограничения на начальные значения  $V_0^2$ ,  $V_\phi^2$  и  $H$ . Теперь следует рассмотреть случай, когда  $f(x)$  на интервале  $0 \leq x \leq 1$  может обращаться в нуль. Для этого достаточно найти корни уравнения  $f(x) = 0$ . Они определяются выражениями

$$x_{1,2} = \frac{\mathbf{a}}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2}{4} - \mathbf{b}}. \quad (5.6.24)$$

Корни существуют при условии, что

$$\frac{\mathbf{a}^2}{4} > \mathbf{b}. \quad (5.6.25)$$

Отдельно следует изучить случай кратного корня. Для того, чтобы тело могло стать спутником Земли необходимо и достаточно, чтобы в дополнение к неравенству (5.6.25) выполнялись неравенства

$$0 \leq \frac{\mathbf{a}}{2} - \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2}{4} - \mathbf{b}} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{\mathbf{a}}{2} + \sqrt{\frac{\mathbf{a}^2}{4} - \mathbf{b}} \leq 1. \quad (5.6.26)$$

При выполнении неравенств (5.6.25) и (5.6.26) тело будет двигаться по эллиптической орбите вокруг Земли. Дальнейший анализ проводить не будем, ибо любознательный читатель сделает его самостоятельно, а всем остальным он неинтересен.

## 5.7 Абсолютно твердое тело

Ранее были рассмотрены описания движений материальных точек. При этом считалось, что движение материальной точки вполне определено, если известно ее положение, скорость и ускорение. В дальнейшем это описание будет дополнено введением спинорных движений тел-точек. Однако для этого необходимо изучить само понятие спинорного движения, которое значительно сложнее по своей природе, нежели обычное (трансляционное) движение, и которое значительно труднее для интуитивного восприятия. Поэтому начинать изучение спинорного движения лучше всего на примере интуитивно ясных моделей. Одной из таких моделей, имеющей к тому же большое практическое значение, является модель абсолютно твердого тела. Всякое макротело можно представлять себе как множество микрочастиц или материальных точек. Макротело может включать произвольное, вплоть до бесконечного, число материальных точек. Рассмотрим какую-либо точку  $A$  макротела. Ее движение характеризуется радиус-вектором

$$\mathbf{R}_A(t), \quad A — \text{любая точка тела.} \quad (5.7.1)$$

Здесь индекс  $A$  можно рассматривать как имя рассматриваемой точки. Будем считать, что этот индекс пробегает все имена точек, составляющих макротело. Таким образом, (5.7.1) это не один какой-то радиус-вектор, а множество различных радиусов-векторов, каждый из которых задает движение определяемой им точки. Иными словами, (5.7.1) содержит столько радиус-векторов, сколько частиц содержится в рассматриваемом макротеле. В общем случае этих частиц может быть бесконечно много. Поэтому описание движения макротела общего вида является бесконечномерным со всеми вытекающими отсюда последствиями. Ситуация резко упрощается, если рассматриваемое макротело можно считать абсолютно твердым.

**Определение.** *Макротело называется абсолютно твердым, если расстояния между точками этого тела остаются неизменными при всех возможных движениях макротела.*

Если условие, указанное в определении абсолютно твердого тела, не выполняется, то такое макротело называют деформируемым. Разумеется, абсолютно твердое тело это только модель, в реальности все тела являются деформируемыми. Однако во многих случаях деформируемостью тела можно пренебречь. Следует, впрочем, отметить, что важны не только свойства тела, но и условия рассматриваемой задачи. Одно и то же тело в одних задачах можно считать абсолютно твердым, а в других задачах подобная идеализация

неприемлема. Тем не менее, изучение идеализированных моделей является необходимым шагом на пути изучения механики. Принятое выше определение абсолютно твердого тела в математической форме можно выразить следующим образом

$$|\mathbf{R}_A(\mathbf{t}_1) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t}_1)| = |\mathbf{R}_A(\mathbf{t}_2) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t}_2)|, \quad (5.7.2)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  две любые произвольно выбранные точки абсолютно твердого тела, а  $\mathbf{t}_1$  и  $\mathbf{t}_2$  два произвольно выбранных момента времени. Из (5.7.2) немедленно вытекает, что не только длины векторов  $\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B$  остаются неизменными в процессе движения, но и углы между векторами  $\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A$  и  $\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_A$  не меняются при движениях абсолютно твердого тела

$$(\mathbf{R}_B(\mathbf{t}_1) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}_1)) \cdot (\mathbf{R}_C(\mathbf{t}_1) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}_1)) = (\mathbf{R}_B(\mathbf{t}_2) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}_2)) \cdot (\mathbf{R}_C(\mathbf{t}_2) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}_2)). \quad (5.7.3)$$

*Упражнение.* Используя только определение (5.7.2), доказать равенство (5.7.3).

Кажется поистине удивительным, как много нетривиальных следствий можно извлечь из единственного равенства (5.7.2). Этим следствиям будет посвящена вся оставшаяся часть данной главы. Прежде, чем обращаться к ним, нам необходимо ввести пару вспомогательных понятий-образов.

Начнем с понятия материального вектора. Это понятие не используется в литературе, но оно весьма полезно для правильного интуитивного восприятия движения абсолютно твердого тела. Выберем в теле две произвольные точки  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  и соединим их стрелкой. В результате получим направленный отрезок  $\overrightarrow{AB}$ , состоящий из точек тела и как бы замороженный в это тело. Объект  $\overrightarrow{AB}$  будем называть материальным вектором, который является чисто физическим объектом. При движениях тела этот материальный вектор перемещается вместе с телом, не претерпевая при этом никаких изменений относительно самого тела. Следует сразу же подчеркнуть, что ни в какие математические формулы материальный вектор сам по себе не входит и не может входить, ибо он определен в теле, а математика имеет дело с объектами, заданными в системе отсчета. Связь между материальными векторами и их математическими образами дается следующими отношениями.

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{R}_{AB}(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}). \quad (5.7.4)$$

Таким образом, истинный вектор  $\mathbf{R}_{AB}(\mathbf{t})$  — это как бы образ (отпечаток), оставляемый материальным вектором  $\overrightarrow{AB}$  в системе отсчета в данный момент времени. Если тело движется, то вместе с ним движется и материальный

вектор  $\overrightarrow{AB}$ . Последний не меняется, но его образ в системе отсчета меняется во времени. Именно посредством своего математического образа материальный вектор входит во все математические формулы. Заметим, что всякому материальному вектору можно поставить в соответствие его математический образ, т.е. истинный вектор. Но далеко не всякий истинный вектор имеет свой материальный прообраз. Например, не имеют материальных прообразов векторы силы, момента, скорости и многие другие. Тем не менее, необходимо научиться воспринимать и такие математические объекты на интуитивном уровне. Материальный вектор  $\overrightarrow{AB}$  описывает ориентацию твердого тела относительно системы отсчета только с точностью до поворота тела вокруг материальной оси, натянутой на вектор  $\overrightarrow{AB}$ . Чтобы устранить эту неоднозначность, введем в рассмотрение объект, который будем называть двойным материальным вектором и обозначаться  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ . Выберем в теле три произвольных точки  $A, B, C$ , не лежащих на одной прямой. Введем в рассмотрение пару материальных векторов. Эту пару можно ввести различными способами. Например, можно ввести пару  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ . Можно ввести пару  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ . Важно только, чтобы векторы  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$  или  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$  не лежали на одной прямой. В таком случае задание любой из этих пар векторов полностью фиксирует ориентацию тела в системе отсчета.

**Замечание.** Термин “ориентация” используется в данной книге в двух совершенно различных смыслах. Ранее речь шла об ориентации системы отсчета и различались правоориентированные и левоориентированные системы отсчета. Встречается также термин ориентированная кривая. Здесь термином “ориентация” обозначается выбор одной реализации из двух равноправных возможностей. Например, ориентировать кривую — это значит выбрать какое из двух направлений на кривой считать положительным. Использование термина “ориентация” в указанном смысле общепринято в математической литературе. В технике термин “ориентация” используется в другом смысле. Видимо, всем ясен смысл утверждений: ориентировать солнечные батареи спутника на Солнце или ориентировать зеркало телескопа. Здесь речь идет о фиксации угловых положений тела. Иными словами, задание ориентации тела в пространстве (системе отсчета) означает фиксацию угловых координат тела по отношению к выбранному трехграннику осей. При этом не имеет значения в каком месте системы отсчета находится тело. Выше, говоря о задании ориентации тела в системе отсчета, мы использовали термин “ориентация” именно в этом, втором смысле. В механике и математика, и техника тесно

переплетаются. Отсюда и возможность появления несогласованности в терминологии. К этому нужно быть готовым. К счастью, подобная несогласованность в терминах явление относительно редкое.

Вернемся к описанию задания ориентации тела. Мы видим, что задание одного материального вектора позволяет судить об ориентации тела только с точностью до поворота этого тела вокруг материального вектора. Чтобы избежать этой неоднозначности, в рассмотрение вводится еще один материальный вектор, не коллинеарный первому. Назначение этого второго вектора состоит в том, чтобы наблюдать поворот тела вокруг первого материального вектора. В данной книге в качестве пары материальных векторов выбрана пара  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ . Жесткая конструкция, состоящая из  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$ , будет называться двойным материальным вектором. Вектор  $\overrightarrow{AB}$  в этой паре будет называться базой двойного материального вектора. Вектор  $\overrightarrow{BC}$  в этой паре будет называться кросс-вектором двойного материального вектора. Читателю полезно немного поупражняться. Возьмите два одинаковых кубика и перенумеруйте их грани. Затем на одноименных гранях нарисуйте одинаковые двойные векторы. В результате вы получите два одинаковых экземпляра тела. Убедитесь, что если двойные векторы этих тел одинаково ориентированы в системе отсчета, то и сами тела одинаково ориентированы в системе отсчета, хотя они могут быть расположены в разных областях системы отсчета. Истинно говорят, что лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать (или прочитать). Двойной материальный вектор, сам по себе, конечно, не входит ни в одну математическую формулу и ни в одно уравнение. Формальные описания имеют дело с двойными векторами, заданными в системе отсчета. Например, в момент времени  $\mathbf{t}$  пара материальных векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  совпадает с парой истинных векторов  $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{t})$

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{a}(\mathbf{t}), \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{b}(\mathbf{t}).$$

Именно пара векторов  $(\mathbf{a}(\mathbf{t}), \mathbf{b}(\mathbf{t}))$ , заданная в системе отсчета, и является математическим образом двойного материального вектора.

## 5.8 Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

Чтобы знать движение какого-либо тела, необходимо знать движение всех составляющих его точек. В общем случае тело состоит из бесконечного набора точек. Поэтому описание его движения бесконечномерно, т.е. требует задания бесконечного набора векторов, зависящих от времени, определяющих поло-

жение всех точек тела. Для абсолютно твердого тела ситуация резко упрощается. Оказывается, что движение любой точки абсолютно твердого тела полностью определено, если известно движение какой-либо одной произвольно выбираемой точки  $Q$  тела, называемой полюсом, и, кроме того, определен некий тензор второго ранга  $\mathbf{P}(t)$ , называемый тензором поворота.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, движущееся относительно выбранной системы отсчета. Движение абсолютно твердого тела сводится к трансляциям и поворотам относительно системы отсчета. Выберем в теле какую-нибудь точку  $Q$ , которую будем называть полюсом. Выберем еще три точки в теле  $A_1, A_2, A_3$ . Выбор этих точек также произволен, но удовлетворяет ограничению: четыре точки  $Q, A_1, A_2, A_3$  не должны лежать в одной плоскости. Выбранным точкам отвечают три материальных вектора  $\overrightarrow{QA_1}, \overrightarrow{QA_2}$  и  $\overrightarrow{QA_3}$ , которые, очевидно, не лежат в одной плоскости. Выберем теперь какое-либо положение абсолютно твердого тела в системе отсчета. В этом положении полюс  $Q$  тела определяется заданием радиус-вектора  $\mathbf{r}_Q$ . Ориентация тела в выбранном положении определяется заданием тройки векторов  $\mathbf{e}_m$  такой, что

$$\overrightarrow{QA_1} \sim \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{QA_2} \sim \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{QA_3} \sim \mathbf{e}_3. \quad (5.8.1)$$

**Определение.** Положение тела, фиксируемое заданием четверки векторов

$$\mathbf{r}_Q, \quad \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3, \quad (5.8.2)$$

называется *отсчетным*.

Положение любой точки  $S$  тела в отсчетном положении определяется заданием радиус-вектора

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_Q + x_S^m \mathbf{e}_m \equiv \mathbf{r}_Q + \sum_{m=1}^3 x_S^m \mathbf{e}_m, \quad (5.8.3)$$

где числа  $x^1, x^2, x^3$  называются материальными координатами. Точке  $A$  отвечают координаты  $x^1 = 1, x^2 = x^3 = 0$ . Точке  $B$  соответствуют координаты  $x^1 = 0, x^2 = 1, x^3 = 0$ . Координаты  $x^m$  позволяют идентифицировать все точки абсолютно твердого тела. Отсчетное положение абсолютно твердого тела может выбираться совершенно произвольно, причем выбор диктуется соображениями удобства и зависит от рассматриваемой задачи. Заметим, что в реальном движении положение рассматриваемого тела может никогда не совпадать с отсчетным положением.

**Определение.** Положение тела в данный момент времени называется *актуальным*.

Чтобы задать актуальное положение тела, мы должны задать радиус-вектор  $\mathbf{R}_Q(\mathbf{t})$ , определяющий положение полюса  $Q$  в данный момент времени  $\mathbf{t}$ , а также тройку векторов  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  такую, что

$$\overrightarrow{QA} \sim \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{t}), \quad \overrightarrow{QB} \sim \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{t}), \quad \overrightarrow{QC} \sim \boldsymbol{\varepsilon}_3(\mathbf{t}).$$

Таким образом, актуальное положение определяется заданием четверки векторов

$$\mathbf{R}_Q(\mathbf{t}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{t}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{t}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3(\mathbf{t}). \quad (5.8.4)$$

Актуальное положение произвольной точки  $S$  находится по формуле

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \chi_S^m \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t}), \quad (5.8.5)$$

где  $\chi_S^m$  — координаты точки  $S$  тела относительно базиса  $\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t})$ .

**Теорема.** Актуальное положение произвольной точки  $S$  абсолютно твердого тела полностью определяется заданием радиус-вектора  $\mathbf{R}_Q(\mathbf{t})$  и собственн ортогонального тензора  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  и вычисляется с помощью уравнения

$$\mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q), \quad (5.8.6)$$

где тензор 2-го ранга  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  удовлетворяет условиям

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P} = +1 \quad (5.8.7)$$

и не зависит от выбора ни полюса  $Q$ , ни точки  $S$ , ни каких бы то ни было других точек абсолютно твердого тела.

**Доказательство.** Впервые изучающий предмет вполне может просто твердо запомнить уравнение (5.8.6). Оно носит название основного уравнения кинематики абсолютно твердого тела. Нижеследующее доказательство следует подробно изучить, а еще лучше самостоятельно проделать, только если в этом возникнет необходимость. При этом важно обратить внимание на два обстоятельства. Первое. Входящие в уравнение (5.8.6) радиус-вектор  $\mathbf{R}_Q(\mathbf{t})$  и тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  являются характеристиками движения абсолютно твердого тела и никак не связаны с какими бы то ни было особенностями строения абсолютно твердого тела. При этом вектор  $\mathbf{R}_Q(\mathbf{t})$  характеризует трансляционное движение абсолютно твердого тела, а тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  описывает спинорное (вращательное) движение абсолютно твердого тела. В дальнейшем тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  будем называть тензором поворота. Второе обстоятельство связано со способом введения в рассмотрение тензора поворота. Следует обратить внимание, что тензор поворота вводится не для удобства описания (можно вводить, а можно не вводить), но вводится по необходимости. Иными словами, повороты

тела описываются тензором второго ранга, и с этим ничего нельзя поделать. Поэтому трудно согласиться с распространенным мнением о том, что теоретическую механику для студентов младших курсов следует излагать без применения тензорного языка. Можно, конечно, замаскировать тензор поворота разного рода матрицами, но ничего, кроме внесения неясности в трактовки, это не меняет.

Обратимся непосредственно к доказательству уравнения (5.8.6). Для этого, по существу, нам нужно доказать всего два факта

$$1) \chi_S^m = X_S^m, \quad \forall S; \quad 2) \boldsymbol{\varepsilon}_m(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{e}_m. \quad (5.8.8)$$

Оба эти факта совершенно очевидны, т.е. видны очам. Поэтому речь идет о сугубо формальном доказательстве, опирающемся исключительно на определение абсолютно твердого тела (5.7.2). Векторы

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{r}_{A_m} - \mathbf{r}_Q \quad (5.8.9)$$

линейно независимы и потому могут быть использованы в качестве базиса. Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу  $\mathbf{g}_{mn}$  и обратную к ней матрицу  $\mathbf{g}^{mn}$

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{g}_{mn}, \quad \mathbf{g}_{mn} \mathbf{g}^{np} = \delta_m^p. \quad (5.8.10)$$

Зная матрицу  $\mathbf{g}^{np}$  — см. главу 3, можно ввести в рассмотрение векторы взаимного базиса  $\mathbf{e}^m$

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{g}^{mn} \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{g}_{mn} \mathbf{e}^m. \quad (5.8.11)$$

Из равенства (5.8.3) следует

$$\chi_S^m = (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q) \cdot \mathbf{e}^m \quad (5.8.12)$$

Все сказанное относилось к отсчетному положению тела. Обратимся к рассмотрению актуального положения тела. Подчеркнем, что и актуальное, и отсчетное положение тела рассматривается в одной и той же системе отсчета. Векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(t) = \mathbf{R}_{A_m}(t) - \mathbf{R}_Q(t) \quad (5.8.13)$$

удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_n &= (\mathbf{R}_{A_m} - \mathbf{R}_Q) \cdot (\mathbf{R}_{A_n} - \mathbf{R}_Q) = \\ &= (\mathbf{r}_{A_m} - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q) = (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n) = \mathbf{g}_{mn}, \end{aligned} \quad (5.8.14)$$



которые немедленно следуют из (5.7.3). Поэтому для взаимных векторов  $\boldsymbol{\varepsilon}^m$  имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m(\mathbf{t}) = g^{mn}\boldsymbol{\varepsilon}_n(\mathbf{t}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n = g_{nm}\boldsymbol{\varepsilon}^m. \quad (5.8.15)$$

Из равенства (5.8.5) следует

$$\begin{aligned} \chi_S^m &= (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m = g^{mn}(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_n = \\ &= g^{mn}(\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q) \cdot (\mathbf{R}_{A_n} - \mathbf{R}_Q) = g^{mn}(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q) = \\ &= g^{mn}(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q) \cdot \mathbf{e}_n = (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q) \cdot \mathbf{e}^m = \chi_S^m. \end{aligned} \quad (5.8.16)$$

Здесь также использовано равенство (5.7.3). Теперь равенство (5.8.5) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_S(\mathbf{t}) &= \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \chi_S^m \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t})[\mathbf{e}^m \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q)] = \\ &= \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + (\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{e}^m) \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q). \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q), \quad (5.8.17)$$

где

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{e}^m = g^{mn}(\mathbf{R}_{A_m} - \mathbf{R}_Q) \otimes (\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q). \quad (5.8.18)$$

Итак, мы ввели в рассмотрение некий объект  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , являющийся совокупностью диад. Подобные объекты называются тензорами второго ранга, т.е.  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  есть тензор второго ранга. Равенство (5.8.17) внешне совпадает с основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела (5.8.6). Однако в теореме утверждается нечто большее, нежели в (5.8.17). Во-первых, тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  должен удовлетворять условиям (5.8.7). Во-вторых, тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  не должен зависеть от выбора точек  $Q, A_1, A_2, A_3$  в абсолютно твердом теле. Ни первого, ни второго мы еще не доказали. Докажем сначала, что  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , определенный равенством (5.8.18), есть ортогональный тензор. Заметим, что

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \mathbf{e}^m = g^{mn}\boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\varepsilon}^n \otimes \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\varepsilon}^m \otimes \mathbf{e}_m. \quad (5.8.19)$$

Здесь мы использовали равенства (5.8.11) и (5.8.15). Итак,

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \mathbf{e}^m = \boldsymbol{\varepsilon}^m \otimes \mathbf{e}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{e}^m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{e}_m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^m. \quad (5.8.20)$$

Операция транспонирования тензора и другие простейшие операции с тензорами второго ранга описаны в начальных параграфах главы 4. Напомним

также, что для любой тройки линейно независимых векторов  $\mathbf{a}_m$  справедливо тождество

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}^m \otimes \mathbf{a}_m = \mathbf{a}_m \otimes \mathbf{a}^m,$$

где  $\mathbf{E}$  - единичный тензор 2-го ранга. Следовательно, для троек  $\mathbf{e}_m$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  имеем

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}^m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m.$$

Теперь находим

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = (\boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \mathbf{e}^m) \cdot (\mathbf{e}_n \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^n) = \delta_n^m \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^n = \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} = (\mathbf{e}^m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_m) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^n \otimes \mathbf{e}_n) = \delta_m^n \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_n = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{E}.$$

Здесь вновь использованы соглашения главы 4. Итак, тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  удовлетворяет условиям

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}. \quad (5.8.21)$$

Тензоры, удовлетворяющие этому условию, называются ортогональными. Кроме того, из (5.8.21) следует

$$\det(\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top) = \det \mathbf{P} \det \mathbf{P}^\top = (\det \mathbf{P})^2 = \det \mathbf{E} = 1. \quad (5.8.22)$$

Понятие определителя тензора второго ранга введено в главе 4. Из последнего равенства вытекает, что

$$\det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \pm 1. \quad (5.8.23)$$

Дифференцируя равенство (5.8.22) по времени, получаем

$$2 \det \mathbf{P} (\det \mathbf{P})' = 0 \Rightarrow (\det \mathbf{P})' = 0 \Rightarrow \det \mathbf{P} = \text{const}. \quad (5.8.24)$$

Заметим, что из (5.8.23) это равенство не вытекает, поскольку, в принципе, знаки в (5.8.23) могут меняться с течением времени. Однако (5.8.24) показывает, что это невозможно. Если в какой-то момент времени  $\det \mathbf{P} = +1$ , то он будет равен этому значению во все другие моменты времени. Тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  согласно (5.8.20) зависит от отсчетного и актуального положений тела. Рассмотрим его в момент времени  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}$ , когда актуальное и отсчетное положения совпадали. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{e}_m, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{e}^m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = 1.$$

Следовательно, при всех  $\mathbf{t}$  имеем

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = +1. \quad (5.8.25)$$

Ортогональные тензоры, определитель которых равен  $(+1)$ , называются собственно ортогональными тензорами или тензорами поворота. Итак, тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , входящий в (5.8.17), является тензором поворота, что и утверждается в условии теоремы. Осталось доказать, что этот тензор не зависит от выбора точек  $Q, A_1, A_2, A_3$  в абсолютно твердом теле. Вообще говоря, из определения тензора поворота (5.8.18) это обстоятельство формально не очевидно, поскольку точки  $Q$  и  $A_m$  в нем присутствуют в явном виде. Покажем теперь, что  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  не зависит от выбора точек  $A_k$  теле. С этой целью, выберем какие-либо другие три точки  $A_{k'}$  такие, что точки  $Q, A_{k'}$  не лежат в одной плоскости. В точности повторяя все рассуждения, ведущие к представлению (5.8.19), вводим в рассмотрение тензор

$$\mathbf{P}'(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \otimes \mathbf{e}^{m'} = \boldsymbol{\varepsilon}^{m'} \otimes \mathbf{e}_{m'}, \quad (5.8.26)$$

где

$$\overrightarrow{QA_{m'}} \sim \mathbf{e}_{m'} = \mathbf{r}_{A_{m'}} - \mathbf{r}_Q$$

в отсчетном положении и

$$\overrightarrow{QA_{m'}} \sim \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} = \mathbf{R}_{A_{m'}} - \mathbf{R}_Q$$

в актуальном положении. Векторы  $\mathbf{e}_{m'}$  можно разложить по векторам  $\mathbf{e}_m$

$$\mathbf{e}_{m'} = h_{m'}^n \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}^{m'} = h_n^{m'} \mathbf{e}^n, \quad h_{m'}^n = \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}^n, \quad h_n^{m'} = \mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_n, \quad (5.8.27)$$

где матрицы  $h_{m'}^n$  и  $h_n^{m'}$  взаимно обратны

$$h_{m'}^n h_n^{p'} = \delta_p^m, \quad h_m^n h_n^{p'} = \delta_m^p.$$

Здесь мы повторяем то, что было сказано в главе 3 при обсуждении замен базисных векторов.

**Упражнение.** Доказать формулы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{m'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_n = h_n^{m'} &\quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{m'} = h_n^{m'} \boldsymbol{\varepsilon}^n, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^n = \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}^n = h_{m'}^n &\quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} = h_{m'}^n \boldsymbol{\varepsilon}_n. \end{aligned} \quad (5.8.28)$$

Перепишем теперь (5.8.26) в следующем виде

$$\mathbf{P}' = \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \otimes \mathbf{e}^{m'} = h_n^{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \otimes \mathbf{e}^n = \boldsymbol{\varepsilon}_n \otimes \mathbf{e}^n = \mathbf{P}.$$

Здесь мы сначала воспользовались (5.8.27), а затем формулами (5.8.28). При этом мы убедились, что тензор  $\mathbf{P}$ , построенный с помощью точек  $Q, A_k$  совпадает с тензором  $\mathbf{P}'$ , построенном с помощью точек  $Q, A_{k'}$ . Поскольку выбор точек  $A_k$  и  $A_{m'}$  был совершенно произволен, то тензор  $\mathbf{P}$  не зависит от

выбора этих точек. Осталось показать, что тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  не зависит от полюса  $\mathbf{Q}$  в теле. С этой целью, запишем равенство (5.8.17) для двух точек  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) &= \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q), \\ \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) &= \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_Q).\end{aligned}\quad (5.8.29)$$

Здесь тензор  $\mathbf{P}$  может, в принципе, зависеть от выбора полюса  $\mathbf{Q}$ , что и указано в (5.8.29) явно. Вычитая в (5.8.29) из первого равенства второе, получаем

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B).$$

Левая часть этого равенства не зависит от точки  $\mathbf{Q}$ . Следовательно, и правая часть не зависит от точки  $\mathbf{Q}$ . А это означает, что тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  не зависит от выбора точки  $\mathbf{Q}$ . Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела полностью доказана. Доказательство, хотя и длинное, но вполне элементарное. После того, как читатель убедился, что теорема и в самом деле правильна, он вполне может забыть о доказательстве, и наслаждаться основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела (5.8.6), извлекая из него массу полезных результатов.

Обсудим некоторые свойства движения абсолютно твердого тела, вытекающие из основной теоремы кинематики (5.8.6). Тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  описывает поворот тела из отсчетной ориентации в актуальную. Если актуальная ориентация тела совпадает с отсчетной (независимо от положения тела в системе отсчета), то тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  равен единичному тензору  $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ . Если при движении тела его ориентация в пространстве не меняется, то  $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}$  при всех  $\mathbf{t}$ . При таком движении из (5.8.6) следует, что все точки тела испытывают одинаковые смещения, определяемые вектором перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_S(\mathbf{t}) - \mathbf{r}_S = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) - \mathbf{r}_Q.\quad (5.8.30)$$

Напомним, что  $\mathbf{S}$  — это любая интересующая нас точка тела. Движение (5.8.30) называют плоско-параллельным. В этом движении все точки тела движутся по сколь-угодно сложным траекториям, но все эти траектории одинаковы и могут быть совмещены друг с другом жестким переносом. При этом все материальные отрезки в теле перемещаются оставаясь параллельными своим положениям во все моменты времени. Иными словами, ориентация тела при плоско-параллельном движении не меняется. Плоско-параллельное движение есть типичный пример трансляционного движения в чистом виде, когда все точки твердого тела меняют свои положения в пространстве.

Полное движение тела, как показывает (5.8.6), есть композиция трансляционного и спинорного движений. При последнем полюс  $Q$  тела не меняет своего положения в пространстве, но само тело поворачивается вокруг полюса, меняя свою ориентацию в пространстве. Все сказанное является совершенно очевидным. Тем не менее, основная теорема кинематики не является ни самоочевидной, ни тривиальной. В самом деле, совсем не очевидно, что этот способ описания не зависит от выбора полюса в теле. Могло бы случиться и так, что при изменении выбора полюса у нас менялся бы и поворот (т.е. менялся бы тензор поворота) тела вокруг этого нового полюса. Однако теорема утверждает, что это не так, а тензор поворота не зависит от выбора полюса.

## 5.9 Тензор поворота и вектор поворота

Тензор поворота является характеристикой спинорного (вращательного) движения тела и может изучаться как вполне самостоятельный объект, не связанный с абсолютно твердым телом. Сейчас читателю полезно вернуться к параграфам главы 4, посвященным ортогональным тензорам и тензорам поворота, и внимательно их изучить. Ниже будут сообщены сведения, дополняющие изложенное в главе 4. В параграфе 4.9 была доказана теорема Эйлера, утверждающая, что любой поворот может быть реализован как поворот вокруг оси, натянутой на некоторый единичный вектор  $\mathbf{m}$ , на некоторый угол  $\theta$ . В математической форме теорема Эйлера выражалась так

$$Q(\theta \mathbf{m}) = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (5.9.1)$$

Стандартное для данной книги обозначение  $Q(\theta \mathbf{m})$  означает поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $\mathbf{m}$ . Обратим внимание, что ось поворота не привязана к каким-либо точкам тела или точкам системы отсчета. Фактически осью поворота является любая прямая из семейства параллельных прямых, натянутых на вектор  $\mathbf{m}$ . На первый взгляд это обстоятельство кажется странным. В самом деле, если, например, цилиндр вращается вокруг собственной оси, то именно ось цилиндра и хотелось бы считать осью поворота, а вовсе не произвольную прямую, параллельную оси цилиндра. Тем не менее, определение оси поворота, как семейства параллельных прямых, не только оправдано, но и необходимо. Представим себе, что мы рассматриваем вращение цилиндра в двух инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга. В одной системе отсчета ось цилиндра покоится и ее естественно назвать осью поворота. В другой же системе отсчета ось цилиндра движется и в разные моменты времени совпадает с разными прямыми в системе отсчета. Поворот

цилиндра абсолютен и одинаков во всех инерциальных системах отсчета, поэтому и характеристики поворота не должны зависеть от выбора инерциальной системы. Если читатель тщательно обдумает все сказанное, то он поймет, что только данное выше определение оси поворота является допустимым и совместимым с принципом независимости от выбора системы отсчета.

Достоинством представления (5.9.1) является то, что оно содержит все необходимые величины в явном виде. Использование тензора поворота начнем с двух простых иллюстраций.

**Задача.** Повернуть вектор  $\mathbf{d} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — ортонормированная тройка векторов, вокруг вектора  $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$  на угол  $\pi/3$ .

**Решение.** В данной задаче нам задана ось поворота — это прямая, натянутая на единичный вектор

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}). \quad (5.9.2)$$

Дан угол поворота

$$\theta = \pi/3, \quad \cos \theta = 1/2, \quad \sin \theta = \sqrt{3}/2. \quad (5.9.3)$$

Следовательно, тензор поворота (5.9.1) имеет вид

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{\pi}{3} \mathbf{m}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{E} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{m} \times \mathbf{E}.$$

Тензор поворота потому и имеет такое название, что при действии на вектор  $\mathbf{d}$  он поворачивает его заданным образом. Таким образом, повернутый вектор  $\mathbf{d}$  — это вектор  $\mathbf{d}'$ , определяемый формулой

$$\mathbf{d}' = \mathbf{Q} \left(\frac{\pi}{3} \mathbf{m}\right) \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{m}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{m} \times \mathbf{d}. \quad (5.9.4)$$

Если читатель забыл правила умножения тензора на вектор, то ему следует вновь проглядеть начало главы 4. Вычисляя скалярное и векторное произведения, входящие в (5.9.4), получаем

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{d} = 2a + 3b + 4c,$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{d} = (4b - 3c)\mathbf{i} + (2c - 4a)\mathbf{j} + (3a - 2b)\mathbf{k}.$$

Подставляя эти выражения в (5.9.4) и собирая члены при одинаковых ортах, получаем

$$\mathbf{d}' = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k},$$

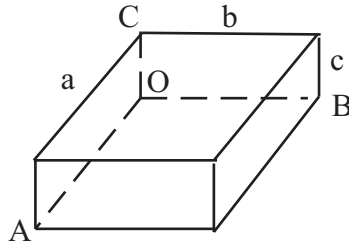


Рис. 5.3: Твердое тело в виде параллелепипеда

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{2} \left[ a + \frac{2}{\sqrt{29}} (2a + 3b + 4c) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} (4b - 3c), \\ d_2 &= \frac{1}{2} \left[ b + \frac{3}{\sqrt{29}} (2a + 3b + 4c) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} (2c - 4a), \\ d_3 &= \frac{1}{2} \left[ c + \frac{4}{\sqrt{29}} (2a + 3b + 4c) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} (3a - 2b). \end{aligned}$$

Как видим, операция поворота вектора  $\mathbf{d}$  привела к относительно громоздким выражениям для координат повернутого вектора, но все вычисления при этом носили стандартный характер и легко проверяемы.

**Упражнение.** Построить решение данной задачи каким-либо способом (их много), не использующими тензора поворота. Сравнить оба подхода с точки зрения простоты и надежности получения конечного результата.

Конечно, полученные выше формулы для координат повернутого вектора  $\mathbf{d}'$  не радуют глаз. Поэтому важно запомнить, что, как правило, при решении задач вычисления, проведенные выше, делать не нужно, а работать следует с повернутым вектором в виде  $\mathbf{d}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}$ . При этом можно будет пользоваться тождествами типа

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

и рядом других тождеств. После некоторой тренировки читатель сможет в полной мере оценить все достоинства использования тензора поворота.

Рассмотрим небольшую иллюстрацию к основной теореме кинематики абсолютно твердого тела.

**Задача.** Дано твердое тело в виде параллелепипеда со сторонами  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  — см. Рис.5.3

Будем считать, что в отсчетном положении вершина  $O$  параллелепипеда совпадает с началом декартовой системы координат с осями  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

Введем материальные векторы  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ , совпадающие с ребрами параллелепипеда. Тогда в отсчетном положении имеем

$$\overrightarrow{OA} \sim a\mathbf{i}, \quad \overrightarrow{OB} \sim b\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{OC} \sim c\mathbf{k}. \quad (5.9.5)$$

Вершину  $O$  параллелепипеда примем в качестве полюса. Тогда в отсчетном положении радиус-вектор  $\mathbf{r}_O = \mathbf{0}$ . Положение любой точки  $D$  параллелепипеда в отсчетном положении определяется заданием радиус-вектора

$$\mathbf{r}_D = x a \mathbf{i} + y b \mathbf{j} + z c \mathbf{k}, \quad 0 \leq x, y, z \leq 1, \quad (5.9.6)$$

где числа  $x, y, z$  могут быть названы координатами точки  $D$ . Пусть теперь параллелепипед перемещается относительно системы отсчета так, что его вершина  $O$  занимает положение

$$\mathbf{R}_O = l \mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1,$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор. Кроме того параллелепипед поворачивается вокруг оси, натянутой на единичный вектор  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \quad (5.9.7)$$

на угол  $\theta = \pi/6$ ,  $\sin \theta = 1/2$ ,  $\cos \theta = \sqrt{3}/2$ . При таком движении материальные векторы  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$ , (ребра параллелепипеда) займут следующие положения в системе отсчета

$$\overrightarrow{OA} \sim \mathbf{R}_A - \mathbf{R}_O, \quad \overrightarrow{OB} \sim \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_O, \quad \overrightarrow{OC} \sim \mathbf{R}_C - \mathbf{R}_O. \quad (5.9.8)$$

Векторы, стоящие в правых частях этих отношений, могут быть вычислены по основному уравнению кинематики (5.8.6)

$$\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_O = \mathbf{Q} \cdot a \mathbf{i}, \quad \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_O = \mathbf{Q} \cdot b \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_C - \mathbf{R}_O = \mathbf{Q} \cdot c \mathbf{k}, \quad (5.9.9)$$

где тензор поворота определен выражением

$$\mathbf{Q} \left( \frac{\pi}{6} \mathbf{m} \right) = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{\sqrt{3}}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{E}, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}). \quad (5.9.10)$$

Если мы хотим найти положение любой точки параллелепипеда, то мы должны воспользоваться уравнением (5.8.6) и вектором (5.9.6). В результате получим

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{R}_O + \mathbf{Q} \left( \frac{\pi}{6} \mathbf{m} \right) \cdot (\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_O)$$



или с учетом значений векторов  $\mathbf{R}_O$ ,  $\mathbf{r}_D$ ,  $\mathbf{r}_O$

$$\mathbf{R}_D = l\mathbf{e} + \mathbf{Q} \left( \frac{\pi}{6} \mathbf{m} \right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}). \quad (5.9.11)$$

При  $x = 1, y = z = 0$  получаем положение вершины  $A$ , при  $y = 1, x = z = 0$  имеем положение вершины  $B$ , при  $z = 1, x = y = 0$  имеем положение вершины  $C$ . Координаты  $x = y = z = 1/2$  в (5.9.11) определяют положение центральной точки параллелепипеда. Если желательнo выписать (5.9.11) в развернутом виде, то достаточно вычислить векторы

$$\mathbf{i}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{j}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{k}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \mathbf{i} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathbf{j} + \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \mathbf{k}.$$

Теперь (5.9.11) принимает вид

$$\mathbf{R}_D = l\mathbf{e} + x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}' + z\mathbf{k}'.$$

Впервые изучающему предмет настоятельно рекомендуется повторить все вычисления самостоятельно и убедиться в правильности своего понимания всех используемых формул.

## 5.10 Вектор поворота

Тензор поворота, записанный в форме (5.9.1), не имеет каких-либо ограничений и может применяться всегда, т.е. описание поворотов с помощью тензора второго ранга является наиболее общим. Тем не менее, интуитивным образом поворота является не тензор второго ранга, а некий спин-вектор. В самом деле, чтобы задать поворот в его, так сказать, чистом виде, мы должны задать ось в пространстве (системе отсчета), направление и величину поворота — см. Рис.3.3. Спин-вектору по стандартным правилам можно сопоставить аксиальный вектор, называемый вектором поворота. Итак, вектором поворота уместно назвать вектор

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}, \quad |\mathbf{m}| = 1, \quad (5.10.1)$$

где единичный вектор  $\mathbf{m}$  определяет ось поворота, а величина  $\theta$  задает угол поворота в радианах. Если поворот происходит против часовой стрелки при

взгляде с конца  $\mathbf{m}$ , то в правоориентированной системе отсчета  $\theta > 0$ , но в левоориентированной системе отсчета этот же поворот считается отрицательным  $\theta < 0$ . Поскольку поворот выражает реальное явление, то наличие двух способов его описания возможно только при условии, что эти два способа связаны взаимно однозначным образом. Иными словами, тензор поворота может быть выражен через вектор поворота и, наоборот, вектор поворота может быть вычислен по тензору поворота. Проще всего решается первая задача. В самом деле, принимая во внимание определение вектора поворота (5.10.1), выражение (5.9.1) переписываем в следующем эквивалентном виде

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + \cos \theta \mathbf{E}. \quad (5.10.2)$$

Хотя это выражение эквивалентно (5.9.1), тем не менее оно выявляет одно важное свойство. А именно, в (5.9.1)  $\theta$  есть угол поворота и может иметь любой знак. Аналогично может восприниматься величина  $\theta$  в (5.10.2). Однако здесь она может восприниматься иначе. Заметим, что справедливы тождества

$$|\boldsymbol{\theta}| = |\theta|, \quad \cos \theta = \cos |\theta| = \cos |\boldsymbol{\theta}|, \quad \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\sin |\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|}. \quad (5.10.3)$$

Поэтому в (5.10.2) величину  $\theta$  можно рассматривать как модуль вектора поворота  $\boldsymbol{\theta}$ . Отсюда следует, что тензор поворота действительно выражается только через вектор поворота без дополнительных разговоров, необходимых при использовании (5.9.1), где  $\theta$  нельзя отождествить с модулем вектора поворота. Выражение (5.10.2) удобно записать в другой форме. Введем в рассмотрение кососимметричный тензор

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}, \quad (5.10.4)$$

который будем называть логарифмическим тензором поворота. Смысл этого названия будет понятен немного ниже. Кроме того, имеем тождество

$$\mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{E}. \quad (5.10.5)$$

Используя (5.10.4) и (5.10.5), выражение (5.10.2) переписываем в виде

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R}^2. \quad (5.10.6)$$

Здесь тензор поворота представлен как функция логарифмического тензора поворота, причем  $\theta$  можно выразить через норму тензора  $\mathbf{R}$ . Действительно, нормой тензора  $\mathbf{A}$  называется величина

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^T} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)}.$$

Для тензора  $\mathbf{R}$  имеем

$$\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T)} = \sqrt{-\text{tr} \mathbf{R}^2} = \sqrt{2\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} = \sqrt{2}\boldsymbol{\theta}.$$

Кстати, обратим внимание, что норма тензора поворота

$$\|\mathbf{Q}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T)} = \sqrt{\text{tr} \mathbf{E}} = \sqrt{3}$$

всегда одинакова и никак не характеризует величину поворота. Выражение (5.10.6) в приложениях часто бывает удобнее, нежели (5.9.1) или (5.10.2). Оно любопытно еще как пример тензорной функции тензорного аргумента. Функцию (5.10.6) можно записать в другом и, в некотором смысле, более знакомом виде. Хорошо известна скалярная функция скалярного аргумента

$$\exp x \equiv e^x, \quad e = 2,71828. \quad (5.10.7)$$

Скалярную экспоненту  $\exp x$  можно определять разными способами. Один из наиболее распространенных способов состоит в том, чтобы определить ее с помощью ряда

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k. \quad (5.10.8)$$

Известно, что этот ряд имеет бесконечный радиус сходимости и абсолютно сходится вместе со всеми своими производными. Функцию (5.10.8) легко обобщить на тензорный случай. Пусть дан тензор второго ранга  $\mathbf{A}$ . Определим тензорную экспоненту

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k, \quad (5.10.9)$$

где степень тензора определяется как

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^4 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$$

и т.д. Ряд, стоящий в правой части (5.10.9), сходится для любых тензоров  $\mathbf{A}$  и называемый тензорной экспонентой. Спецификой тензорных рядов типа (5.10.9) является то, что они всегда могут быть сведены к виду

$$\exp \mathbf{A} = \varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{A} + \varphi_2 \mathbf{A}^2,$$

где  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — суть некие скалярные функции инвариантов тензора  $\mathbf{A}$ . Сказанное немедленно вытекает из последовательного исключения степеней тензора  $\mathbf{A}$  выше второй с помощью тождества Кэли-Гамильтона — см. главу

4. Несмотря на полное сходство определений (5.10.8) и (5.10.9), тензорная экспонента не похожа на свой скалярный аналог. Например, для скалярной экспоненты имеем

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y.$$

Это равенство справедливо только потому, что произведение скаляров коммутативно  $xy = yx$ . Для тензорных экспонент это свойство уже не справедливо

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} \neq \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}). \quad (5.10.10)$$

Это легко понять. Слева стоит произведение двух тензоров второго ранга  $\exp \mathbf{A}$  и  $\exp \mathbf{B}$ . Произведение тензоров в общем случае не коммутативно, т.е.

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} \neq \exp \mathbf{B} \cdot \exp \mathbf{A}.$$

В правой части (5.10.10) стоит тензор  $\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ , причем  $\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{B} + \mathbf{A})$ , т.к. сложение тензоров коммутативно. Поэтому в общем случае неравенство (5.10.10) обязано иметь место.

**Упражнение.** Используя определение тензорной экспоненты (5.10.9) доказать, что

$$a) \mathbf{A} \cdot (\exp \mathbf{A}) = (\exp \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A},$$

$$b) \exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}), \text{ если } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

**Теорема.** Тензор поворота является тензорной экспонентой от логарифмического тензора поворота

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \exp \mathbf{R} = \exp(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}). \quad (5.10.11)$$

**Доказательство.** По определению тензорной экспоненты (5.10.9) имеем

$$\exp \mathbf{R} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{R}^k = \mathbf{E} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \mathbf{R}^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \mathbf{R}^{2k}. \quad (5.10.12)$$

Здесь мы отдельно выделили суммирование по нечетным и четным степеням  $\mathbf{R}$ . Вычислим теперь степени  $\mathbf{R}^m$ , при этом учтем очевидное равенство

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}. \quad (5.10.13)$$

**Упражнение.** Доказать формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{2k+1} &= (-\boldsymbol{\theta}^2)^k \mathbf{R}, & k &= 0, 1, 2, \dots; \\ \mathbf{R}^{2k} &= (-\boldsymbol{\theta}^2)^{k-1} \mathbf{R}^2, & k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.10.14)$$

Подставляя (5.10.14) в (5.10.12), получаем

$$\exp \mathbf{R} = \mathbf{E} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^k}{(2k+1)!} \mathbf{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^{k-1}}{(2k)!} \mathbf{R}^2.$$

Учтем теперь известные разложения в степенные ряды

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^k}{(2k+1)!}, \quad \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^{k-1}}{(2k)!}. \quad (5.10.15)$$

Подставляя эти ряды в предыдущее равенство, получаем

$$\exp \mathbf{R} = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta^2}{\theta} \mathbf{R}^2. \quad (5.10.16)$$

Сравнивая (5.10.16) и (5.10.6), приходим к утверждению (5.10.11). Доказательство завершено.

Таким образом, поворот может быть описан как тензором второго ранга, так и вектором поворота. Если мы имеем вектор  $\mathbf{a}$ , то повернутый вектор  $\mathbf{a}'$  можно представить в эквивалентных формах

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q}(\theta) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a} + \frac{1 - \cos \theta^2}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}). \quad (5.10.17)$$

Во многих случаях удобнее пользоваться тензором поворота, но в дальнейшем мы убедимся, что имеются случаи, когда использование вектора поворота оказывается необходимым.

В заключение этого пункта отметим, что в литературе [46] иногда используется так называемый вектор конечного поворота Родрига

$$\boldsymbol{\psi} = 2 \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{m}. \quad (5.10.18)$$

Здесь смысл  $\boldsymbol{\theta}$  и  $\mathbf{m}$  тот же, что и в (5.10.1).

**Упражнение.** Доказать представление

$$\left(1 + \frac{\psi^2}{4}\right) \mathbf{P} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\psi} + \left(1 - \frac{\psi^2}{4}\right) \mathbf{E} + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{E}, \quad \psi^2 = 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (5.10.19)$$

## 5.11 Вектор малого поворота

В приложениях часто встречается ситуация, когда модуль поворота мал:

$$|\boldsymbol{\theta}| = |\theta| \ll 1. \quad (5.11.1)$$

В этих случаях говорят о малых поворотах. При этом норма логарифмического тензора поворота также мала

$$\|\mathbf{R}\|^2 = \text{tr } \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^\top = -\text{tr } \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = 2\theta^2 \ll 1. \quad (5.11.2)$$

В разложении (5.10.12) можно отбросить все степени  $\mathbf{R}$  выше первой. Тогда получим

$$\mathbf{Q} \simeq \mathbf{E} + \mathbf{R} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}. \quad (5.11.3)$$

Тензор (5.11.3) называется тензором малого поворота. Повернутый вектор  $\mathbf{a}'$  в таком случае вычисляется по простой формуле

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \simeq \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}. \quad (5.11.4)$$

В некоторых случаях удобно квадратичное приближение

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{R}^2 + o(\theta^3). \quad (5.11.5)$$

Повернутый вектор находится по формуле

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}). \quad (5.11.6)$$

Эта формула может с успехом применяться для малых, но не бесконечно малых поворотов. Для малых поворотов вектор конечного поворота (5.10.18) отличается от вектора поворота (5.10.1) только членами третьего порядка малости

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta} + o(\theta^3).$$

## 5.12 Неоднозначность суждений о векторе поворота

У вектора поворота удивительная и странная судьба. В литературе многие годы сосуществуют противоположные точки на это понятие. Например, в книге А.И.Лурье [46] вводится вектор поворота Родрига и с ним работают как с обычным вектором. Существование вектора поворота устанавливается теоремой Эйлера, которая доказывается во всех учебниках по механике. Тем не менее, существует и другая точка зрения, согласно которой вектор поворота, будучи направленным отрезком, не является настоящим вектором. Это мнение воспроизводится во многих работах, например в относительно недавней статье [89]. Эту точку зрения мы воспроизведем по популярному учебнику физики [32] — см. стр. 39 и 47–48. Далее следует цитата.

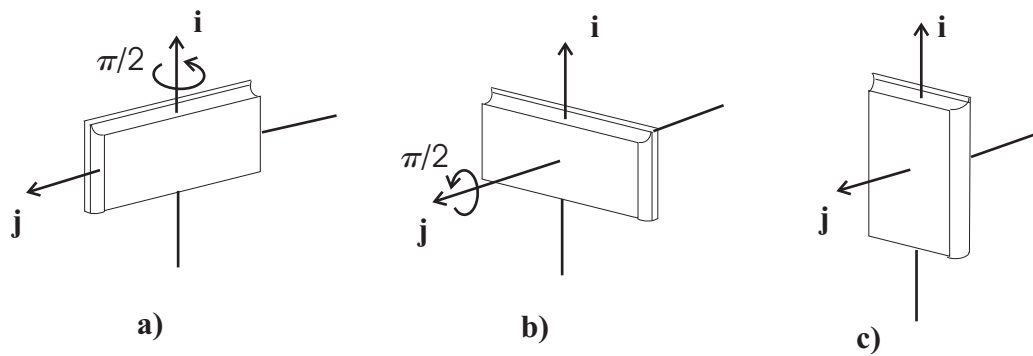


Рис. 5.4: Первая последовательность поворотов

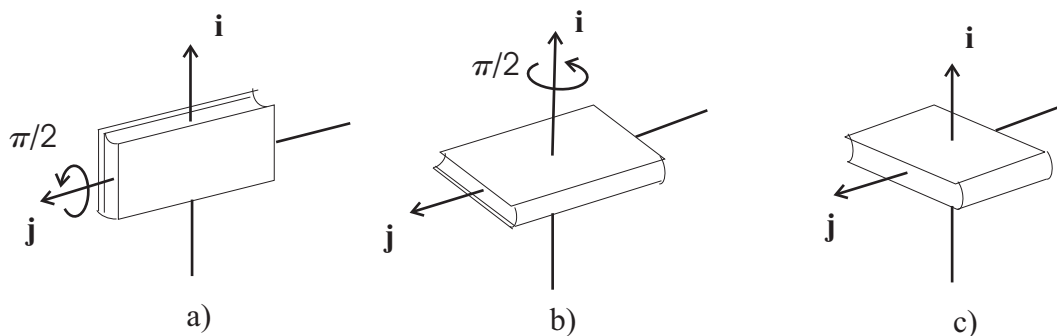


Рис. 5.5: Вторая последовательность поворотов

“Вектором называется количественная характеристика, имеющая не только числовое значение, но и направление (стр.39). ... Не все величины, которые имеют числовое значение и направление, обязательно являются векторами. Например, повороту твердого тела вокруг определенной оси, неподвижной в пространстве, можно приписать как числовое значение (величина угла поворота), так и направление (направление оси). Однако два таких поворота не складываются согласно закону сложения векторов, если только углы поворота не являются бесконечно малыми. Это легко видеть, когда две оси перпендикулярны друг к другу, а оба угла поворота равны по  $\pi/2$  каждый. Представим себе какой-либо предмет, например книгу (Рис.5.4а).

Поворот (1) переводит ее в положение, показанное на Рис.5.4b, а последующий поворот (2) вокруг другой оси — в положение на Рис.5.4c. Однако если вернуть предмет в первоначальное положение и сначала произвести поворот (2), а затем поворот (1), то в конце концов этот предмет окажется в положении, показанном на Рис.5.5c.

Ориентация предмета на Рис.5.5c отличается от его ориентации на Рис.5.4c. Очевидно, что для этих поворотов не выполняется закон ком-

*мутативности сложения. Повороты на конечный угол нельзя выразить векторами, хотя их можно охарактеризовать числовым значением и направлением.*”

Интересно, что же все-таки называется вектором? Из приведенной цитаты автор этого так и не понял. Приведенное выше доказательство, разумеется, является ошибочным, и читателю будет полезно выявить конкретную ошибку (вообще-то их несколько) в данном рассуждении. В качестве наводящего соображения рассмотрим сходное, но более простое рассуждение. Пусть векторы  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  суть векторы смещения материальной точки. Тогда суммарное смещение точки есть вектор  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ . Здесь все нормально: сумма двух смещений есть результирующее смещение. Вспомним теперь понятие орта вектора  $\mathbf{a}$ :  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ . Легко видеть, что  $\hat{\mathbf{u}} \neq \hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2$ . Отсюда заключаем, что орт вектора не является вектором, поскольку сумма ортов исходных векторов не является ортом результирующего вектора. Надеемся, что читатель не согласится с таким выводом. Основную ошибку читатель обнаружит, когда познакомится с формулами сложения векторов поворота (5.14.15) – (5.14.16).

## 5.13 Плоские движения твердого тела

Представление тензора поворота в форме (5.9.1) оказывается удобным в тех случаях, когда ось поворота, т.е. вектор  $\mathbf{m}$ , заранее известна и фиксирована во времени. Этот простейший случай имеет место, например, при плоских движениях твердого тела. Плоским называют такое движение тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, ортогональных заданному единичному вектору  $\mathbf{m}$ . При этом очевидно, что тело может поворачиваться только вокруг вектора  $\mathbf{m}$ . Рассмотрим два простых примера применения основной теоремы кинематики твердого тела.

**Пример 1: плоское движение твердого стержня.** Рассмотрим стержень длины  $l$ , совершающий движение, при котором стержень во все моменты времени остается в одной и той же плоскости. Последнюю совместим с плоскостью чертежа — рис.5.6. В качестве отсчетного положения стержня выбираем положение, при котором стержень расположен горизонтально. Материальный вектор  $\overrightarrow{AB}$  совпадает с вектором  $\mathbf{e}$ . Фактически стержень, возможно, никогда не занимал этого положения, но повороты и перемещения стержня будем отсчитывать именно от этого положения, занимаемого стержнем в условный момент времени  $\tau$ . В этот момент времени положение конца стержня  $A$  задается вектором положения  $\mathbf{r}_A$ . Тогда в этот же момент времени положение любой точки  $C$ , отстоящей от  $A$  на расстояние  $s_C$  определяется



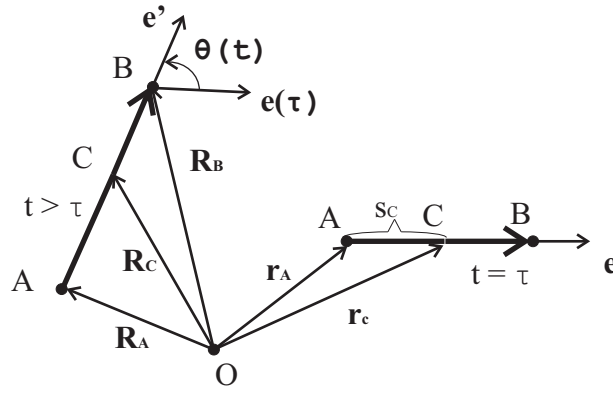


Рис. 5.6: Плоское движение стержня

вектором

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + s_c \mathbf{e}, \quad 0 \leq s_c \leq l, \quad |\mathbf{e}| = 1. \quad (5.13.1)$$

При изменении параметра  $s_c$  от 0 до  $l$  конец вектора  $\mathbf{r}_C$  пробегает все точки стержня. В актуальный (текущий) момент времени  $t$  положение точки  $A$  стержня задается вектором  $\mathbf{R}_A(t)$ . Материальный вектор  $\overrightarrow{AB}$  в этот момент времени совпадает с вектором  $\mathbf{e}'(t)$ . Поэтому для любой точки  $C$  в момент времени  $t$  можем записать

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + s_c \mathbf{e}'(t), \quad |\mathbf{e}'(t)| = 1, \quad (5.13.2)$$

где значение  $s_c$  то же самое, что и в (5.13.1). Векторы  $\mathbf{e}'(t)$  и  $\mathbf{e}(\tau)$  имеют одинаковые длины, но у них разные направления. Напомним, что два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  считаются равными, если у них одинаковые длины и одинаковые направления. Так что вектор  $\mathbf{e}'(t)$ , изображенный на Рис.3.10.1 исходящим из точки  $B$ , и вектор  $\mathbf{e}(\tau)$ , изображенный на Рис.3.10.1 исходящим из точки  $A$  — это один и тот же вектор: вектор — это класс эквивалентности, т.е. множество всех векторов, имеющих одинаковую длину и одинаковое направление в системе отсчета. В этом смысле вектор положения, например,  $\mathbf{R}_A$  не является настоящим вектором, поэтому его часто и называют радиус-вектором. В механике радиус-вектор и некоторые, схожие с ним по смыслу, другие векторы положения являются исключениями, которым присвоены наименования векторов, но настоящими (свободными) векторами они не являются. Чтобы совместить векторы  $\mathbf{e}'(t)$  и  $\mathbf{e}(\tau)$  достаточно повернуть вектор  $\mathbf{e}'(t)$  на угол  $\theta(t)$  вокруг единичного вектора  $\mathbf{m}$ , ортогонального плоскости чертежа и направленного так, чтобы поворот вокруг  $\mathbf{m}$  происходил против часовой стрелки, если смотреть с конца  $\mathbf{m}$ . Как мы уже знаем, поворот любого вектора осуществляется тензором поворота  $\mathbf{P}(t)$ . При плоском движении тела тензор

поворота написать очень легко, так как заранее известен вектор, вокруг которого происходят повороты. В данном случае это вектор  $\mathbf{m}$ , а тензор поворота  $\mathbf{P}(t)$  имеет вид (5.9.1), причем угол поворота  $\theta(t)$  показан на Рис.3.10.1. Итак, для вектора  $\mathbf{e}'(t)$  имеем формулу

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{e}(\tau), \quad \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}. \quad (5.13.3)$$

С учетом (5.13.1), выражению (5.13.2) можно придать вид

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + \mathbf{P}(t) \cdot [s_C \mathbf{e}]. \quad (5.13.4)$$

Исключая отсюда  $s_C \mathbf{e}$  с помощью (5.13.1) окончательно получаем

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A), \quad (5.13.5)$$

т.е. пришли к основному уравнению кинематики абсолютно твердого тела, причем точка  $A$  играет роль полюса. Можно представить себе, что точка  $C$  перемещается по стержню так, что ее координата  $s_C$  по времени является заданной (или подлежащей определению) функцией времени  $s_C = f(t)$ . Тогда вместо (5.13.4) мы должны написать

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + \mathbf{P}(t) \cdot [f(t) \mathbf{e}]. \quad (5.13.6)$$

Например, если точка  $C$  бежит от одного конца стержня до другого и обратно по гармоническому закону, то для  $f(t)$  имеем

$$f(t) = \frac{l}{2}[1 - \cos(\omega t + \alpha)], \quad 0 \leq f(t) \leq l. \quad (5.13.7)$$

Подставляя в (5.13.6) представление тензора поворота (5.9.1) и производя скалярное умножение, получаем

$$\mathbf{R}_C(t) = \mathbf{R}_A(t) + f(t)[\cos \theta(t) \mathbf{e} + \sin \theta(t) \mathbf{m} \times \mathbf{e}]. \quad (5.13.8)$$

Выражением (5.13.8) задается наиболее общий вид движения, которое может совершать точка  $C$ , движущаяся по стержню по закону  $f(t)$  и одновременно движущаяся вместе со стержнем в плоскости, ортогональной вектору  $\mathbf{m}$ .

**Пример 2: Движение точки по вращающемуся вокруг своей оси диску.** В качестве полюса выбираем центр диска  $O$ . Тогда, согласно основной теореме кинематики, имеем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{r}_A = \mathbf{R}_A(\tau), \quad \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}, \quad (5.13.9)$$

где  $\mathbf{r}_A$  определяет точку  $A$  диска в отсчетном положении. Положение точки  $A$  на диске можно определить заданием полярных координат  $\rho, \varphi$

$$\mathbf{r}_A = \rho(\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}). \quad (5.13.10)$$

Тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  в данном случае задается выражением

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = (1 - \cos \theta(\mathbf{t})) \mathbf{m}(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{m}(\mathbf{t}) + \cos \theta(\mathbf{t}) \mathbf{E} + \sin \theta(\mathbf{t}) \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (5.13.11)$$

где  $\mathbf{m} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ ,  $\theta(\mathbf{t})$  — угол поворота диска. Подставляя эти выражения в (5.13.9) и производя скалярные произведения, получаем

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \rho[\cos(\varphi + \theta(\mathbf{t})) \mathbf{i} + \sin(\varphi + \theta(\mathbf{t})) \mathbf{j}]. \quad (5.13.12)$$

Здесь  $\rho$  и  $\varphi$  полярные координаты точки  $A$ , которая пока что считается неподвижной относительно диска, так что  $\rho$  и  $\varphi$  в (5.13.12) не зависят от времени. Если точка  $A$  движется относительно диска, то закон ее движения можно задать в виде

$$\rho = f(\mathbf{t}), \quad \varphi = \psi(\mathbf{t}). \quad (5.13.13)$$

Тогда для движущейся относительно диска точки  $A$  получаем выражение

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t})[\cos(\psi(\mathbf{t}) + \theta(\mathbf{t}))\mathbf{i} + \sin(\psi(\mathbf{t}) + \theta(\mathbf{t})) \mathbf{j}]. \quad (5.13.14)$$

Здесь величины (5.13.13) задают движение точки  $A$  относительно диска, функция  $\theta(\mathbf{t})$  задает закон вращения самого диска. Вектор положения  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$  определяет положение точки  $A$  относительно выбранной системы отсчета.

## 5.14 Теорема о представлении тензора поворота

Читатель уже обратил внимание на резкое повышение сложности описания движения при переходе от трансляционных движений, определяемых заданием вектора положения  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$ , к спинорным движениям, определяемым заданием тензора поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ . В самом деле, для трансляционных движений достаточно задать всего три вектора

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{W}(\mathbf{t}) = \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{t}),$$

причем любые два из этих векторов легко находятся по третьему. Например, если задан вектор скорости, то ускорение находится однократным дифференцированием, а вектор положения — однократным интегрированием. Что касается описания самого трансляционного движения, то здесь и говорить

особо не о чем — все определяется вектором  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ . При описании спинорных движений, определяемых собственно ортогональным тензором, ситуация намного сложнее. Тензор поворота допускает множество различных представлений. В настоящее время описание поворотов еще не стало каноническим. В разных задачах используют различные описания, в том числе и такие, которые в данной книге мы даже не упоминаем. А, например, в современной физике спинорные движения вообще не рассматриваются, хотя некоторые характеристики спинорного движения все-таки вводятся без упоминания самого спинорного движения. Между тем, спинорные движения играют значительно более важную роль в Природе, нежели трансляционные движения. К обсуждению этих вопросов мы еще неоднократно будем возвращаться в дальнейшем. Здесь же мы обращаем внимание читателя на то, что истратив немало места на описание поворотов, мы еще даже не ввели понятие угловой скорости. Более того, сейчас мы хотим еще продолжить изучение тензора поворота и доказать одну важную для приложений теорему, частные случаи которой известны уже много лет, но общая формулировка была предложена только в [108].

Согласно теореме Эйлера (5.9.1), любой поворот может быть осуществлен, как один поворот вокруг некоторой оси на некоторый угол. Казалось бы, теорема Эйлера полностью решает все проблемы. Но это не так. Фактически теорема Эйлера указывает эффективный способ решения только таких задач, в которых ось поворота фиксирована во времени. Однако в большинстве случаев ось поворота меняется во времени, что резко усложняет все построения.

**Теорема.** *Любой поворот  $\mathbf{Q}(\theta)$  может быть осуществлен в виде композиции поворотов вокруг произвольно выбираемых и фиксированных во времени осей  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$*

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\psi(\mathbf{t}) \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta(\mathbf{t}) \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(\mathbf{t}) \mathbf{n}), \quad \mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} / |\mathbf{m} \times \mathbf{n}|, \quad (5.14.1)$$

где углы  $\psi(\mathbf{t})$ ,  $\vartheta(\mathbf{t})$  и  $\varphi(\mathbf{t})$  называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Если  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ , то углы  $\psi$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$  называются углами Эйлера, а вектор  $\mathbf{e}$  выбирается произвольно, но должен быть ортогонален  $\mathbf{n}$ .

**Доказательство.** Выделим в теле двойной материальный вектор  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ , описанный в параграфе 5.7. Пусть  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  суть два произвольно выбранных единичных вектора. Натянем на них плоскость (Рис.5.7), которую совместим с плоскостью рисунка.

Пусть в отсчетном положении база  $\overrightarrow{AB}$  двойного материального векто-

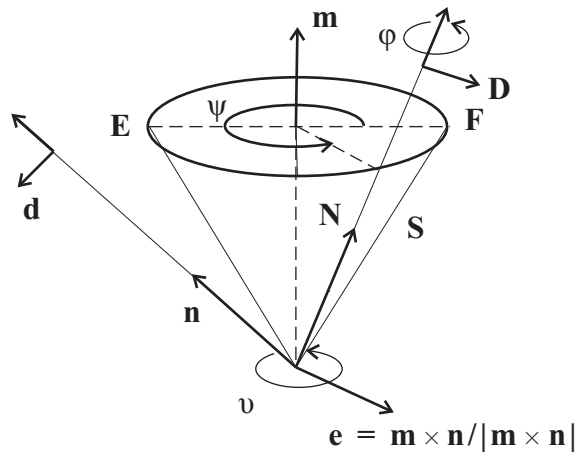


Рис. 5.7: Представление тензора поворота

ра  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  совпадает с вектором  $\mathbf{n}$ . Это не налагает никаких ограничений на выбор  $\mathbf{n}$ , поскольку выбор двойного материального вектора в теле также произволен. Тогда в отсчетном положении имеем

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{n}, \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{d}. \quad (5.14.2)$$

Пусть в актуальном положении, т.е. в положении в данный момент времени  $\mathbf{t}$ , имеем соответствие

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{N}, \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{D}.$$

Напомним, что двойные векторы  $(\mathbf{n}, \mathbf{d})$  и  $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$ , заданные, разумеется, в системе отсчета, образуют жесткие конструкции и могут быть совмещены друг с другом поворотом.

Итак, выполняем следующие шаги. Первый. Выбираем векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  — см. Рис.5.7. Второй шаг можно выполнить двумя способами. Во-первых, можно выбрать по желанию отсчетное положение тела, а затем выбрать в теле двойной материальный вектор  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  так, чтобы его база  $\overrightarrow{AB}$  совпала бы с вектором  $\mathbf{n}$ . При втором способе мы сначала произвольно выбираем в теле двойной материальный вектор, а затем выбираем отсчетное положение тела так, чтобы база двойного вектора совпала бы с вектором  $\mathbf{n}$ . Ниже мы придерживаемся первого способа выполнения второго шага. Третий шаг. В актуальном положении тела отмечаем двойной вектор  $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$ , с которым совпадает двойной материальный вектор  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  в момент времени  $\mathbf{t}$ . Наша задача состоит в том, чтобы поворотами вокруг векторов  $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{e}$  двойной материальный вектор  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  из положения, отмеченного двойным вектором  $(\mathbf{n}, \mathbf{d})$ , перевести тело в положение, где

двойной материальный вектор  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  совпадает с двойным вектором  $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$ . Для этого предварительно мысленно образуем коническую поверхность  $S$ , получающуюся вращением вектора  $\mathbf{N}$  вокруг вектора  $\mathbf{m}$  — см. Рис.5.7.

Искомый поворот тела осуществляем в виде последовательности трех поворотов. Первый поворот производим на угол  $\vartheta$  вокруг вектора  $\mathbf{e}$  так, чтобы база  $\overrightarrow{AB}$  оказалась на конической поверхности  $S$ . Этот поворот задается тензором

$$\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) = (1 - \cos \vartheta) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \vartheta \mathbf{E} + \sin \vartheta \mathbf{e} \times \mathbf{E}. \quad (5.14.3)$$

В результате  $\overrightarrow{AB}$  совпадет с вектором

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.14.4)$$

Второй поворот производим вокруг вектора  $\mathbf{m}$ . В результате вектор  $\overrightarrow{AB}$  скользит по конической поверхности  $S$ . После поворота на угол  $\psi$  вектор  $\overrightarrow{AB}$  совпадает с вектором  $\mathbf{N}$ . Этот поворот определяется тензором

$$\mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) = (1 - \cos \psi) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \psi \mathbf{E} + \sin \psi \mathbf{m} \times \mathbf{E}. \quad (5.14.5)$$

При этом имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.14.6)$$

После поворота (5.14.5) база  $\overrightarrow{AB}$  двойного материального вектора  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  совпадает с вектором  $\mathbf{N}$ . Однако кросс-вектор  $\overrightarrow{BC}$  при этом не будет совпадать с кросс-вектором  $\mathbf{D}$ . Поэтому необходим еще один поворот вокруг прямой, натянутой на  $\mathbf{N}$ . Этот поворот дается тензором

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{N}) = (1 - \cos \varphi) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{N} \times \mathbf{E}. \quad (5.14.7)$$

Таким образом, в результате трех поворотов (5.14.3), (5.14.5) и (5.14.7) двойной материальный вектор  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  из отсчетного положения  $(\mathbf{n}, \mathbf{d})$  перешел в актуальное положение  $(\mathbf{N}, \mathbf{D})$ . Тем самым и само тело перешло из отсчетного положения в актуальное. Полный тензор поворота есть композиция описанных выше трех поворотов

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{N}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}). \quad (5.14.8)$$

По существу теорема доказана, но представление (5.14.8) пока еще не совпадает с утверждением теоремы (5.14.1). Осталось вспомнить тождество — см. главу 4.

$$\mathbf{Q}(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{S}^T, \quad \forall \mathbf{S} : \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}. \quad (5.14.9)$$

Согласно (5.14.6) имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}). \quad (5.14.10)$$

Используя тождество (5.14.9) и равенство (5.14.10), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{N}) &= \mathbf{Q}(\mathbf{S} \cdot \varphi \mathbf{n}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{S}^T = \\ &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m}). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (5.14.8), приходим к утверждению теоремы (5.14.1). Доказательство завершено.

В литературе известно много частных случаев представления (5.14.1). Например, при  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$  и векторе  $\mathbf{e}$  таким, что  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = 0$ , получаем известное представление, введенное еще Л.Эйлером в других, разумеется, терминах и представлениях. Тензор поворота, представленный через углы Эйлера, имеет вид

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}). \quad (5.14.11)$$

Здесь сначала производится поворот вокруг  $\mathbf{m}$  на угол собственного вращения  $\varphi$ , затем вокруг  $\mathbf{e}$  на угол нутации  $\vartheta$  и, наконец, поворот вокруг того же вектора  $\mathbf{m}$  на угол прецессии  $\psi$ . В классическом представлении поворота через углы Эйлера повороты производятся в обратном порядке. Для того, чтобы получить это представление, достаточно умножить (5.14.11) справа на единичный тензор, записанный в следующем виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}).$$

Умножая (5.14.11) на этот тензор справа и перегруппировывая сомножители, получаем

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}'') \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}') \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}), \quad (5.14.12)$$

где использовано тождество (5.14.9) и

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}. \quad (5.14.13)$$

Как видим, в классическом представлении повороты производятся в обратном порядке и вокруг вращающихся векторов  $\mathbf{e}'$  и  $\mathbf{m}''$ . В дальнейшем мы убедимся, что представление (5.14.11) значительно удобнее, нежели (5.14.12). В заключение этого пункта предлагаем следующее

**Упражнение.** Пусть дана композиция поворотов

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\varphi) \cdot \mathbf{Q}(\psi). \quad (5.14.14)$$

Показать, что вектор суммарного поворота  $\boldsymbol{\theta}$  связан с векторами составляющих поворотов  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\boldsymbol{\psi}$  следующими формулами

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \varphi + \cos \psi + \cos \varphi \cos \psi - 2 \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\varphi \psi} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} + \frac{(1 - \cos \varphi)}{\varphi^2} \cdot \frac{(1 - \cos \psi)}{\psi^2} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi})^2, \quad (5.14.15)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} = & \left( \frac{\sin \varphi}{\varphi} (1 + \cos \psi) - \frac{(1 - \cos \varphi) \sin \psi}{\varphi^2 \psi} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) \boldsymbol{\varphi} \\ & + \left( \frac{\sin \psi}{\psi} (1 + \cos \varphi) - \frac{(1 - \cos \psi) \sin \varphi}{\psi^2 \varphi} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) \boldsymbol{\psi} \\ & + \left( \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\varphi \psi} - \frac{(1 - \cos \varphi) (1 - \cos \psi)}{\varphi^2 \psi^2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\psi}, \quad (5.14.16) \end{aligned}$$

где  $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$ ,  $\varphi = |\boldsymbol{\varphi}|$ ,  $\psi = |\boldsymbol{\psi}|$ . Напомним, что

$$\theta = |\boldsymbol{\theta}| < \pi, \quad \varphi = |\boldsymbol{\varphi}| < \pi, \quad \psi = |\boldsymbol{\psi}| < \pi. \quad (5.14.17)$$

В принципе, от ограничения (5.14.17) можно отказаться, если повороты происходят вокруг совпадающих и фиксированных во времени осей.

## 5.15 Дифференцирование тензоров второго ранга

Выше был введен в рассмотрение тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ . Поворот тела происходит во времени, поэтому время является аргументом тензора поворота. Чтобы ввести такое понятие, как угловая скорость, которая характеризует скорость изменения ориентации тела, необходимо научиться дифференцировать тензоры второго ранга по времени. Как сейчас будет показано эта операция сводится к операции дифференцирования вектора.

Известно, что любой тензор второго ранга  $\mathbf{A}(\mathbf{t})$  может рассматриваться как совокупность конечного числа диад

$$\mathbf{A}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{b}(\mathbf{t}) + \mathbf{c}(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{d}(\mathbf{t}) + \dots$$

Операция дифференцирования линейна. Поэтому имеем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(\mathbf{t}) = \frac{d}{dt} [\mathbf{a}(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{b}(\mathbf{t})] + \frac{d}{dt} [\mathbf{c}(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{d}(\mathbf{t})] + \dots$$



Чтобы продифференцировать тензор оказывается достаточным научиться дифференцировать диады. По определению производной имеем

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{a}(t + \Delta t) \otimes \mathbf{b}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)]. \quad (5.15.1)$$

Правую часть (5.15.1) следует записать иначе, прибавив и отняв одну и ту же диаду

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t + \Delta t) \otimes \mathbf{b}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t) \\ = [\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)] \otimes \mathbf{b}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t) \otimes [\mathbf{b}(t + \Delta t) - \mathbf{b}(t)]. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (5.15.1) и вспоминая определение производной от вектора, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{ [\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)] \otimes \mathbf{b}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t) \otimes [\mathbf{b}(t + \Delta t) - \mathbf{b}(t)] \} \\ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} \otimes \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{b}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t) \otimes \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{b}(t + \Delta t) - \mathbf{b}(t)}{\Delta t} \\ = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \otimes \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \otimes \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

Итак, дифференцирование диады осуществляется с помощью обычного правила Лейбница дифференцирования произведения

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \otimes \mathbf{b}(t)] = \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \otimes \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \otimes \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}. \quad (5.15.2)$$

В дальнейшем, как и раньше, дифференцирование по времени будем обозначать точкой

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{a}} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{c}} \otimes \mathbf{d} + \mathbf{c} \otimes \dot{\mathbf{d}} + \dots \quad (5.15.3)$$

**Упражнение.** Доказать, что для любых тензоров второго ранга справедлива формула

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}}, \quad (\mathbf{A}^\top) \cdot = (\dot{\mathbf{A}})^\top. \quad (5.15.4)$$

Итак, правила дифференцирования тензоров второго ранга вполне стандартны. Единственное, о чем следует помнить, это о некоммутативности произведения тензоров.

## 5.16 Угловая скорость

При описании трансляционных движений понятие скорости не вызывает никаких затруднений. Оно кажется совершенно естественным с интуитивной точки зрения, а его формальное определение представляется единственно возможным. Запишем это определение в удобной для нас форме. С этой целью введем в рассмотрение вектор перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  материальной точки. Пусть какое-то положение точки, определяемое вектором  $\mathbf{r}$ , выбрано в качестве отсчетного. Тогда вектор перемещения  $\mathbf{u}$  вводится следующим образом

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{t}).$$

Вектор скорости определяется как производная

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}). \quad (5.16.1)$$

Видимо, можно придумать и какие-то другие определения скорости трансляционного движения, но непонятно зачем и кому это нужно.

К сожалению, аналогичная ясность и определенность для скорости спинорного движения (угловой скорости) вряд ли достижима. На первый взгляд, это кажется странным. В самом деле, относительно полным аналогом вектора перемещений при трансляционных движениях является вектор поворота при спинорных движениях. Поэтому естественным кажется следующее определение вектора угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega}_* = \frac{d\theta(\mathbf{t})}{dt} = \dot{\theta}(\mathbf{t}). \quad (5.16.2)$$

Это определение формально аналогично определению (5.16.1). Определение (5.16.2) вполне может быть выбрано в качестве основного для угловой скорости. Тем не менее, в литературе оно практически не используется. Ниже будет показано, что не менее естественными являются следующие два определения угловой скорости

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{P}(\mathbf{t}) \quad (5.16.3)$$

или

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}). \quad (5.16.4)$$

Важно подчеркнуть, что все три вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_*$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}$ , будучи различными, вполне допустимы в качестве исходных определений угловой скорости, ибо между этими векторами существует взаимно однозначное соответствие. В общем случае, как будет показано ниже, это соответствие выражается относительно сложными формулами. Однако в простейшем случае,

когда повороты происходят вокруг фиксированной во времени оси, все три вектора угловой скорости тождественно совпадают. Впрочем, и в общем случае существует способ описания поворотов, когда все три вектора угловой скорости совпадают, но совпадают только в данный момент времени, оставаясь различными в любой другой момент времени. При таком описании в качестве отсчетного положения выбирается актуальное положение тела, т.е. тензор поворота строится в следующем виде

$$\mathbf{P}(\tau - \mathbf{t}), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}. \quad (5.16.5)$$

Определение угловой скорости (5.16.2) заменяется на следующее

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \left[ \frac{d\boldsymbol{\theta}(\tau - \mathbf{t})}{d\tau} \right]_{\tau=\mathbf{t}}, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0}, \quad (5.16.6)$$

где  $\mathbf{t}$  есть данный момент времени, который считается фиксированным, а  $\tau$  есть текущее время. Аналогично можно изменить определения (5.16.3) и (5.16.4). При этом все три определения приведут к одному и тому же вектору угловой скорости. По существу, именно определение (5.16.6) принимается, но никогда не используется при решении задач, в большинстве книг и учебников. В данной книге описание поворотов в форме (5.16.5) и определение угловой скорости (5.16.6) использоваться не будут и потому их дальнейшее обсуждение опускается. Заметим только, что получаемые ниже результаты будут отличаться от приводимых в учебниках, но их можно согласовывать посредством перехода к описанию (5.16.5), (5.16.6).

После этих предварительных замечаний, показывающих, что природа понятия угловой скорости является не столь простой, обратимся к последовательному описанию угловой скорости и других характеристик спиного движения.

## 5.17 Тензор спина и вектор угловой скорости

Основной теоремой кинематики введен в рассмотрение тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , посредством которого выражался поворот твердого тела. Вместе с тем, тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  не привязан ни к каким точкам твердого тела и живет вполне самостоятельной жизнью, Поэтому и изучать его можно совершенно независимо от твердого тела. По определению, тензор поворота удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}. \quad (5.17.1)$$

Продифференцируем тождество (5.17.1) по времени и учтем, что  $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ , т.к.  $\mathbf{E}$  — постоянный тензор.

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{P}}^T(\mathbf{t}) = \mathbf{0}. \quad (5.17.2)$$

Введем в рассмотрение тензор  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \quad (5.17.3)$$

и назовем его левым тензором спина или просто тензором спина. Подставляя (5.17.3) в (5.17.2), получаем

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) + \mathbf{S}^T(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^T(\mathbf{t}) = -\mathbf{S}(\mathbf{t}). \quad (5.17.4)$$

Итак, тензор спина  $\mathbf{S}(\mathbf{t})$  кососимметричен. Известно, что любой кососимметричный тензор, в том числе и тензор спина  $\mathbf{S}(\mathbf{t})$ , может быть представлен через сопутствующий вектор  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$  — см. главу 4

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}). \quad (5.17.5)$$

**Определение:** вектор  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ , сопутствующий левому тензору спина  $\mathbf{S}(\mathbf{t})$ , называется левым вектором угловой скорости, отвечающей тензору поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ .

В дальнейшем будет опускаться эпитет “левый” у вектора угловой скорости, т.е. термины левый вектор угловой скорости и вектор угловой скорости будут рассматриваться как равнозначные. Кроме того, вместо вектора угловой скорости, отвечающей тензору поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , мы будем говорить : угловая скорость поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ . Наряду с тензором  $\mathbf{S}(\mathbf{t})$  можно ввести еще один кососимметричный тензор

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}). \quad (5.17.6)$$

**Упражнение.** Доказать, что  $\mathbf{S}_r(\mathbf{t})$  кососимметричен.

**Определение:** тензор  $\mathbf{S}_r(\mathbf{t})$  называется правым тензором спина. Здесь уже эпитет “правый” должен всегда присутствовать.

**Упражнение.** Показать, что левый и правый тензоры спина связаны соотношением

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}_r(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}). \quad (5.17.7)$$

**Определение:** вектор  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})$ , сопутствующий правому тензору спина, называется правым вектором угловой скорости, отвечающим тензору поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ .

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}). \quad (5.17.8)$$

Между левым и правым векторами угловой скорости существует простая связь, которая немедленно устанавливается с помощью весьма полезного тождества

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^\top = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}, \quad (5.17.9)$$

верного для любого вектора  $\mathbf{a}$  и любого тензора поворота  $\mathbf{P}$ . Подставляя (5.17.5) и (5.17.8) в (5.17.7), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^\top = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}). \quad (5.17.10)$$

Поскольку в отсчетный момент времени  $\mathbf{t} = \tau$  тензор поворота  $\mathbf{P}(\tau)$  обращается в единичный, то из (5.17.10) получаем совпадение  $\boldsymbol{\omega}(\tau)$  и  $\boldsymbol{\Omega}(\tau)$ :

$$\boldsymbol{\omega}(\tau) = \mathbf{P}^\top(\tau) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\tau) = \boldsymbol{\Omega}(\tau). \quad (5.17.11)$$

При решении задач динамики твердого тела используются оба вектора угловой скорости. Уравнение (5.17.5) удобнее и нагляднее записать в другой форме

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{P}(\mathbf{t}). \quad (5.17.12)$$

Это уравнение носит левого уравнения Пуассона или (в литературе) уравнения Пуассона. Аналогично может быть переписано и уравнение (5.17.8)

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{t}) = \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{P}}^\top(\mathbf{t}) = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}). \quad (5.17.13)$$

Это уравнение будем называть правым уравнением Пуассона, хотя оно в литературе часто называется просто уравнением Пуассона.

**Упражнение.** Показать, что из левого уравнения Пуассона однозначно вытекает правое уравнение Пуассона, т.е. (5.17.12) и (5.17.13) — суть разные записи одного и того же уравнения.

**Определение:** прямая, натянутая на левый вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ , называется левой осью вращения, а прямая, натянутая на правый вектор угловой скорости, называется правой осью вращения.

Левая ось вращения обычно называется просто осью вращения. Ни в коем случае нельзя смешивать понятия ось вращения и ось поворота. В общем (типичном) случае эти оси различаются. Иными словами, поворот тела и его вращение происходят вокруг разных осей. Кроме того, следует помнить, что ни ось вращения, ни ось поворота, ни векторы угловых скоростей не связаны ни с какими точками тела. Иными словами, векторы угловых скоростей — суть свободные аксиальные векторы. Ось вращения — это множество параллельных прямых, любая из которых может с равным правом называться осью

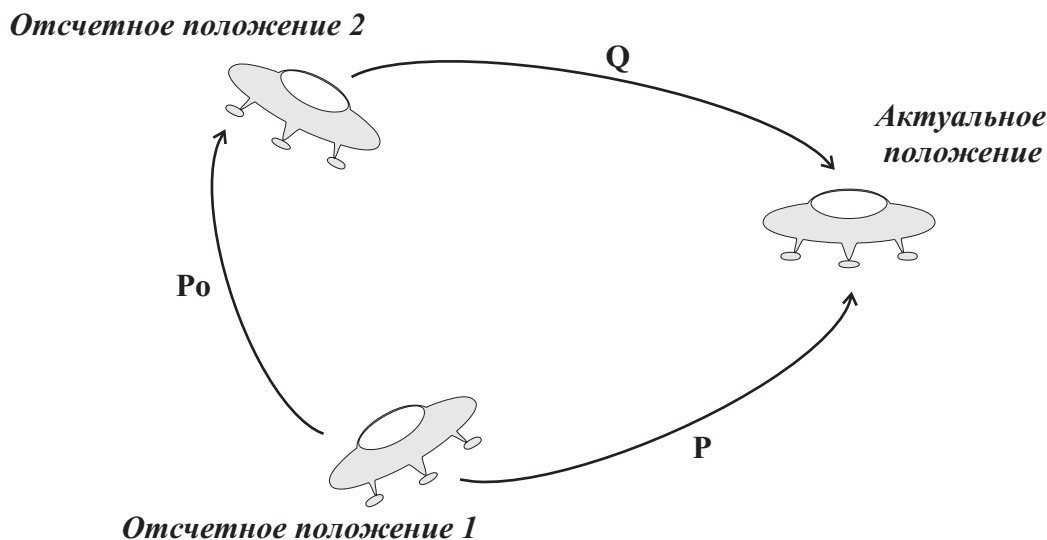


Рис. 5.8: Замена отсчетного положения

вращения. Если тензор поворота задан, то левый и правый векторы угловой скорости вычисляются относительно легко с помощью уравнений (5.17.12) и (5.17.13), которые, вспомнив определение векторного инварианта тензора 2-го ранга, удобнее переписать в другой форме

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) \right)_{\times}; \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = -\frac{1}{2} \left( \mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) \right)_{\times}, \quad (5.17.14)$$

где  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  — см. главу 4. Таким образом, мы ввели понятия левой и правой угловых скоростей. Формально мы, конечно, имели право это сделать. Но пока что неясно насколько эти понятия удобны. Заранее это предвидеть трудно. Ситуация прояснится немного позднее, когда мы увидим, что именно эти величины будут естественным образом возникать в приложениях. Тем не менее, один вопрос мы должны выяснить немедленно. По определению тензора поворота, он зависит существенным образом от выбора отсчетного положения. Интуитивно ясно, что вектор угловой скорости, при любом разумном определении, не должен зависеть от выбора отсчетного положения. Если это не так, то такое определение нельзя признать удовлетворительным. Покажем, что левая угловая скорость действительно не зависит от выбора отсчетного положения, а правая угловая скорость, хотя и зависит от выбора отсчетного положения, но зависит весьма простым и понятным образом. Рассмотрим ситуацию, изображенную на Рис.5.8. Пусть тензор поворота  $\mathbf{P}$  поворачивает тело из отсчетного положения 1 в актуальное положение, а тензор  $\mathbf{Q}$  поворачивает тело из отсчетного положения 2 в то же самое актуальное положение. Очевидно, что поворот  $\mathbf{P}$  может быть осуществлен в виде

композиции поворота  $\mathbf{P}_0$ , переводящего тело из положения 1 в положение 2, и последующего поворота  $\mathbf{Q}$ . Иными словами, имеем представление

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}_0. \quad (5.17.15)$$

Используя определение левой угловой скорости (5.17.14), получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_P(\mathbf{t}) &= -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) \right)_{\times} = -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0^\top \cdot \mathbf{Q}^\top(\mathbf{t}) \right)_{\times} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q}^\top(\mathbf{t}) \right)_{\times} = \boldsymbol{\omega}_Q(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (5.17.16)$$

Для правой угловой скорости, согласно (5.17.11) и (5.17.16), имеем

$$\boldsymbol{\Omega}_P = \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega}_P = \mathbf{P}_0^\top \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \boldsymbol{\omega}_Q = \mathbf{P}_0^\top \cdot \boldsymbol{\Omega}_Q, \quad (5.17.17)$$

т.е. правая угловая скорость зависит от выбора отсчетного положения. Вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$  можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{t}) \mathbf{n}(\mathbf{t}), \quad |\mathbf{n}(\mathbf{t})| = 1, \quad (5.17.18)$$

где  $\omega(\mathbf{t})$  называется величиной угловой скорости. Если  $\omega(\mathbf{t}) > 0$ , то вращение происходит против движения часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{n}(\mathbf{t})$ . Иногда в качестве  $\mathbf{n}(\mathbf{t})$  выбирают направляющий вектор вектора  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$

$$\mathbf{n}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) / |\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})|. \quad (5.17.19)$$

В этом случае  $\omega(\mathbf{t})$  в (5.17.18) есть модуль вектора  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ . Представление (5.17.19) неудобно, т.к. в этом случае направляющий вектор  $\mathbf{n}(\mathbf{t})$  не является в общем случае непрерывной функцией времени: если модуль  $|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})|$  в какой-то момент времени обращается в нуль, а сам вектор  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$  при этом меняет направление на противоположное, то  $\mathbf{n}(\mathbf{t})$  скачком меняет свою величину, ибо  $|\mathbf{n}(\mathbf{t})| = 1$  при всех  $\mathbf{t}$ . В представлении (5.17.18) знак будет менять величина  $\omega(\mathbf{t})$ , а вектор  $\mathbf{n}(\mathbf{t})$  будет меняться непрерывно. Итак, по заданному тензору поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  векторы угловых скоростей вычисляются однозначно по формулам (5.17.14). Сложнее обстоит дело с обратной задачей: по заданному вектору  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$  восстановить тензор поворота.

## 5.18 Определение поворота по угловой скорости

Допустим, что нам известен левый (правый) вектор угловой скорости. Кроме того, нам известно, что в момент сравнения  $\mathbf{t} = \tau$  тензор поворота равен единичному тензору

$$\mathbf{P}(\mathbf{t})|_{\mathbf{t}=\tau} = \mathbf{E}. \quad (5.18.1)$$

Требуется найти тензор поворота, отвечающий вектору угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ . Запишем уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{P}(\mathbf{t}), \quad (\mathbf{t} > \tau), \quad (5.18.2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$  считается заданным. Тензорное уравнение (5.18.2) эквивалентно девяти скалярным уравнениям первого порядка для координат тензора  $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = P^{mn}(\mathbf{t})\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$ . Однако не все эти уравнения являются независимыми. В (5.18.2) только три уравнения оказываются независимыми. Поэтому система (5.18.2) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Несмотря на то, что сказанное отнюдь не самоочевидно для начинающего, мы не будем заниматься доказательствами немедленно, а изложим их немного позднее, когда познакомимся с различными представлениями тензора поворота. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений задача их интегрирования при определенных начальных условиях типа (5.18.1) называется задачей Коши. Таким образом, нахождение тензора поворота по заданной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$  при начальных условиях (5.18.2) – (5.18.1) сводится к решению задачи Коши. Эта задача Коши весьма специфична и исследована еще в прошлом веке Жаном Дарбу (1842-1917). Поэтому задачу интегрирования уравнения (5.18.2) при начальных условиях (5.18.1) в динамике твердого тела принято называть задачей Дарбу.

**Теорема:** решение задачи Дарбу, т.е. решение уравнения (5.18.2) при начальных условиях (5.18.1), существует, единственно и является тензором поворота.

**Доказательство.** Существование и единственность решения задачи Коши, частным случаем которой является задача Дарбу, доказывается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому нам необходимо доказать только последнее утверждение теоремы, т.е. доказать, что тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , являющийся решением уравнения (5.18.2) и удовлетворяющий условию (5.18.1), является тензором поворота. Пусть  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  удовлетворяет уравнению (5.18.2) и начальному условию (5.18.1). Составим тензор  $\mathbf{V}(\mathbf{t})$

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}), \quad \mathbf{V}(\tau) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{t} \geq \tau. \quad (5.18.3)$$

Здесь мы учли, что  $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}$  в силу (5.18.1). Продифференцируем (5.18.3) по времени и воспользуемся уравнением (5.18.2) для того, чтобы исключить производные от  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  по времени. Получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{P}}^T(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T + \\ & \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})^T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$



Таким образом, если тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  удовлетворяет уравнению (5.18.2), то тензор  $\mathbf{V}(\mathbf{t})$  должен удовлетворять уравнению

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{V}(\mathbf{t}) - \mathbf{V}(\mathbf{t}) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} > \tau. \quad (5.18.4)$$

Кроме того,  $\mathbf{V}(\mathbf{t})$  при  $\mathbf{t} = \tau$  должен удовлетворять условию (5.18.3):  $\mathbf{V}(\tau) = \mathbf{E}$ . Иными словами, для тензора  $\mathbf{V}(\mathbf{t})$  мы также получили задачу Коши, решение которой существует и единственно. На первый взгляд, решение задачи (5.18.4) и (5.18.3) ничуть не проще, чем решение задачи Дарбу (5.18.2) и (5.18.1). Но все дело в том, что решение задачи (5.18.4) и (5.18.3) легко угадать. Именно угадать, а не построить на основе каких-либо общих методов. Действительно, легко видеть, что тензор  $\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}$  удовлетворяет как уравнению (5.18.4), так и начальному условию (5.18.3). Поскольку решение задачи Коши (5.18.4) и (5.18.3) единственно, то тензор  $\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}$  является единственным решением задачи. Таким образом, получается, что тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  при всех  $\mathbf{t}$  удовлетворяет условию

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) = \mathbf{E},$$

из которого следует, что тензор  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  — ортогонален. Как следствие получаем отсюда условия

$$[\det \mathbf{P}(\mathbf{t})]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) [\det \mathbf{P}(\mathbf{t})]' = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \text{const.}$$

Поскольку при  $\mathbf{t} = \tau$  имеем  $\det \mathbf{P}(\tau) = \det \mathbf{E} = 1$ , то  $\det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = 1$  при всех  $\mathbf{t}$ . Итак, решение задачи Дарбу является тензором поворота.

В качестве момента сравнения  $\tau$  можно выбрать значение  $\tau = 0$ , т.е.  $\tau$  принять за начало отсчета времени. Но это не всегда удобно. Рассмотрим пример — см. Рис.5.9.

Пусть стержень  $OA$  подвешен с помощью шарнира в точке  $O$  и может совершать движения вокруг  $O$  в плоскости чертежа. Пусть на стержень действует поле силы тяжести  $\mathbf{g}$ . Тогда если стержень слегка отклонить от вертикали и затем опустить, то он начнет совершать малые колебания около вертикали. Начальное положение стержня (на рисунке — это  $OA$ ) при  $\mathbf{t} = 0$  отклонено от вертикали. В качестве отсчетного положения удобно принять не это начальное положение, а вертикальное положение стержня. Поэтому принимаем, что при каком-то  $\tau < 0$  стержень занимал вертикальное положение и тензор поворота  $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}$ . При  $\mathbf{t} = 0$  тензор поворота имеет вид

$$\mathbf{P}(0) = (1 - \cos \theta_0) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta_0 \mathbf{E} + \sin \theta_0 \mathbf{m} \times \mathbf{E} \equiv \mathbf{P}_0,$$

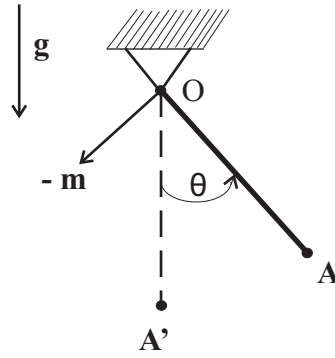


Рис. 5.9: Выбор отсчетного положения

где  $\mathbf{m}$  — ортогонален плоскости чертежа и направлен “от нас”. Задача Дарбу в этом случае принимает вид

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad t > 0, \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0 \quad (5.18.5)$$

Отметим одно свойство задачи Дарбу. На первый взгляд может показаться, что задача (5.18.5) линейна. Следовательно, ее общее решение должно быть суммой трех частных решений уравнения (5.18.5). Именно так гласит известная теорема из теории линейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Здесь имеется одна тонкость, которая резко меняет ситуацию. Дело, конечно, в начальном условии. Тензор  $\mathbf{P}_0$  в (5.18.5) должен быть тензором поворота. Повороты, как мы уже знаем, мультипликативны, а вовсе не аддитивны. Поэтому сумма частных решений нас попросту не устраивает. Как же строить в таком случае общее решение задачи Дарбу (5.18.5)? Оказывается, что достаточно найти одно частное решение уравнения (5.18.5), но такое, что оно является тензором поворота. Последнее обстоятельство существенно затрудняет построение решения задачи Дарбу. В частности, оно делает проблематичным численное построение решения, ибо строить численно матрицы, строго удовлетворяющие условиям ортогональности, весьма затруднительно, если вообще возможно. Позднее мы покажем, как устранить описанное затруднение. Сейчас мы ограничимся демонстрацией того, что одного частного решения уравнения (5.18.5), без учета начального условия, достаточно, чтобы найти общее решение задачи (5.18.5). Пусть тензор поворота  $\mathbf{Q}(t)$  является каким-либо решением уравнения (5.18.5) без учета начального условия

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(t).$$

Тогда тензор поворота

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(0) \cdot \mathbf{P}_0 \quad (5.18.6)$$

является решением задачи (5.18.5).

*Упражнение. Доказать последнее утверждение.*

## 5.19 Вращение вокруг фиксированной оси

Повороты и вращения твердого тела вокруг фиксированной оси часто встречаются в приложениях, например, при плоских движениях тела. Этот случай наиболее прост для интуитивного восприятия спирного движения. Не случайно поэтому в элементарных учебниках по физике угловая скорость вводится именно на примере вращения тела вокруг фиксированной оси. Рассмотрим диск, который поворачивается (вращается) вокруг собственной оси, причем плоскость диска сохраняет неизменное положение. За время  $\Delta t$  диск поворачивается на угол  $\Delta\theta(t)$ . Ось диска совпадает с прямой, натянутой на единичный вектор  $\mathbf{m} = \text{const}$ . Угловой скоростью называют векторную величину

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{m} = \dot{\theta}(t) \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \text{const}. \quad (5.19.1)$$

В некоторых книгах определение (5.19.1) распространяется на общий случай, когда  $\mathbf{m}$  меняется во времени. Интуитивно не вполне ясно, всегда ли приемлемо определение угловой скорости в виде (5.19.1). Однако совершенно ясно, что любое приемлемое определение угловой скорости обязательно должно совпадать с (5.19.1) в описанной выше ситуации, т.е. когда вращение происходит вокруг фиксированной во времени оси. Проверим этот факт для левой и правой угловых скоростей, определенных посредством (5.17.5) и (5.17.8). Тензор поворота вокруг оси  $\mathbf{m}$  дается теоремой Эйлера (5.9.1), причем

$$\mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}. \quad (5.19.2)$$

Это равенство, разумеется, справедливо всегда, а не только при  $\mathbf{m} = \text{const}$ . Запишем теперь уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{Q}}(\theta \mathbf{m}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}). \quad (5.19.3)$$

Умножим это равенство скалярно на вектор  $\mathbf{m}$  справа и учтем, что

$$[\dot{\mathbf{Q}}(\theta \mathbf{m})] \cdot \mathbf{m} = [\mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m}]' = \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}.$$

Тогда из (5.19.3) следует равенство

$$\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \lambda(t) \mathbf{m}. \quad (5.19.4)$$

Иными словами, если повороты происходят вокруг фиксированной оси, то и вращения происходят вокруг этой же фиксированной оси. Оси поворота и вращения совпадают. Подставляя (5.19.4) в (5.19.3), получаем

$$\dot{\mathbf{Q}}(\theta \mathbf{m}) = \lambda(t) \mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}). \quad (5.19.5)$$

Вычислим теперь след от обеих частей уравнения (5.19.5) и учтем равенства

$$\text{tr} \dot{\mathbf{Q}}(\theta \mathbf{m}) = [\text{tr} \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m})]' = (1 + 2 \cos \theta)' = -2 \sin \theta \cdot \dot{\theta},$$

$$\text{tr}[\mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m})] = \text{tr}[\sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E} \times \mathbf{m}] = -2 \sin \theta.$$

В результате, вместо (5.19.5) получим

$$-2 \sin \theta \dot{\theta} = -2 \lambda(t) \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = \dot{\theta}(t). \quad (5.19.6)$$

Подставляя это соотношение в (5.19.4), получаем определение (5.19.1). Итак, левая угловая скорость при поворотах вокруг фиксированной оси совпадает с определением (5.19.1). Для правой угловой скорости имеем

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{Q}^T(\theta \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = \dot{\theta} \mathbf{m},$$

т.е. правая и левая угловые скорости в этом случае совпадают. Ранее равенствами (5.16.2), (5.16.3) и (5.16.4) были введены три различных определения угловой скорости. При поворотах вокруг фиксированной оси все три определения приводят к одному и тому же вектору

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\theta}(t) \mathbf{m}. \quad (5.19.7)$$

Можно только пожалеть, что справедливость соотношений (5.19.7) исчерпывается случаем поворотов вокруг фиксированной оси. Весьма близким к рассмотренному случаю поворота вокруг фиксированной оси является случай вращения вокруг фиксированной оси

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t) \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \text{const}, \quad |\mathbf{n}| = 1. \quad (5.19.8)$$

Для того, чтобы найти ось поворота, необходимо по  $\boldsymbol{\omega}(t)$  построить тензор поворота и найти его неподвижный вектор. Иными словами, необходимо решить задачу Дарбу

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \omega(t) \mathbf{n} \times \mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \quad (5.19.9)$$

Введем следующие подстановки

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} \equiv \mathbf{K} = \text{const}. \quad (5.19.10)$$

Подставляя эти соотношения в (5.19.9) получаем следующую задачу для нового тензора поворота  $\mathbf{Q}(t)$

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \omega(t)\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}. \quad (5.19.11)$$

Докажем утверждение: производная от тензорной экспоненты  $\exp[\varphi(t)\mathbf{A}]$ , где  $\mathbf{A} = \text{const}$ , равна

$$\frac{d}{dt} \exp[\varphi(t)\mathbf{A}] = \dot{\varphi}\mathbf{A} \cdot \exp(\varphi\mathbf{A}) = \dot{\varphi} \exp(\varphi\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}. \quad (5.19.12)$$

Для доказательства (5.19.12) рассмотрим тензорный ряд, являющийся определением тензорной экспоненты

$$\exp(\varphi\mathbf{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^m \mathbf{A}^m.$$

Дифференцируя этот ряд по времени и учитывая, что  $\mathbf{A}$  постоянный тензор, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(\varphi\mathbf{A}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\dot{\varphi} \varphi^{m-1}}{(m-1)!} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{m-1} = \dot{\varphi}\mathbf{A} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^k \mathbf{A}^k = \\ &= \dot{\varphi}\mathbf{A} \cdot \exp(\varphi\mathbf{A}) = \dot{\varphi} \exp(\varphi\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Здесь мы перешли к другому индексу суммирования  $k = m-1$ . Обратим внимание, что условие  $\mathbf{A} = \text{const}$  является весьма существенным. В противном случае, при дифференцировании тензорного ряда пришлось бы дифференцировать тензор  $\mathbf{A}$  и ничего похожего на (5.19.12) не получилось бы. Проблема в том, что тензоры  $\mathbf{A}$  и  $\dot{\mathbf{A}}$  не коммутируют

$$\mathbf{A}(t) \cdot \dot{\mathbf{A}}(t) \neq \dot{\mathbf{A}}(t) \cdot \mathbf{A}(t).$$

Обратимся к решению задачи (5.19.11). Тензор поворота  $\mathbf{Q}(t)$  ищем в виде (5.10.11)

$$\mathbf{Q}(t) = \exp(\boldsymbol{\theta}(t) \times \mathbf{E}) = \exp[\boldsymbol{\theta}(t)\mathbf{K}], \quad (5.19.13)$$

где

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \theta(t)\mathbf{n}, \quad \mathbf{K} \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \text{const}. \quad (5.19.14)$$

Дифференцируя (5.19.13) по времени и учитывая (5.19.12), получаем

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = \dot{\theta}(t)\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}(t).$$

Подставляя это выражение в (5.19.11), приходим к скалярному уравнению

$$\dot{\theta}(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{t}) \quad \Rightarrow \quad \theta(\mathbf{t}) = \int_0^{\mathbf{t}} \omega(\tau) d\tau. \quad (5.19.15)$$

Здесь мы учли начальное условие  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}$ , из которого следует, что  $\theta(0) = 0$ . Итак, задача Дарбу (5.19.11) решена и тензор поворота  $\mathbf{Q}$  найден. Ось этого поворота совпадает с осью вращения  $\mathbf{n}$ . Исходный тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  согласно (5.19.10) имеет вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \exp(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_0 = \exp(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \exp(\boldsymbol{\varphi}_0 \times \mathbf{E}), \quad (5.19.16)$$

где  $\boldsymbol{\varphi}_0$  есть вектор начального поворота. Вектор поворота, отвечающий тензору  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , можно найти по формуле сложения векторов поворота (5.14.16). В результате получим, что неподвижный вектор тензора  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  совпадает с осью вращения  $\mathbf{n}$  тогда и только тогда, когда вектор начального поворота  $\boldsymbol{\varphi}_0$  лежит на оси вращения  $\mathbf{n}$ .

*Упражнение. Доказать это утверждение.*

Если

$$\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\varphi}_0 \neq \mathbf{0},$$

то вектор поворота, отвечающий тензору поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , будет иметь переменное во времени направление.

## 5.20 Связь угловой скорости с вектором поворота

Угловая скорость вводилась в рассмотрение с помощью уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}|_{\mathbf{t}=0} = \mathbf{P}_0. \quad (5.20.1)$$

Если тензор поворота задан, то угловая скорость определяется равенством

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top)_\times. \quad (5.20.2)$$

Для тензора поворота мы имеем несколько представлений. Одно из них выразилось формулой (5.9.1)

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (5.20.3)$$

где угол поворота  $\theta(\mathbf{t})$  и неподвижный вектор  $\mathbf{m}(\mathbf{t})$  зависят от времени.

*Упражнение. Доказать равенство*

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \dot{\theta} \mathbf{m} + \sin \theta \dot{\mathbf{m}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}. \quad (5.20.4)$$

Для доказательства этого равенства достаточно продифференцировать (5.20.3) по времени, а результат подставить в (5.20.2). Начинаясь весьма полезно проделать вывод (5.20.4).

Впервые равенство (5.20.4) было строго получено в [18, 108]. Однако, в несколько другой трактовке, это равенство было известно еще Эйлеру [35]. Если вращение происходит вокруг фиксированной оси  $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$ , то из (5.20.4) получаем (5.19.7). Если в качестве отсчетного положения выбрать положение в данный момент времени, то получим определение угловой скорости, принятое в некоторых книгах

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \left[ \frac{d\boldsymbol{\theta}(\tau - t)}{d\tau} \right]_{\tau=t} = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\mathbf{m}(t), \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0}. \quad (5.20.5)$$

Это выражение справедливо только в один момент времени. Поэтому его нельзя дифференцировать по времени. Наконец, для малых поворотов, когда

$$\sin \theta = \theta, \quad 1 - \cos \theta = 0(\theta^2),$$

получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{m} + \boldsymbol{\theta} \dot{\mathbf{m}} = (\boldsymbol{\theta} \mathbf{m})', \quad (5.20.6)$$

где  $\boldsymbol{\theta}(t) \mathbf{m}(t)$  есть вектор малого поворота. Выражение (5.20.6) можно, разумеется, получить непосредственно из представлений (5.11.3) и (5.20.2). В самом деле, дифференцируя (5.11.3), получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E}.$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T = (\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}) = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E} + \mathbf{0}(\theta^2).$$

Подставляя это выражение в (5.20.2) и учитывая тождество

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E})_{\times} = -2\mathbf{a},$$

получаем (5.20.6). Выражение (5.20.4) будет удобно во многих случаях, но не всегда. Главный недостаток (5.20.4) состоит в том, что в него входят производные от угла поворота и неподвижного вектора по отдельности. Часто бывает необходимо выразить угловую скорость непосредственно через производную от вектора поворота  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{m}$ . Вывод этого представления [108] приведем достаточно подробно. Вычисляя след от обеих частей уравнения Пуассона, получаем

$$(\text{tr } \mathbf{P})' = \text{tr}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = -2 \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Принимая во внимание, что

$$\operatorname{tr} \mathbf{P} = 1 + 2 \cos \theta, \quad \operatorname{tr} \dot{\mathbf{P}} = -2 \sin \theta \dot{\theta},$$

из предыдущего равенства получаем

$$\theta \dot{\theta} = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (5.20.7)$$

Умножая теперь уравнение Пуассона (5.20.1) скалярно на вектор поворота  $\boldsymbol{\theta}$  и учитывая, что

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad (5.20.8)$$

получаем

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta})' - \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -(\mathbf{P} - \mathbf{E}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Используя представление (5.10.6), получаем

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{R} \cdot \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

В результате из (5.20.1) следует равенство

$$\mathbf{R} \cdot \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \right) = 0. \quad (5.20.9)$$

Заметим, что

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \lambda \boldsymbol{\theta}.$$

Следовательно, из (5.20.9) получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\theta} + \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (5.20.10)$$

Осталось определить скаляр  $\lambda$ . Для этого умножим (5.20.10) скалярно на  $\boldsymbol{\theta}$  и учтем равенство (5.20.7)

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \lambda \theta^2 + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (5.20.11)$$

Теперь (5.20.10) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega} = \left[ \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2 \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (5.20.12)$$

где

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2. \quad (5.20.13)$$



Как видим, связь (5.20.12) угловой скорости с производной от вектора поворота является довольно сложной. Обращая (5.20.12), получаем

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad (5.20.14)$$

где

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2} \mathbf{R}^2, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (5.20.15)$$

Обратим внимание, что  $\theta$  в формулах (5.20.11) – (5.20.15) и ниже можно трактовать как модуль вектора поворота  $\boldsymbol{\theta}$ . Тензор  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ , определенный равенством (5.20.15), в дальнейшем будем называть тензором-интегратором. Название объясняется тем, что  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$  выполняет роль интегрирующего множителя, переводящего линейную дифференциальную форму  $\boldsymbol{\omega} dt$  в полный дифференциал  $d\boldsymbol{\theta}$  вектора поворота  $\boldsymbol{\theta}$ . Тензор  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$  невырожден, ибо его определитель

$$\det \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta^2}{2(1 - \cos \theta)} \neq 0, \quad \theta < \pi. \quad (5.20.16)$$

Он обладает рядом полезных свойств, облегчающих его применение. Отметим некоторые из них. Тензор  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$  есть изотропная функция вектора поворота

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{S}^T, \quad \forall \mathbf{S} : \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}. \quad (5.20.17)$$

Если  $\mathbf{S} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ , то из (5.20.17) следует

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}). \quad (5.20.18)$$

Кроме того, легко проверить тождество

$$\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}). \quad (5.20.19)$$

Используя это тождество, равенство (5.20.14) легко переписать для правой угловой скорости

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t). \quad (5.20.20)$$

В терминах вектора поворота левую и правую задачи Дарбу можно переписать в следующих формах

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0; \quad (5.20.21)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0. \quad (5.20.22)$$

Следует обратить внимание на различие, например, в формулировках левой задачи Дарбу (5.20.1) и (5.20.21). В принципе, эти формулировки эквивалентны. Решив одну из этих задач, мы одновременно решим и другую задачу. На первый взгляд кажется, что формулировка (5.20.1) значительно проще, чем (5.20.21). В самом деле, уравнение (5.20.1) линейно и однородно. Уравнение (5.20.21) существенно нелинейно и неоднородно. Тем не менее, численное, по крайней мере, решение задачи (5.20.21) несравнимо проще, нежели решение задачи (5.20.1). В частности, обратим внимание читателя на следующую возможность. Задачу Дарбу (5.20.1) можно простой заменой

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{P}_0 \quad (5.20.23)$$

свести к следующей

$$\dot{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}), \quad \mathbf{Q}|_{t=0} = \mathbf{E}. \quad (5.20.24)$$

Это возможно, поскольку левые угловые скорости для поворотов  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$  и  $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi})$  совпадают

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top]_\times = -\frac{1}{2}[\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^\top]_\times.$$

Тогда вместо задачи (5.20.21) получаем следующую задачу для вектора поворота  $\boldsymbol{\varphi}$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\varphi^2}\boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}. \quad (5.20.25)$$

Преимущество последней задачи по сравнению с (5.20.21) в том, что, во-первых, здесь простейшее начальное условие и, во-вторых, очень часто вектор  $\boldsymbol{\varphi}$  можно считать малым. Исходный вектор поворота  $\boldsymbol{\theta}$  можно найти по вектору  $\boldsymbol{\varphi}$  и  $\boldsymbol{\theta}_0$  с помощью формул (5.14.16). Представления (5.20.21) и (5.20.22) можно записать в другой форме

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = g\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0; \quad (5.20.26)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = g\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0. \quad (5.20.27)$$

Иногда она бывает полезной.

Этими краткими замечаниями мы здесь и ограничимся. Более детальное описание выходит за рамки данной книги. Приведенные в этом пункте формулы понадобятся нам в дальнейшем при определении потенциальных моментов.

## 5.21 Угловая скорость композиции поворотов

В приложениях бывает удобно представлять общий поворот  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  в виде композиции поворотов

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})) = \mathbf{Q}_2(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})) \cdot \mathbf{Q}_1(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{t})). \quad (5.21.1)$$

Здесь  $\mathbf{Q}_1$  есть первый поворот, а  $\mathbf{Q}_2$  — второй поворот. Напомним, что композицию поворотов нельзя понимать так, что сначала, в течение какого-то интервала времени, производится поворот  $\mathbf{Q}_1$ , а затем, по истечении первого интервала времени, начинает производиться второй поворот  $\mathbf{Q}_2$ . Тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  — это мгновенное действие, происходящее в момент времени  $\mathbf{t}$  и состоящее в том, что в момент времени  $\mathbf{t}$  тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  поворачивает тело из отсчетного положения в актуальное. В следующий момент времени  $\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}$  тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t})$  переводит тело из отсчетного положения в положение, занимаемое телом в момент времени  $(\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t})$ . Истинное изменение ориентации тела в пространстве описывается не тензором поворота, а его изменением (дифференциалом). Это обстоятельство важно осознать. Полезно поэтому провести аналогию с вектором перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{t}).$$

Вектор  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  мгновенно переносит тело из отсчетного положения  $\mathbf{r}$  в актуальное положение  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ . При этом  $\mathbf{u}(\mathbf{t})$  сам по себе не показывает истинного движения тела, которое, тем не менее, может быть восстановлено по вектору  $\mathbf{u}$

$$d\mathbf{R}(\mathbf{t}) = d\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{r} + \int_0^{\mathbf{t}} d\mathbf{u}(\mathbf{t}).$$

При этом  $d\mathbf{u} = \mathbf{v}d\mathbf{t}$ , т.е. линейная дифференциальная форма  $\mathbf{v}d\mathbf{t}$  есть полный дифференциал вектора перемещения. Для поворотов ситуация сложнее. Изменение поворота, согласно уравнению Пуассона, определяется через линейную дифференциальную форму  $\boldsymbol{\omega}d\mathbf{t}$

$$d\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}d\mathbf{t} \times \mathbf{P},$$

но  $\boldsymbol{\omega}d\mathbf{t}$  не является полным дифференциалом вектора поворота

$$\boldsymbol{\omega}d\mathbf{t} \neq d\boldsymbol{\theta}.$$

По существу именно с этим обстоятельством связаны все осложнения, возникающие при описании поворотов.

Вернемся, однако, к композиции поворотов (5.21.1). Все, сказанное относительно полного поворота  $\mathbf{P}$ , справедливо и для составляющих поворотов  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$ . Допустим, нам известны угловые скорости  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$  поворотов  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$  соответственно

$$\dot{\mathbf{Q}}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1, \quad \dot{\mathbf{Q}}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2. \quad (5.21.2)$$

Как по ним вычислить угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$  полного поворота  $\mathbf{P}$ ? Ответ дает следующая простая

**Теорема:** угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  полного поворота  $\mathbf{P}$ , определенного в виде композиции (5.21.1), вычисляется по угловым скоростям  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$  составляющих поворотов  $\mathbf{Q}_1$  и  $\mathbf{Q}_2$  посредством равенства

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_2(t) + \mathbf{Q}_2(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_1(t). \quad (5.21.3)$$

*Доказательство* (5.21.3) вполне элементарно и получается после дифференцирования (5.21.1) по времени

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \dot{\mathbf{Q}}_2(t) \cdot \mathbf{Q}_1(t) + \mathbf{Q}_2(t) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_1(t).$$

Заменяя здесь производные от тензоров поворота с помощью уравнения Пуассона (5.21.2), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1). \quad (5.21.4)$$

Преобразуем здесь второе слагаемое в правой части

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1) &= \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_1 = \\ \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_2^\top \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 &= [(\mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1. \end{aligned}$$

Учитывая это тождество и равенство (5.21.1), вместо (5.21.4) получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = (\boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{P}.$$

Умножая это равенство скалярно на  $\mathbf{P}^\top$  справа и вычисляя векторные инварианты от обеих частей получившегося равенства, приходим к формуле (5.21.3). Доказательство завершено.

В литературе равенство (5.21.3), точнее его аналог, называют теоремой сложения угловых скоростей. Как уже неоднократно отмечалось, в литературе используется определение угловой скорости, когда в качестве отсчетного положения используется положение в данный момент времени. При таком описании

$$\mathbf{Q}_2(\tau - t)|_{\tau=t} = \mathbf{E}$$

и равенство (5.21.3) переходит в традиционную форму сложения угловых скоростей

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_2(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_1(\mathbf{t}). \quad (5.21.5)$$

Хотя в этом выражении и стоит аргумент  $\mathbf{t}$ , тем не менее его нельзя дифференцировать по времени, поскольку здесь  $\mathbf{t}$  есть один фиксированный момент времени. Автор рекомендует не использовать формулы типа (5.21.5) и аналогичные ей выражения, апеллирующие к мгновенному состоянию движения. Будучи формально правильными, они служат источником многих недоразумений и практически бесполезны. Кроме того, они находятся в трудно устранимом противоречии с интуитивными представлениями. Например, мы знаем, что повороты не коммутируют. Поэтому их угловые скорости должны входить в формулу сложения не равноправно. Это действительно имеет место в (5.21.3), но в (5.21.5) этот факт глубоко замаскирован. В данной книге теорема о сложении угловых скоростей используется исключительно в форме (5.21.3). Из последней вытекает представление для сложения правых угловых скоростей

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{Q}_1^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_2, \quad (5.21.6)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \mathbf{Q}_1^T \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = \mathbf{Q}_2^T \cdot \boldsymbol{\omega}_2.$$

Из представлений (5.21.3) вытекают формулы для композиции трех и большего числа поворотов

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1. \quad (5.21.7)$$

Тогда имеем

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_3 + \mathbf{Q}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1. \quad (5.21.8)$$

**Упражнение.** Доказать (5.21.8).

Ранее мы видели, что угловая скорость в общем случае вычисляется по довольно сложным формулам, представленным в предыдущем параграфе. Все они резко упрощаются, если поворот происходит вокруг фиксированной оси. Тогда угловая скорость вычисляется по простейшей формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{m} = \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m} = \text{const}. \quad (5.21.9)$$

Поэтому часто бывает полезным общий поворот представить в виде композиции поворотов вокруг фиксированных осей. Рассмотрим, например, композицию поворотов

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}), \quad (5.21.10)$$

где  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  постоянные единичные векторы. Угловые скорости поворотов  $\mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m})$  и  $\mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n})$  вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi}(t) \mathbf{m}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi}(t) \mathbf{n}. \quad (5.21.11)$$

Согласно теореме сложения угловых скоростей (5.21.3) имеем

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{m} + \dot{\psi}(t) \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.21.12)$$

Это выражение можно переписать в эквивалентной форме

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \left[ \dot{\varphi}(t) \mathbf{m} + \dot{\psi}(t) \mathbf{n} \right], \quad (5.21.13)$$

которая часто будет использоваться в дальнейшем. Обычно такого рода преобразованиями вообще удается избежать относительно громоздкой операции умножения тензора поворота на вектор. Посмотрим теперь как усложняются вычисления, если хотя бы один из поворотов проводить вокруг меняющейся во времени оси. В соответствии с правилом квазикоммутативности поворотов поворот (5.21.10) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}) = \mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}') \cdot \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}), \quad (5.21.14)$$

где

$$\mathbf{n}'(t) = \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.21.15)$$

Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_*$  поворота  $\mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}')$  теперь уже должна вычисляться по полной формуле (5.20.4)

$$\boldsymbol{\omega}_* = \dot{\psi} \mathbf{n}' + \sin \psi \dot{\mathbf{n}}' + (1 - \cos \psi) \mathbf{n}' \times \dot{\mathbf{n}}'. \quad (5.21.16)$$

Угловая скорость поворота (5.21.14) согласно (5.21.3) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_*(t) + \dot{\varphi} \mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}') \cdot \mathbf{m}. \quad (5.21.17)$$

Поскольку повороты (5.21.10) и (5.21.14) совпадают, то и угловые скорости (5.21.12) и (5.21.17) должны тождественно совпадать, что сразу не очевидно.

**Упражнение.** Доказать, что выражения (5.21.12) и (5.21.17) приводят к одному и тому же вектору  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

При вычислении производной от вращающегося вектора следует активно пользоваться уравнением Пуассона. Например, для вектора (5.21.15) имеем

$$\dot{\mathbf{n}}' = [\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}]' = \dot{\mathbf{Q}}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \dot{\varphi} \mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}.$$

Здесь использовано уравнение Пуассона. Вспоминая (5.21.15) окончательно получаем

$$\dot{\mathbf{n}}'(t) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{m} \times \mathbf{n}'(t). \quad (5.21.18)$$

Если вектор  $\mathbf{a} = \text{const}$  поворачивается тензором поворота общего вида, то вместо (5.21.18) имеем

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}'(t). \quad (5.21.19)$$

Если вектор  $\mathbf{a}$  меняется во времени и, кроме того, поворачивается тензором поворота, то, разумеется, вместо (5.21.19) следует использовать более полное выражение

$$\mathbf{a}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}'(t). \quad (5.21.20)$$

Часто последнее выражение удобно представлять в другой форме. При этом следует вспомнить тождество

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}), \quad (5.21.21)$$

которое выполняется для любых векторов и любых тензоров поворота – см. главу 2. Вводя в рассмотрение правую угловую скорость

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t),$$

равенство (5.21.21) переписываем в виде

$$\mathbf{a}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot [\dot{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{a}(t)]. \quad (5.21.22)$$

В литературе формулы типа (5.21.22) часто трактуют в терминах различного рода наблюдателей. Читатель, уже добившийся более или менее устойчивой визуализации векторных и тензорных объектов, легко сможет самостоятельно интерпретировать смысл формул типа (5.21.22). Тем не менее, в параграфе, посвященном описанию относительных движений, мы обсудим и эти трактовки. Здесь же укажем только, что все величины, входящие в (5.21.22) и другие формулы, заданы в одной и только одной (произвольно выбранной) системе отсчета и, вообще говоря, не нуждаются в каких-то дополнительных трактовках. Замены системы отсчета будут обсуждены позднее в конце этой главы.

Вернемся к вычислению угловой скорости для композиции поворотов. Ранее была доказана теорема (5.14.1) о представлении произвольного тензора

поворота в виде композиции трех поворотов вокруг фиксированных и произвольно выбираемых осей. Теорема (5.21.3) позволяет без труда вычислить угловую скорость композиции поворотов (5.14.1)

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}_3(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_2(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}_1(\varphi \mathbf{n}), \quad \mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}/|\mathbf{m} \times \mathbf{n}|. \quad (5.21.23)$$

Здесь единичные векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$  выбираются произвольно, но они не зависят от времени. Уравнения Пуассона для поворотов, входящих в (5.21.23), дают

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \dot{\mathbf{Q}}_1 = \dot{\varphi} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}_1, \quad \dot{\mathbf{Q}}_2 = \dot{\vartheta} \mathbf{e} \times \mathbf{Q}_2, \quad \dot{\mathbf{Q}}_3 = \dot{\psi} \mathbf{m} \times \mathbf{Q}_3.$$

Угловые скорости для составляющих поворотов вычисляются по простейшим формулам. Полная угловая скорость в соответствии с (5.21.8) дается выражением

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}' + \dot{\varphi} \mathbf{n}'', \quad (5.21.24)$$

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}_3(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{n}'' = \mathbf{Q}_3(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.21.25)$$

Уравнение (5.21.24) носит название кинематического уравнения Эйлера. Оно было получено Л. Эйлером для случая  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$  и единичного вектора  $\mathbf{e}$ , ортогонального  $\mathbf{m}$ . Величины  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$  и  $\dot{\varphi}$  носят названия угловых скоростей прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Заметим, что эти названия в общем случае весьма условны, а сами эти величины обретают объективный смысл только при учете специфики как рассматриваемой задачи, так и твердого тела, повороты которого описываются тензором (5.21.23).

## 5.22 Распределение скоростей и ускорений в абсолютно твердом теле

Вся информация о кинематических характеристиках движения точек абсолютно твердого тела содержится в основном уравнении кинематики (5.8.6)

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q), \quad (5.22.1)$$

где векторы  $\mathbf{r}_Q$  и  $\mathbf{R}_Q$  определяют положение полюса  $Q$  в отсчетном и актуальном положениях соответственно, векторы  $\mathbf{r}_A$  и  $\mathbf{R}_A$  определяют положение произвольно выбранной точки  $A$  в отсчетном и актуальном положениях соответственно, тензор  $\mathbf{P}(t)$  определяет поворот абсолютно твердого тела. Чтобы найти распределение скоростей в абсолютно твердом теле достаточно продифференцировать (5.22.1) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q). \quad (5.22.2)$$



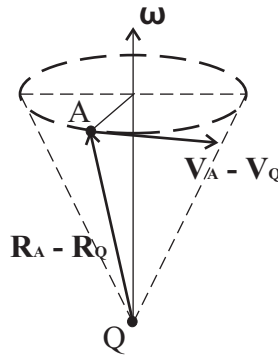


Рис. 5.10: Интерпретация уравнения Эйлера

Исключая отсюда производную от тензора поворота с помощью уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad (5.22.3)$$

получаем

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q).$$

С учетом уравнения (5.22.1) этому соотношению можно придать вид

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_Q(t)). \quad (5.22.4)$$

Последнее равенство носит название уравнения Эйлера. Оно позволяет найти скорости всех точек абсолютно твердого тела и допускает ясное геометрическое истолкование для скорости точки  $\mathbf{A}$  относительно полюса  $\mathbf{Q}$  — см. Рис.5.10. Эта интерпретация упрощается, если полюс  $\mathbf{Q}$  неподвижен. Тогда в каждый момент времени точка  $\mathbf{A}$  как бы движется по окружности вокруг оси, натянутой на вектор  $\boldsymbol{\omega}$ . Следует, впрочем, предостеречь от слишком буквального следования этой интерпретации, поскольку точка  $\mathbf{A}$  движется по указанной окружности только тогда, когда, во-первых, полюс  $\mathbf{Q}$  неподвижен и, во-вторых, вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  постоянен. При нарушении любого из этих двух условий фактическое движение точки  $\mathbf{A}$  происходит по другой траектории, которая может весьма сильно отличаться от упомянутой окружности. Многие книги по механике используют формулу (5.22.4) в качестве определения угловой скорости. Такой подход, разумеется, возможен, но при этом природа угловой скорости и ее связь с поворотами тела оказываются скрытыми. Чтобы получить распределение ускорений в абсолютно твердом теле достаточно продифференцировать (5.22.4) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_Q).$$

Исключая отсюда скорости с помощью равенства (5.22.4), получаем

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q)]. \quad (5.22.5)$$

Выражение (5.22.5) можно переписать в другой, но эквивалентной, форме

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}] \cdot (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q). \quad (5.22.6)$$

Вектор  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  называется вектором угловых ускорений. Тензор второго ранга

$$\mathcal{W} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} \quad (5.22.7)$$

будем называть тензором угловых ускорений. Последний можно выразить через левый тензор спина  $\mathbf{S}_l$

$$\mathcal{W} = \dot{\mathbf{S}}_l + \mathbf{S}_l^2, \quad \mathbf{S}_l = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}. \quad (5.22.8)$$

В заключение этого пункта введем еще два часто используемых в литературе понятия. Рассмотрим тело, имеющее неподвижную точку  $\mathbf{Q}$ , которую выберем в качестве полюса, причем  $\mathbf{V}_Q = \mathbf{0}$ .

**Определение:** *прямая*

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q + \frac{\lambda}{\omega(t)} \boldsymbol{\omega}(t), \quad \dot{\mathbf{R}}_Q = \mathbf{0}, \quad (5.22.9)$$

*проходящая через неподвижный полюс  $\mathbf{Q}$  и натянутая на вектор угловой скорости, называется мгновенной осью вращения.*

Скалярный параметр  $\lambda$ , входящий в (5.22.9), играет роль расстояния, на которое точка  $\mathbf{A}$  отстоит от полюса  $\mathbf{Q}$ . Из выражения (5.22.4) видим, что скорости всех точек, лежащих на мгновенной оси вращения в данный момент времени равны нулю. Иными словами, если тело имеет неподвижную точку  $\mathbf{Q}$ , то существует такая прямая (5.22.9), что в данный момент времени тело как бы вращается вокруг этой неподвижной прямой. Если тело имеет неподвижную точку, то мгновенная ось вращения всегда существует. Можно распространить понятие мгновенной оси вращения и на другие случаи движения, при которых тело не имеет неподвижной точки. Однако такое расширение возможно не для любых движений.

**Определение:** *мгновенной осью вращения называется прямая, натянутая на вектор угловой скорости и такая, что скорости точек тела, лежащие в данный момент времени на этой прямой, обращаются в нуль.*

Выясним при каких условиях, налагаемых на движение тела, мгновенная ось вращения существует. По определению, мгновенная ось вращения состоит

из точек, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Тогда, согласно (5.22.4) для таких точек имеем

$$\mathbf{V}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_Q(t)) = \mathbf{0}. \quad (5.22.10)$$

Это равенство должно быть справедливым для любого выбора полюса  $Q$ , т.е. для всех точек тела. Скалярно умножая (5.22.10) на вектор  $\boldsymbol{\omega}(t)$ , получаем

$$\mathbf{V}_Q(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = 0. \quad (5.22.11)$$

Поскольку выбор  $Q$  произволен, то отсюда следует, что скорости всех точек тела должны быть ортогональны вектору угловой скорости. Этот случай реализуется, например, для так называемых плоских движений твердого тела.

**Определение :** движение абсолютно твердого тела называется плоским, если скорости всех точек этого тела лежат в плоскостях, ортогональных постоянному единичному вектору  $\mathbf{e}$ .

**Упражнение :** доказать, что при плоском движении угловая скорость тела ортогональна плоскостям, в которых лежат векторы скорости, т.е.  $\boldsymbol{\omega} = \omega(t) \mathbf{e}$ .

Итак, будем считать, что условие (5.22.11) выполнено. Тогда (5.22.10) дает нам уравнение для нахождения мгновенной оси вращения. Решая это уравнение, получаем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_Q + \frac{\lambda}{\omega} \boldsymbol{\omega}(t). \quad (5.22.12)$$

Выражение (5.22.12) определяет прямую, проходящую через точку

$$\mathbf{R}_Q(t) + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_Q \quad (5.22.13)$$

и натянутую на вектор  $\boldsymbol{\omega}$ . Мгновенная ось вращения при этом движется в пространстве, хотя скорости точек тела, лежащих в данный момент времени на этой оси, покоятся. При плоских движениях точка (5.22.13) называется **мгновенным центром скоростей**. Это понятие широко используется в теории машин и механизмов, но здесь мы его обсуждать не будем.

### 5.23 Качение цилиндра по плоскости

Простейшим примером плоского движения является качение колеса (цилиндра) по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Для решения этой задачи вполне достаточно здравого смысла и мощный аппарат кинематики

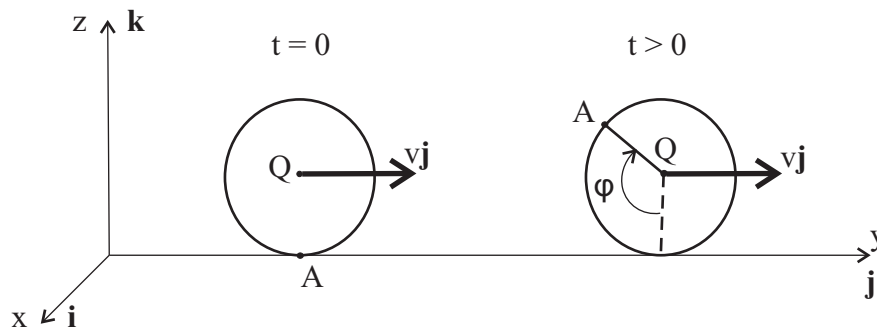


Рис. 5.11: Качение цилиндра по плоскости

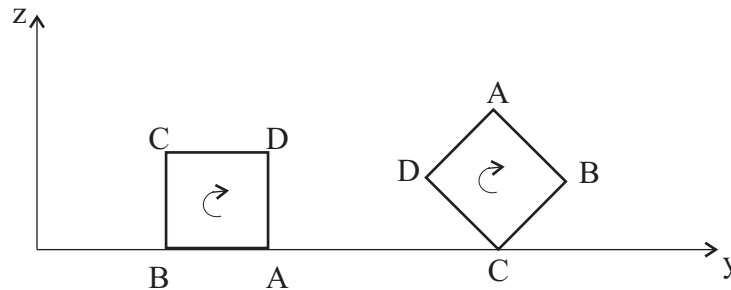


Рис. 5.12: Перекатывание бруса квадратного сечения

абсолютно твердого тела в данной задаче не дает особых преимуществ. Тем не менее, аппарат работает и не менее эффективен, чем любой другой подход.

Катящееся по плоскости колесо (поперечное сечение цилиндра) представлено на Рис.5.11. Одним из величайших открытий в истории человечества было изобретение колеса. Археологические раскопки показывают, что люди далеко не сразу изобрели круглое колесо. Первоначально колеса делались квадратными. При перекатывании углы квадратного колеса обламывались и колеса становились многоугольными, т.е. приближались к круговой форме. Такое колесо считалось плохим и делалось новое квадратное колесо. Сейчас мы рассмотрим процесс перекатывания квадратного колеса с тем, чтобы лучше осознать понятие мгновенной оси вращения. Перекатывание квадрата представлено на Рис.5.12. Если проскальзывание отсутствует, то движение бруса происходит путем перекатывания через одно из своих ребер. На Рис.5.12 брус перекатывается через ребро С. Если проскальзывание отсутствует, то ребро С неподвижно, и брус поворачивается вокруг него. Именно ребро С бруса и является мгновенной осью вращения. Со временем ребра бруса не выдерживают нагрузок и обламываются, а квадрат превращается в восьмиугольник. Рассматривая перекатывание восьмиугольника, мы опять

придем к выводу, что в каждый момент времени брус перекачивается через одно из своих ребер, которое при этом остается неподвижным. Через некоторое время углы восьмиугольника также обламываются, и он превратится в шестнадцатиугольник и т.д. Рассматривая движение произвольного многоугольника, мы понимаем, что при перекачивании то ребро, которое соприкасается с обкатываемым телом (землей), остается неподвижным, т.е. является мгновенной осью вращения. Последняя перемещается в пространстве. Если число сторон многоугольника устремить к бесконечности, то придем к кругу (цилиндрическому телу). Понятно, что в этом случае роль ребра начнет исполнять та образующая цилиндра, которая в данный момент времени соприкасается с землей. При этом цилиндр поворачивается вокруг этой образующей, которая и является мгновенной осью вращения. Понятно также, что форма поперечного сечения цилиндра (круг, эллипс, овал и вообще любая выпуклая замкнутая кривая) не имеет значения. Во всех случаях мгновенной осью вращения является та образующая цилиндра, по которой движущееся без проскальзывания тело соприкасается с телом, по которому оно катится.

*Замечание.* Мгновенная ось вращения является прямой линией. Поэтому если тела соприкасаются по кривым линиям, то обкатывание без проскальзывания невозможно.

Обратимся к формальному рассмотрению. В качестве полюса  $Q$  выбираем центр круга. Пусть полюс  $Q$  движется с постоянной скоростью  $\mathbf{V}_Q = v\mathbf{j}$  — см. Рис. 5.11. Согласно основному уравнению кинематики (5.22.1) для вектора положения произвольной точки  $A$  тела имеем

$$\mathbf{R}_A(t) = vt\mathbf{j} + \mathbf{a}\mathbf{k} + \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{i}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{a}\mathbf{k}), \quad (5.23.1)$$

где

$$\mathbf{R}_Q(t) = vt\mathbf{j} + \mathbf{a}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_Q = \mathbf{a}\mathbf{k},$$

$\mathbf{a}$  — радиус цилиндра. В данном случае очевидно, что ось поворота натянута на вектор  $\mathbf{i}$ . Тензор поворота задается выражением

$$\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{i}) = (1 - \cos \varphi)\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{i} \times \mathbf{E}, \quad (5.23.2)$$

где  $\varphi$  есть угол, на который поворачивается вектор  $\mathbf{r}_A$  в процессе качения. При этом сам вектор  $\mathbf{r}_A$  определяет ту точку  $A$ , движение которой мы рассматриваем. Вектор угловой скорости поворота (5.23.2) определяется по простейшей формуле

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\mathbf{i}. \quad (5.23.3)$$

Уравнение Эйлера (5.22.4) для скорости точки  $A$  дает

$$\mathbf{V}_A(t) = v\mathbf{j} + \dot{\varphi}(t)\mathbf{i} \times (\mathbf{R}_A - vt\mathbf{j} - \mathbf{a}\mathbf{k}). \quad (5.23.4)$$

Пусть точка  $\mathbf{A}$  есть та точка диска, которая соприкасается в данный момент с землей. Тогда  $\mathbf{R}_A = vt\mathbf{j}$ . Для этой точки скорость равна нулю в силу отсутствия проскальзывания. Уравнение (5.23.4) для этой точки дает

$$v\mathbf{j} - a\dot{\varphi}(t)\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

или

$$\dot{\varphi}(t) = -v/a \quad \Rightarrow \quad \varphi = -vt/a. \quad (5.23.5)$$

Знак минус в этой формуле показывает, что поворот диска происходит по ходу часовой стрелки. Найдем траекторию движения той точки  $\mathbf{A}$ , которая при  $t = 0$  находилась в начале системы координат, т.е.  $\mathbf{r}_A = \mathbf{0}$ . Согласно (5.23.1) и (5.23.5) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A(t) &= vt\mathbf{j} + a\mathbf{k} - \mathbf{Q} \left( -\frac{vt}{a} \mathbf{i} \right) \cdot a\mathbf{k} = \\ &= \left( vt - a \sin \frac{vt}{a} \right) \mathbf{j} + a \left( 1 - \cos \frac{vt}{a} \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5.23.6)$$

По этому выражению нетрудно вычислить все характеристики движения точки  $\mathbf{A}$ .

## 5.24 Качение конуса по конусу

При рассмотрении плоских движений абсолютно твердых тел тензор поворота легко определяется заранее. Во всех остальных случаях тензор поворота заранее угадать достаточно сложно. К сожалению, наша интуиция с поворотами тел справляется с большим трудом и требуется длительная тренировка, прежде чем появится легкость в обращении с поворотами. К счастью, нас выручает то обстоятельство, что сложный поворот можно выразить как композицию простых поворотов, легко поддающихся интуитивному восприятию. В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим качение конуса по конусу. В отличие от случая плоского движения здесь повороты и вращения происходят вокруг меняющихся во времени осей. Обсуждаемая ситуация изображена на Рис.5.13. Оба конуса имеют неподвижную точку  $\mathbf{Q}$ , которую выбираем в качестве полюса для обоих конусов. Конус  $\mathbf{QA}$  или неподвижен, или может вращаться вокруг фиксированной оси  $\mathbf{QA}$ . Угол раствора конуса  $\mathbf{QA}$  равен  $2\alpha$ . Вторым конус  $\mathbf{QC}$  может поворачиваться вокруг конуса  $\mathbf{QA}$ , причем оба конуса всегда соприкасаются, т.е. имеют общую образующую. Угол раствора конуса  $\mathbf{QC}$  равен  $2\beta$ . В учебниках по теоретической механике задача качения конуса по конусу формулируется следующим образом: конус  $\mathbf{QC}$  катится

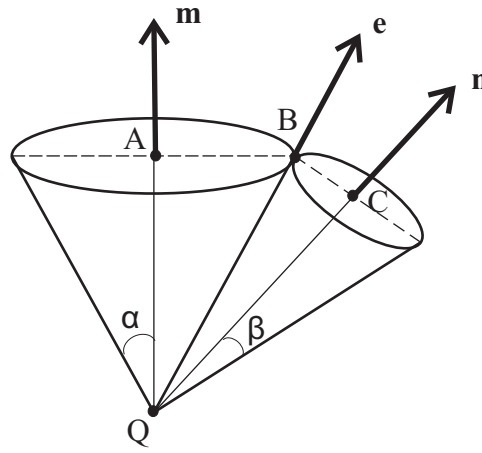


Рис. 5.13: Качение конуса по конусу

по неподвижному конусу  $QA$  без проскальзывания, причем модуль скорости точки  $C$  задан, т.е.  $|\mathbf{V}_C| = V$ ; требуется найти угловую скорость конуса  $QC$ . Ниже мы рассмотрим как классическое решение, представленное в учебниках, так и альтернативное более полное решение.

### 5.24.1 Классическое решение

В качестве отсчетного положения выберем положение, изображенное на Рис.5.13. Единичные векторы  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{e}$  постоянны и лежат в одной плоскости. Конус  $QA$  неподвижен. Введем обозначения :  $|QA| = h_m$ ,  $|QC| = h_n$ ,  $|QB| = l$ . При качении конуса  $QC$  векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{e}$  поворачиваются и обозначаются символами  $\mathbf{n}'$  и  $\mathbf{e}'$ . Классическое решение опирается на уравнение Эйлера для точки  $B$

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_Q), \quad \mathbf{R}_B = l \mathbf{e}'. \quad (5.24.1)$$

Пусть точка  $Q$  неподвижна и начало выбрано в этой точке, тогда

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}_Q = \mathbf{0}. \quad (5.24.2)$$

Поскольку качение происходит без проскальзывания, то скорость точки  $B$  равна нулю. Тогда из (5.24.1) и (5.24.2) следует

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}'. \quad (5.24.3)$$

Для скорости точки  $C$  уравнение Эйлера дает выражение

$$\mathbf{V}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C = \omega h_n \mathbf{e}' \times \mathbf{n}', \quad \mathbf{R}_C = h_n \mathbf{n}'. \quad (5.24.4)$$

Отсюда получаем

$$|\mathbf{V}_C| = |\boldsymbol{\omega}| h_n \sin \beta \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{\omega}| = \frac{v}{h_n \sin \beta}, \quad (5.24.5)$$

где  $v = |\mathbf{V}_C|$ . Таким образом, мы нашли модуль угловой скорости конуса  $QC$ . На этом решения, приводимые в учебниках, заканчиваются. Ясно, что полученный результат мало информативен, а с инженерной точки зрения практически бесполезен. В самом деле, в основе полученного решения лежит предположение о качении без проскальзывания, что исключает возможность получить ответы на многие интересующие инженера вопросы. Например, невозможно определить энергетические затраты при качении; нельзя определить интенсивность шума при качении, которая определяется так называемым крипом (крип — упругое проскальзывание). Кроме того, знание модуля угловой скорости не дает представления о поворотах конуса  $QC$ .

### 5.24.2 Альтернативное решение

Обратимся к относительно полному описанию движения конуса  $QC$ . Предположение об отсутствии проскальзывания на первом этапе анализа принимать не будем. Переход конуса  $QC$  из отсчетного положения в актуальное описывается тензором поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ , который единственен. Однако тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  может быть представлен, и притом бесчисленным числом способом, в виде композиции простых поворотов. Рассмотрим две такие возможности. В отсчетном положении ось конуса  $QC$  занимает положение характеризуемое вектором  $\mathbf{n}$ . В актуальном положении ось конуса  $QC$  занимает положение, характеризуемое вектором  $\mathbf{n}'$ . Кроме того, в актуальном положении конус повернут вокруг своей оси на угол  $\varphi$ , причем  $\varphi = 0$  в отсчетном положении. Тогда переход из отсчетного положения в актуальное можно осуществить двумя последовательными поворотами. Первый поворот производим вокруг оси конуса  $QC$  в отсчетном положении, т.е. вокруг вектора  $\mathbf{n}$ , на угол  $\varphi$ . Этот поворот задается тензором  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n})$ . При втором повороте ось конуса  $QC$  переводится из отсчетного положения, определяемого вектором  $\mathbf{n}$ , в актуальное положение, определяемое вектором  $\mathbf{n}'$ . Поворот производится вокруг вектора  $\mathbf{m}$  на угол  $\psi$ , т.е. второй поворот задается тензором  $\mathbf{Q}(\psi \mathbf{m})$ . В результате этих двух поворотов конус  $QC$  переводится из отсчетного положения в актуальное. Полный тензор поворота определяется как композиция описанных поворотов, т.е.

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}). \quad (5.24.6)$$



Обратим внимание, что в формулах типа (5.24.6) последовательность поворотов считается справа-налево, т.е.  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n})$  есть первый поворот, а  $\mathbf{Q}(\psi \mathbf{m})$  второй. При желании мы можем изменить последовательность поворотов. А именно, сначала повернем ось конуса на угол  $\psi$ , т.е. используем тензор поворота  $\mathbf{Q}(\psi \mathbf{m})$ . При этом ось конуса совпадает с вектором

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.24.7)$$

Теперь мы должны повернуть конус вокруг собственной оси, т.е. вокруг вектора  $\mathbf{n}'$ , на угол  $\varphi$ . Этот поворот задается тензором  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}')$ . Суммарный поворот при этом описывается композицией

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}') \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}). \quad (5.24.8)$$

*Упражнение.* Доказать, что повороты (5.24.6) и (5.24.8) тождественно совпадают.

В приложениях представление (5.24.6) значительно удобнее, чем (5.24.8), т.к. для него легче вычисляется угловая скорость. Поэтому ниже будем использовать представление (5.24.6). Угловая скорость, отвечающая повороту (5.24.6), вычисляется по (5.21.3) и дается выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\varphi} \mathbf{n}', \quad \mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.24.9)$$

По условию задачи скорость точки  $\mathbf{C}$  конуса  $\mathbf{QC}$  задана. Для большей определенности зададим ее в виде

$$\mathbf{V}_C = \nu \mathbf{m} \times \mathbf{n}' / \sin(\alpha + \beta), \quad |\mathbf{V}_C| = |\nu|. \quad (5.24.10)$$

Здесь через  $\nu$  обозначена величина скорости, которая может быть и положительной, и отрицательной. Ранее через  $\nu$  обозначался модуль скорости точки  $\mathbf{C}$ . В (5.24.10) учтено, что  $\alpha + \beta < \pi$ . Скорость точки  $\mathbf{C}$  можно вычислить на основе уравнения Эйлера (5.22.4). В данном случае, с учетом (5.24.9) и равенства  $\mathbf{R}_C = h_n \mathbf{n}'$ , имеем

$$\mathbf{V}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C = \dot{\psi} \mathbf{m} \times h_n \mathbf{n}'. \quad (5.24.11)$$

Сравнивая это выражение с (5.24.10), получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\nu}{h_n \sin(\alpha + \beta)}. \quad (5.24.12)$$

Таким образом, угловая скорость прецессии  $\dot{\psi}$  определена. Полная угловая скорость зависит еще от угловой скорости собственного вращения, т.е. вращения конуса  $\mathbf{QC}$  вокруг собственной оси. Для ее нахождения необходимо

сформулировать дополнительные условия, которые зависят от конкретного содержания задачи. Рассмотрим несколько возможных случаев.

**Первый случай: конус скользит без трения по неподвижному конусу.** В этом случае у конуса  $QC$  нет причин для вращения вокруг собственной оси. Поэтому имеем

$$\dot{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{v}{h_n \sin(\alpha + \beta)} \mathbf{m}.$$

Тензор поворота конуса  $QC$  сводится к повороту вокруг  $\mathbf{m}$ . Движение такого рода называется регулярной прецессией. При этом конус  $QC$  всегда обращен одной и той же своей образующей к оси неподвижного конуса. Наблюдатель, находящийся на оси конуса  $QA$  всегда будет видеть только одну половину конуса  $QC$ . Ситуация похожа на вращение Луны вокруг Земли.

**Второй случай: качение конуса без проскальзывания по неподвижному конусу.** Именно этот случай рассмотрен в классическом решении. Отсутствие проскальзывания означает, что скорость точек конуса  $QC$ , лежащих на образующей, по которой соприкасаются конусы, равна нулю

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_B = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}', \quad (5.24.13)$$

где  $\mathbf{e}'$  есть направляющий орт образующей, по которой касаются конусы. Заметим, что было бы ошибкой думать, что  $\mathbf{e}'$  есть повернутая образующая, по которой конусы соприкасались в отсчетном положении. Вектор  $\mathbf{e}'$  лежит в плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}'$ , где  $\mathbf{n}'$  определен выражением (5.24.9). Точно такое же выражение имеет место для вектора  $\mathbf{e}'$

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}. \quad (5.24.14)$$

Таким образом, для угловой скорости получили два выражения (5.24.9) и (5.24.13). Они должны совпадать. Поэтому имеем

$$\dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\phi} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \omega \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}.$$

Умножая это уравнение на  $\mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m})$  слева, получаем

$$\dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\phi} \mathbf{n} = \omega \mathbf{e}. \quad (5.24.15)$$

Это уравнение содержит две неизвестные  $\dot{\phi}$  и  $\omega$ , поскольку  $\dot{\psi}$  определено выражением (5.24.12). Умножая (5.24.15) векторно на  $\mathbf{e}$ , получаем

$$\dot{\psi} \mathbf{m} \times \mathbf{e} + \dot{\phi} \mathbf{n} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (5.24.16)$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{m} \times \mathbf{e} = \sin \alpha \mathbf{k}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{e} = -\sin \beta \mathbf{k}, \quad (5.24.17)$$

где  $\mathbf{k}$  есть единичный вектор, ортогональный плоскости, натянутой на векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{e}$  или, что то же самое, на векторы  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ , поскольку векторы  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{e}$  лежат в одной плоскости. Подставляя (5.24.17) в (5.24.16), получаем

$$\dot{\phi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \dot{\psi} = \frac{v \sin \alpha}{h_n \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}. \quad (5.24.18)$$

Умножая (5.24.15) скалярно на вектор  $\mathbf{e}$ , получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \cos \alpha + \dot{\phi} \cos \beta = \dot{\psi} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}. \quad (5.24.19)$$

Здесь было использовано выражение (5.24.18). Подставляя в (5.24.19) выражение (5.24.12), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{h_n \sin \beta},$$

которое совпадает, разумеется, с (5.24.5). Может показаться, что данное построение значительно длиннее классического, но это не так, ибо в рассмотренном решении найдена не только величина угловой скорости, но и ее направление, а также найден тензор поворота конуса  $QC$ . В классическом решении это построение должно быть добавлено, что будет сделано в заключительной части этого параграфа.

**Третий случай: качение без проскальзывания конуса по вращающемуся конусу.** Допустим, что конус  $QA$  вращается вокруг фиксированной оси  $\mathbf{m}$  с заданной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{m}. \quad (5.24.20)$$

Конус  $QC$  катится без проскальзывания по конусу  $QA$  таким образом, что скорость точки  $C$  по-прежнему определена выражением (5.24.10). Поэтому для конуса  $QC$  остаются справедливыми выражения (5.24.9) и (5.24.12). Меняется условие только для угловой скорости собственного вращения. Поскольку качение происходит без проскальзывания, то скорости точек тех образующих конусов  $QA$  и  $QC$ , по которым конусы соприкасаются должны быть одинаковыми. Указанные образующие совпадают с вектором  $\mathbf{e}'$ . Тогда для точек образующей конуса  $QA$  имеем

$$\mathbf{V}_B^{(1)} = \boldsymbol{\omega}_1 \times l \mathbf{e}'. \quad (5.24.21)$$

Скорости точек конуса  $QC$ , лежащие на образующей  $le'$ , находятся по формуле

$$\mathbf{V}_B^{(2)} = \boldsymbol{\omega} \times l\mathbf{e}'. \quad (5.24.22)$$

Положение образующей  $e'$  определяется скоростью точки  $V_C$ . Поэтому для  $e'$  остается справедливым выражением (5.24.14). Условие отсутствия проскальзывания заключается в равенстве

$$\mathbf{V}_B^{(1)} = \mathbf{V}_B^{(2)}$$

и, с учетом (5.24.21) и (5.24.22), сводится к следующему

$$\omega_1 \mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot l\mathbf{e} = (\dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\phi} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}) \times l\mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}.$$

Умножая это равенство на  $\mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m})$  слева и учитывая тождество

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}),$$

получаем

$$\omega_1 \mathbf{m} \times \mathbf{e} = \dot{\psi} \mathbf{m} \times \mathbf{e} + \dot{\phi} \mathbf{n} \times \mathbf{e}.$$

Отсюда следует равенство

$$(\omega_1 - \dot{\psi}) \mathbf{m} \times \mathbf{e} = \dot{\phi} \mathbf{n} \times \mathbf{e}. \quad (5.24.23)$$

Подставляя сюда (5.24.17), окончательно получаем

$$\dot{\phi} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} (\dot{\psi} - \omega_1). \quad (5.24.24)$$

Теперь угловая скорость конуса  $QC$  полностью определена.

Существуют и многие другие типы условий качения одного конуса по другому. Наиболее интересными и важными являются условия наличия проскальзывания либо с трением, либо случай так называемого упругого проскальзывания (крип). Однако здесь уже одной кинематики недостаточно и нужно привлекать законы механики, к чему мы еще не готовы.

### 5.24.3 Определение поворотов в классическом решении

В классическом решении была найдена угловая скорость конуса  $QC$ . Она определялась выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{h_n \sin \beta} \mathbf{e}' \equiv \omega \mathbf{e}'. \quad (5.24.25)$$

Однако единичный вектор  $\mathbf{e}'$  остался неопределенным. Задача нахождения тензора поворота по вектору угловой скорости называется задачей Дарбу. В данном случае задача Дарбу сводится к следующей

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}' \times \mathbf{P}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}. \quad (5.24.26)$$

При этом мы как бы забыли все детали альтернативного решения, но должны найти тензор поворота  $\mathbf{P}$  конуса  $\mathbf{QC}$  из решения задачи Дарбу (5.24.26). Очевидно, что ось конуса  $\mathbf{QC}$  прецессирует вокруг вектора  $\mathbf{m}$ , т.е. мы имеем

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}, \quad (5.24.27)$$

где  $\psi$  называется углом прецессии, который мы пока не знаем. Тензор поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  будем искать в виде композиции

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}, \quad (5.24.28)$$

где  $\mathbf{S}$  — новый тензор поворота. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \dot{\mathbf{Q}}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \dot{\mathbf{S}} = \dot{\psi} \mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \dot{\mathbf{S}} = \\ &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot [\dot{\psi} \mathbf{m} \times \mathbf{S} + \dot{\mathbf{S}}], \quad \mathbf{e}' \times \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot [\mathbf{e} \times \mathbf{S}]. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (5.24.26), получаем следующее уравнение

$$\dot{\psi} \mathbf{m} \times \mathbf{S} + \dot{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{e} \times \mathbf{S}$$

или в другой форме

$$\dot{\mathbf{S}} = (\boldsymbol{\omega} \mathbf{e} - \dot{\psi} \mathbf{m}) \times \mathbf{S}, \quad \mathbf{S}(0) = \mathbf{E}. \quad (5.24.29)$$

Теперь следует обратить внимание на следующий факт. Повернутая ось конуса  $\mathbf{QC}$  занимает положение  $\mathbf{n}'$ , т.е. имеем равенство

$$\mathbf{n}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \quad (5.24.30)$$

здесь мы учли определение (5.24.27). Подставляя (5.24.28) в (5.24.30), получаем

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}.$$

Иными словами, вектор  $\mathbf{n}$  является неподвижным вектором тензора  $\mathbf{S}$ . Отсюда следует, что тензор  $\mathbf{S}$  имеет вид

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_S = \dot{\varphi} \mathbf{n}, \quad (5.24.31)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_S$  угловая скорость поворота  $\mathbf{S}$ . С другой стороны, угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_S$  равна выражению, стоящему в скобках в уравнении Пуассона (5.24.29). Поэтому имеем

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{e} - \dot{\psi} \mathbf{m} = \dot{\phi} \mathbf{n}. \quad (5.24.32)$$

В этом выражении нам известна величина  $\boldsymbol{\omega}$ , а скорости  $\dot{\psi}$  и  $\dot{\phi}$  подлежат определению. Из (5.24.32) имеем

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{e} \times \mathbf{n} = \dot{\psi} \mathbf{m} \times \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\omega} \mathbf{e} \times \mathbf{m} = \dot{\phi} \mathbf{n} \times \mathbf{m}. \quad (5.24.33)$$

Имеем очевидные формулы

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \sin(\alpha + \beta) \mathbf{k}, \quad \mathbf{e} \times \mathbf{n} = \sin \beta \mathbf{k}, \quad \mathbf{e} \times \mathbf{m} = -\sin \alpha \mathbf{k}.$$

Подставляя эти выражения в (5.24.33), окончательно получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\boldsymbol{\omega} \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad \dot{\phi} = \frac{\boldsymbol{\omega} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (5.24.34)$$

Углы поворота находятся из (5.24.34) очевидным интегрированием. В данном случае задача Дарбу допускает простое решение. Однако это скорее исключение, нежели правило.

Рассмотренная в этом параграфе задача о качении конуса по конусу является одной из простейших задач о пространственных вращениях твердого тела. Тем не менее, начинающим строго рекомендуется тщательно изучить ее и самостоятельно повторить (проделать) все необходимые вычисления.

## 5.25 Шарнир Гука

В задаче о качении конуса по конусу тензор поворота было нетрудно угадать заранее. Сейчас мы рассмотрим задачу, в которой тензор поворота и вообще характер поворотов заранее предсказать довольно трудно, если вообще возможно. В таких случаях необходимо сначала установить какие необходимые ограничения налагаются на тензор поворота. Только после этого следует принимать решение о выборе представления тензора поворота. Шарнир Гука является подходящей иллюстрацией сказанного.

Шарнир Гука используется для передачи вращения от одного вала к другому. Причем оба вала расположены в одной плоскости, но составляют угол  $\theta$  между собой. Схематическое изображение шарнира Гука представлено на Рис.5.14, котором векторы  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  образуют правую ортонормированную тройку. В отсчетном положении входной вал  $CO$  расположен вдоль вектора

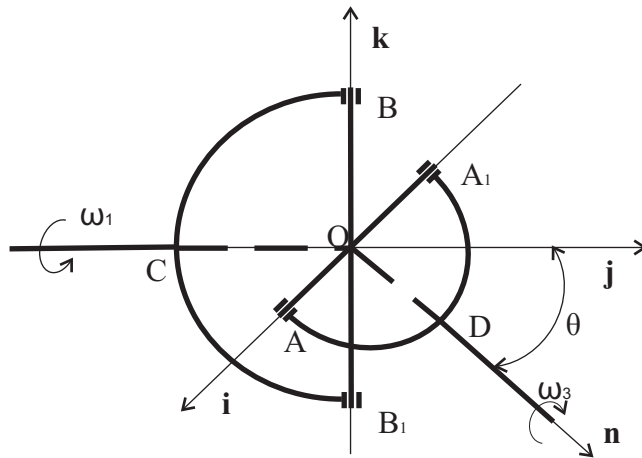


Рис. 5.14: Шарнир Гука

**j**. Вилка **CB** входного вала расположена в плоскости, натянутой на векторы **j** и **k**. Выходной вал **OD** расположен вдоль вектора **n** :  $|\mathbf{n}| = 1$ , который также расположен в вертикальной плоскости, натянутой на **j**, **k**. Входной и выходной валы пересекаются в точке **O**, которая остается неподвижной при вращении валов. Диаметр **OA** вилки **DA** выходного вала в отсчетном положении расположен вдоль вектора **i**. Ось выходного вала, т.е. вектор **n**, ортогональна диаметру **OA** вилки **DA**. Входной вал вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , что заставляет вращаться выходной вал с угловой скоростью  $\omega_3$ .

$$\omega_1 = \omega_1 \mathbf{j}, \quad \omega_3 = \omega_3 \mathbf{n}, \quad (5.25.1)$$

где  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta = \text{const}$ . Соединение входного и выходного валов осуществляется с помощью крестовины **AOB**, которая считается абсолютно твердым телом. Входной вал вращает диаметр **BB₁** крестовины. В результате начинает вращаться диаметр **AA₁** крестовины, что приводит к вращению выходного вала. Таким образом, шарнир Гука представляет собой сочленение трех абсолютно твердых тел: входного вала с вилкой **BCB₁** (тело 1), крестовины **ABA₁B₁** (тело 2) и выходного вала с вилкой **ADA₁** (тело 3). Все три тела имеют одну и ту же неподвижную точку **O**. Понятно, что движение крестовины и выходного вала полностью определяется геометрическими факторами (в частности, углом  $\theta$ ) и поворотами входного вала. Требуется определить угловую скорость выходного вала, а также тензор поворота крестовины **P₂** и угловую скорость крестовины.

Введем обозначения: **P₁**, **P₂**, **P₃** суть тензоры поворота входного вала, крестовины и выходного вала соответственно. Оси поворота входного и вы-

ходного валов заданы и фиксированы

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{j}), \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{n}), \quad (5.25.2)$$

причем угол поворота входного вала известен

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{j} = \dot{\varphi} \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau. \quad (5.25.3)$$

Угол поворота выходного вала  $\psi$  и его угловая скорость подлежат определению. Будем считать, что начало в системе отсчета выбрано в точке  $\mathbf{O}$ . Тогда в отсчетном положении материальные векторы  $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$  и  $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$  совпадают с векторами

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} \sim \mathbf{r}_A = l \mathbf{i}, \quad \overrightarrow{\mathbf{OB}} \sim \mathbf{r}_B = l \mathbf{k}. \quad (5.25.4)$$

В актуальном положении имеем

$$\overrightarrow{\mathbf{OA}} \sim \mathbf{R}_A, \quad \overrightarrow{\mathbf{OB}} \sim \mathbf{R}_B. \quad (5.25.5)$$

Для вектора  $\mathbf{R}_B$  в соответствии с основным уравнением кинематики имеем равенство

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r}_B = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r}_B. \quad (5.25.6)$$

Это равенство справедливо в силу того, что материальный вектор  $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$  одновременно принадлежит как входному валу, так и крестовине. С учетом (5.25.2) и (5.25.4) равенство (5.25.6) можно переписать в виде

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (5.25.7)$$

Получили первое ограничение, которому должен удовлетворять тензор поворота  $\mathbf{P}_2$ . Аналогичные рассуждения применительно к материальному вектору  $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$  дают

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{r}_A = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}(\psi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{i}. \quad (5.25.8)$$

Умножая скалярно последнее равенство на  $\mathbf{n}$  и учитывая, что  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$ , получаем второе ограничение на тензор  $\mathbf{P}_2$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (5.25.9)$$

Таким образом, тензор поворота  $\mathbf{P}_2$  удовлетворяет двум ограничениям (5.25.7) и (5.25.9), которые должны выполняться при всех возможных поворотах крестовины. Всякий тензор поворота зависит от трех параметров. На



эти три параметра, какие бы они не были, наложено два ограничения. Следовательно, только один из упомянутых параметров остается независимым, а два другие могут быть выражены через него. Ограничение (5.25.7) показывает, что тензор  $\mathbf{P}_2$  является двухпараметрическим. Будем искать этот двухпараметрический тензор в следующем виде

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}). \quad (5.25.10)$$

Легко убедиться, что при любых значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  ограничение (5.25.7) тождественно выполнено. Потребуем, чтобы тензор (5.25.10) удовлетворял условию (5.25.9).

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (5.25.11)$$

Вспоминая, что

$$\mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}) = (1 - \cos \beta) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \beta \mathbf{E} + \sin \beta \mathbf{k} \times \mathbf{E},$$

получаем

$$\mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = \cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}.$$

Подставляя это соотношение в (5.25.11) и проводя аналогичные вычисления, получаем равенство

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot (\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}) = \cos \beta \sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \cos \theta = 0$$

или в другой форме

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \theta \sin \alpha. \quad (5.25.12)$$

Итак, тензор  $\mathbf{P}_2$  имеет вид (5.25.10), где параметры  $\alpha$  и  $\beta$  связаны соотношением (5.25.12). Теперь мы должны вернуться к равенству (5.25.6) и первому из равенств (5.25.8). Дифференцируя (5.25.6) по времени и исключая производные от тензоров поворота посредством соответствующих уравнений Пуассона, получаем

$$\dot{\phi} \mathbf{j} \times \mathbf{R}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_B.$$

Умножая это равенство векторно на  $\mathbf{R}_B$ , получаем

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\phi} \mathbf{j} + \mathbf{R}_B(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_B) \mathit{l}^{-2}, \quad (5.25.13)$$

где

$$\mathit{l}^2 = \mathbf{R}_B \cdot \mathbf{R}_B, \quad \mathbf{R}_B \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Дифференцируя (5.25.8) по времени, получаем аналогичное равенство для вектора  $\mathbf{R}_A$

$$\dot{\psi} \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{R}_A(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_A) \mathit{l}^{-2}. \quad (5.25.14)$$

Равенство (5.25.13) позволяет вычислить угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}_2$ , а равенство (5.25.13) позволяет найти угловую скорость выходного вала

$$\dot{\psi} = \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{n}. \quad (5.25.15)$$

Угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_2$ , отвечающая повороту (5.25.10), вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\alpha} \mathbf{j} + \dot{\beta} \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}. \quad (5.25.16)$$

Сравнивая (5.25.13) и (5.25.16), получаем

$$\dot{\alpha} \mathbf{j} + \dot{\beta} \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = \dot{\varphi} \mathbf{j} + \mathbf{R}_B(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_B) \mathbf{l}^{-2}.$$

Проецируя это равенство на вектор  $\mathbf{j}$ , получаем

$$\dot{\alpha} = \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \varphi(t). \quad (5.25.17)$$

Здесь и далее мы принимаем начальные условия в виде

$$\alpha(0) = \beta(0) = \varphi(0) = \psi(0) = 0. \quad (5.25.18)$$

Итак, угол поворота  $\alpha(t)$  оказался равным углу поворота  $\varphi(t)$  входного вала. Чтобы найти  $\dot{\beta}$  достаточно продифференцировать (5.25.12) по времени. Тогда получим

$$\dot{\beta}(1 + \operatorname{tg}^2 \theta \beta) = -\dot{\varphi} \operatorname{tg} \theta \cos \varphi. \quad (5.25.19)$$

Здесь учтено равенство (5.25.17). Исключая из (5.25.19) угол  $\beta$  с помощью (5.25.12), получаем

$$\dot{\beta} = -\frac{\operatorname{tg} \theta \cos \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \varphi} \dot{\varphi} = -\frac{\cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \dot{\varphi}. \quad (5.25.20)$$

Таким образом, угловая скорость крестовины полностью определена:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi} \left[ \mathbf{j} - \frac{\cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} (\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{k}) \right]. \quad (5.25.21)$$

Как видим, угловая скорость крестовины определяется относительно сложным выражением. Осталось вычислить угловую скорость выходного вала. Для этого служит формула (5.25.15), откуда получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \dot{\varphi}. \quad (5.25.22)$$

Отсюда видим, что угловая скорость выходного вала переменна во времени при  $\theta \neq 0$ , даже если угловая скорость входного вала постоянна. Обратим

внимание на сложный характер зависимости угловой скорости выходного вала от углов  $\theta$  и  $\varphi$ . Пусть, например, скорость входного вала постоянна и равна  $\dot{\varphi} = \omega_1$ . Тогда имеем  $\varphi = \omega_1 t$ . Рассмотрим теперь моменты времени такие, что  $\omega_1 t = \pi k$ . В эти моменты времени, согласно (5.25.22), имеем

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{\cos \theta}. \quad (5.25.23)$$

При  $\theta = \pi/2$  угловая скорость выходного вала становится бесконечно большой. Из общих соображений, т.е. исходя из здравого смысла, этот результат кажется сомнительным. Сомнения увеличиваются еще больше, если мы обратимся непосредственно к формуле (5.25.22). Полагая в ней  $\theta = \pi/2$ , получаем, что  $\dot{\psi} = 0$ . Здесь мы встречаемся с любопытными особенностями. С чисто математической точки зрения, мы имеем, хотя и не совсем стандартную, но хорошо известную ситуацию, когда предел функции двух переменных зависит от направления, по которому вычисляется этот предел. Иными словами, с математической точки зрения ничего особенно удивительного в полученном результате нет. Однако подобные фокусы с физической точки зрения вызывают протест у нашей интуиции. Обычно они указывают на не вполне удовлетворительную постановку задачи. Во всяком случае, в данной задаче это именно так. В самом деле, мы допустили, что входной вал может вращаться с заданной угловой скоростью независимо от угловой скорости выходного вала. Это допущение подразумевает, что входной вал вращается двигателем неограниченной мощности, каковых в действительности не существует. Чтобы яснее осознать необходимость двигателя неограниченной мощности, рассмотрим ситуацию, когда угол  $\theta$  близок к  $\pi/2$ , т.е.  $\theta = \pi/2 - \varepsilon$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Разлагая функции  $\sin \varepsilon$  и  $\cos \varepsilon$  в ряд по степеням  $\varepsilon$  и удерживая слагаемые до второго порядка малости включительно, выражение (5.25.22) переписываем в следующей форме

$$\dot{\psi} = \frac{2\varepsilon\dot{\varphi}}{2\sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2\varepsilon\omega_1}{2\sin^2 \omega_1 t + \varepsilon^2 \cos^2 \omega_1 t}. \quad (5.25.24)$$

Читателю рекомендуется построить график функции  $\dot{\psi}/\omega_1$  на интервале  $\pi/2 \leq \omega_1 t \leq 3\pi/2$  при  $\varepsilon = 0.001$ . Из графика видно, что при подходе к точке  $\omega_1 t = \pi$  угловая скорость выходного вала начинает очень быстро нарастать до бесконечно большой величины. После прохождения этой точки угловая скорость выходного вала начинает столь же быстро уменьшаться. Вообразим теперь, что на выходной вал посажен массивный маховик. Тогда двигатель, подключенный к входному валу, должен почти мгновенно раскрутить этот маховик, а затем почти мгновенно затормозить его. Это было

бы возможно только в том случае, если бы двигатель обладал бесконечной мощностью, что практически невозможно. Если мы хотим использовать двигатель ограниченной мощности, то чисто кинематических рассмотрений уже недостаточно. Необходимо привлекать законы механики. Кроме того, некоторые режимы работы требуют другого конструктивного исполнения вилки выходного вала, но на кинематических соотношениях это не отражается.

## 5.26 Сложное движение материальной точки

В приложениях часто используется так называемая лабораторная система отсчета, в которой производятся разного рода измерения. Вместе с тем, лабораторная система отсчета сама движется относительно основной системы отсчета. Последняя в механике и классической физике должна быть инерциальной, ибо в ней и только в ней вводятся такие понятия, как воздействия (силы, моменты и т.д.) и формулируются фундаментальные законы. Инерциальные системы отсчета будут введены во второй части курса. В кинематике мы должны просто научиться пересчитывать результаты лабораторных измерений в соответствующие результаты, имеющие смысл в основной системе отсчета. Чтобы яснее осознать все нижеследующее, рассмотрим воображаемую задачу о полете мухи (материальной точки) в салоне самолета, совершающего полет. Лабораторную систему отсчета естественно связать с самолетом, который, в свою очередь, будем рассматривать как абсолютно твердое тело. Выберем какую-либо точку  $Q$ , которая фиксирована относительно самолета. Выберем тройку материальных векторов  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$ ,  $\overrightarrow{QC}$  таких, что при  $t = 0$  (например, при посадке в самолет в аэропорту) они совпали бы с векторами

$$\mathbf{d}_m : \quad \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n = \delta_{mn}, \quad (5.26.1)$$

заданными в основной системе отсчета. При этом

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{d}_1, \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{d}_2, \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{d}_3. \quad (5.26.2)$$

Введем материальные координаты  $x^1, x^2, x^3$ , жестко связанные с самолетом. Тогда положение точки самолета с координатами  $x^m$  определяется радиус-вектором

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{d}_1 + x^2 \mathbf{d}_2 + x^3 \mathbf{d}_3 \equiv x^m \mathbf{d}_m. \quad (5.26.3)$$

Пока самолет стоит на месте, лабораторная система отсчета совпадает с основной системой отсчета, связанной с Землей. Допустим, что по салону летает муха. Пассажир, сидящий в салоне, будет отмечать ее движение вектором

$$\mathbf{r}_f(t) = x_f^m(t) \mathbf{d}_m, \quad (5.26.4)$$

где  $\mathbf{x}_f^m(\mathbf{t})$  координаты мухи в момент времени  $\mathbf{t}$ . В дальнейшем индекс  $f$  будем опускать и, вместо (5.26.4), писать

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}^m(\mathbf{t}) \mathbf{d}_m. \quad (5.26.5)$$

Надеемся, что читатель не спутает векторы (5.26.3) и (5.26.5). Однако начинающим лучше все-таки использовать более громоздкое, но более точное, обозначение (5.26.4). Пусть самолет приходит в движение и взлетает. Для пассажира ничего не изменится поскольку и материальные векторы  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$ ,  $\overrightarrow{QC}$  (а, следовательно, и векторы  $\mathbf{d}_m$ ), и материальные координаты  $\mathbf{x}^m$  для него останутся неизменными. Движение мухи пассажир будет по-прежнему фиксировать (измерять) с помощью вектора (5.26.4) или, что то же самое, (5.26.5). Однако для наблюдателя, неподвижного относительно основной системы отсчета, ситуация радикально изменится. Лабораторная система отсчета для этого наблюдателя, в отличие от пассажира самолета, уже движется. В частности, движутся точка  $Q$ , и материальные векторы  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$ ,  $\overrightarrow{QC}$ . В то же время, материальные координаты  $\mathbf{x}^m$  остаются неизменными как для пассажира, так и для неподвижного наблюдателя. Пусть материальные векторы  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$ ,  $\overrightarrow{QC}$  в момент времени  $\mathbf{t}$  в основной (“неподвижной”) системе отсчета занимают положения векторов

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{D}_1(\mathbf{t}), \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{D}_2(\mathbf{t}), \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{D}_3(\mathbf{t}). \quad (5.26.6)$$

Поэтому, с точки зрения неподвижного наблюдателя, положение мухи в основной системе отсчета задается вектором

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{x}^m(\mathbf{t}) \mathbf{D}_m(\mathbf{t}). \quad (5.26.7)$$

Введем в рассмотрение тензор поворота

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{D}_m(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{d}_m, \quad (5.26.8)$$

где по индексу  $m$  подразумевается суммирование от 1 до 3. Из (5.26.8) имеем

$$\mathbf{D}_m(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{d}_m. \quad (5.26.9)$$

Подставляя (5.26.9) в (5.26.7), получаем

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{x}^m(\mathbf{t}) \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{d}_m = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}^m(\mathbf{t}) \mathbf{d}_m.$$

Вспоминая (5.26.5), окончательно получаем

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{t}). \quad (5.26.10)$$

Сравнивая это выражение с основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела, видим их большое сходство, что, впрочем, следовало ожидать. Роль абсолютно твердого тела в (5.26.10) выполняет лабораторная система отсчета. Роль полюса выполняет начало  $Q$  в лабораторной системе отсчета. Единственное различие состоит в том, что вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q$ , который в основном уравнении кинематики абсолютно твердого тела определял отсчетное положение рассматриваемой точки  $A$ , теперь определяет положение точки, движущейся относительно лабораторной системы отсчета. Аналогия будет видна еще лучше, если уравнение (5.26.10) переписать в виде

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{r}_Q), \quad (5.26.11)$$

где метка  $A$  соответствует мухе. Вектор  $\mathbf{r}_A(\mathbf{t})$  определяет положение мухи с точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно лабораторной системы отсчета, причем вектор  $\mathbf{r}_Q$  не зависит от времени. Вектор  $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$  определяет положение той же самой мухи с точки зрения наблюдателя, неподвижного в основной системе отсчета. Подчеркнем, что упоминания о наблюдателях не влекут за собой никаких формальных следствий. Они важны только для правильной интерпретации. Все векторы, входящие в (5.26.10) или (5.26.11), определены в основной (неподвижной) системе отсчета. В дальнейшем строчными буквами будем обозначать величины, наблюдаемые пассажиром в лабораторной системе отсчета. Прописными буквами будем обозначать величины, воспринимаемые наблюдателем в основной системе отсчета.

Для вычисления скорости мухи нужно продифференцировать (5.26.10) по времени. В результате получим

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{v},$$

где

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (5.26.12)$$

Исключая из предыдущего равенства вектор  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}$  с помощью (5.26.10), получаем

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.26.13)$$

В учебниках по теоретической механике эту формулу обычно записывают в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r, \quad (5.26.14)$$

где

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q), \quad \mathbf{V}_r = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.26.15)$$

Вектор  $\mathbf{V}_e$  называется переносной скоростью, он характеризует скорость той точки лабораторной системы отсчета, в которой в данный момент времени находится муха. Вектор  $\mathbf{V}_r$  называется вектором относительной скорости и является скоростью мухи относительно лабораторной системы отсчета с точки зрения наблюдателя в основной системе отсчета.

Обратимся к вычислению ускорений. Для этого достаточно продифференцировать (5.26.13) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V} - \mathbf{V}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{v}}.$$

Исключая отсюда вектор  $\mathbf{V} - \mathbf{V}_Q$  с помощью равенства (5.26.13) и проводя перегруппировку слагаемых, получаем

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_Q + \mathcal{W} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}, \quad (5.26.16)$$

где

$$\mathcal{W} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (5.26.17)$$

Тензор  $\mathcal{W}$  называется тензором угловых ускорений лабораторной системы отсчета. Он совпадает с тензором угловых ускорений абсолютно твердого тела. Вектор  $\mathbf{w}$  есть ускорение мухи относительно лабораторной системы отсчета с точки зрения пассажира самолета. Выражение (5.26.16) часто записывают в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_r, \quad (5.26.18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_e &= \mathbf{W}_Q + \mathcal{W} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q), \\ \mathbf{W}_c &= 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{W}_r = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (5.26.19)$$

Вектор  $\mathbf{W}_e$  называется переносным ускорением и выражает ускорение той точки лабораторной системы отсчета, в которой в данный момент времени находится муха. Вектор  $\mathbf{W}_c$  называется ускорением Кориолиса. Вектор  $\mathbf{W}_r$  называется относительным ускорением. Никакой особенной пользы из представления (5.26.18) извлечь не удастся. В приложениях удобнее работать непосредственно с формулой (5.26.16).

*Замечание.* Считается, что выражения (5.26.18) и (5.26.19) удобны при составлении уравнений движения в неинерциальных системах отсчета с помощью так называемых сил инерции. Для не очень искушенных в механике людей такой подход чреват серьезными ошибками. Поэтому мы рекомендуем начинающим воздерживаться от подобных приемов. В последующем у нас будет повод вернуться к обсуждению этого вопроса.

## 5.27 Сложные движения абсолютно твердого тела

В предыдущем параграфе были рассмотрены сложные движения материальной точки. При этом сложным называлось движение, которое было композицией двух движений: движения материальной точки относительно лабораторной системы отсчета и движения самой лабораторной системы отсчета относительно основной, условно неподвижной, системы отсчета. Аналогичные построения нетрудно распространить на сложные движения абсолютно твердого тела.

Продолжим аналогию с полетом мухи (материальной точки) в салоне самолета. Только вместо мухи, будем рассматривать шляпу, которой решили перебрасываться два чрезмерно любознательных пассажира, сидящих в разных концах салона, с целью исследования закономерностей ее полета. При этом их интересовали не только положения шляпы в полете, но и ее ориентация относительно салона самолета.

Лабораторную систему отсчета (ЛСО) жестко свяжем с салоном самолета. Выберем точку  $Q$ , фиксированную относительно самолета и тройку материальных векторов  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$ ,  $\overrightarrow{QC}$ , которые в отсчетном положении соответствуют векторам

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{d}_1, \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{d}_2, \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_s = \delta_{ms}. \quad (5.27.1)$$

Векторы  $\mathbf{d}_m$  определены в основной системе отсчета. Таким образом, лабораторная система отсчета порождается репером

$$\{Q, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_m\}$$

и материальными координатами  $x^m$ . Положение точки лабораторной системы отсчета с координатами  $x^m$  определяется заданием вектора

$$\mathbf{x} = x^m \mathbf{d}_m. \quad (5.27.2)$$

Положение этой же точки лабораторной системы отсчета в основной системе отсчета в отсчетный момент времени определяется вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{x} = \mathbf{r}_Q + x^m \mathbf{d}_m. \quad (5.27.3)$$

Вернемся к лабораторной системе отсчета. Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела полностью сохраняется в лабораторной системе отсчета. Поэтому имеем

$$\mathbf{X}_A(t) = \mathbf{X}_S(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S), \quad (5.27.4)$$



где точка  $S$  есть произвольно выбираемая точка шляпы (полюс), точка  $A$  есть рассматриваемая точка шляпы,  $\mathbf{x}_A$  и  $\mathbf{x}_S$  суть векторы положения точек  $A$  и  $S$  в отсчетном положении в лабораторной системе отсчета, векторы  $\mathbf{X}_A$   $\mathbf{X}_S$  суть векторы положения точек  $A$  и  $S$  в актуальном положении в лабораторной системе отсчета,  $\mathbf{P}(t)$  есть тензор поворота шляпы в лабораторной системе отсчета. Выражение (5.27.4) определяет движение точки  $A$  шляпы, наблюдаемое пассажиром самолета. В основной системе отсчета ситуация выглядит несколько иначе. Положение точки  $A$  в основной системе отсчета определяется заданием вектора

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{X}_A(t), \quad (5.27.5)$$

где  $\mathbf{Q}(t)$  есть тензор поворота лабораторной системы отсчета в основной системе отсчета. Аналогичное равенство можно записать для вектора положения полюса  $S$

$$\mathbf{R}_S(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{X}_S(t), \quad (5.27.6)$$

Из (5.27.5) и (5.27.6) следует равенство

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_S(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot [\mathbf{X}_A(t) - \mathbf{X}_S(t)], \quad (5.27.7)$$

которые, впрочем, можно было написать сразу на основе очевидного равенства

$$|\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_S(t)| = |\mathbf{X}_A(t) - \mathbf{X}_S(t)|.$$

Подставляя (5.27.4) в (5.27.7), получаем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_S(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S). \quad (5.27.8)$$

Используя (5.27.3) и (5.27.6), окончательно получаем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{X}_S(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S). \quad (5.27.9)$$

Здесь величины  $\mathbf{X}_S(t)$ ,  $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S$  и  $\mathbf{P}(t)$  фиксируются (измеряются) пассажиром самолета. Величины  $\mathbf{R}_Q$  и  $\mathbf{Q}(t)$  фиксируются только наблюдателем, неподвижным в основной системе отсчета. По выражению (5.27.9) нетрудно найти скорости и ускорения точки  $A$  относительно основной системы отсчета. В (5.27.9) полный поворот шляпы выражается как композиция двух поворотов: поворота шляпы относительно лабораторной системы отсчета и дополнительного поворота вместе с лабораторной системой отсчета.

*Упражнение.* Используя выражение (5.27.9), вывести формулы для скорости и ускорения точки  $A$  и дать интерпретацию всех слагаемых в полученных формулах.

В заключение этого пункта отметим, что если по шляпе, летящей по салону, ползает муха, то для описания ее движения достаточно в (5.27.8) принять

$$\mathbf{x}_A = \mathbf{x}_A(\mathbf{t}).$$

## 5.28 Относительные повороты

При решении некоторых прикладных задач необходимо использовать понятие поворота одного вращающегося тела относительно другого вращающегося тела. Несмотря на кажущуюся простоту этого вопроса, здесь необходимо соблюдать аккуратность в формулировках. Начнем с простого вопроса: чему равна скорость обратного поворота? Иногда встречается следующее утверждение: “Пусть  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$  есть угловая скорость тела. Тогда очевидно, что угловая скорость обратного поворота равна  $(-\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}))$ .” Далее высказываются различные соображения в поддержку этого утверждения. Необходимо подчеркнуть, что в подобных вопросах разного рода рассуждения и аргументы неуместны. У нас есть определение угловой скорости. И ответ на поставленный вопрос должен быть получен из этого определения и никак иначе. Итак, пусть  $\mathbf{P}(\mathbf{t})$  есть тензор поворота. Тогда тензор  $\mathbf{P}^T(\mathbf{t})$  есть тензор обратного поворота. Угловая скорость обратного поворота должна определяться в соответствии с уравнением Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}^T = \boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{P}^T, \quad (5.28.1)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_*$  есть искомая угловая скорость обратного поворота. Транспонируя обе части уравнения (5.28.1), получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times (-\boldsymbol{\omega}_*) \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_* = -\boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_* = -\mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (5.28.2)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  есть правая угловая скорость исходного поворота. Таким образом, угловая скорость обратного поворота равна правой угловой скорости исходного поворота, взятой с обратным знаком. Высказанное выше утверждение, о том что  $\boldsymbol{\omega}_* = -\boldsymbol{\omega}$ , справедливо тогда и только тогда, когда вращение происходит вокруг фиксированной оси.

Обратимся к введению относительных поворотов. Пусть даны два абсолютно твердых тела. Выделим в одном из них материальные векторы  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$ ,  $\overrightarrow{QC}$  таким образом, чтобы в отсчетном положении выполнялись соотношения

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{d}_1, \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{d}_2, \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{d}_3; \quad \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_n = \delta_{kn}. \quad (5.28.3)$$

В актуальном положении имеем аналогичные соотношения

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{D}_1(t), \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{D}_2(t), \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{D}_3(t); \quad \mathbf{D}_k(t) \cdot \mathbf{D}_n(t) = \delta_{kn}. \quad (5.28.4)$$

Для второго тела проводим аналогичные построения, но все вводимые величины снабжаем звездочками. Тензоры поворота рассматриваемых тел определим равенствами

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}_k(t) \otimes \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{P}_*(t) = \mathbf{D}_k^*(t) \otimes \mathbf{d}_k^*. \quad (5.28.5)$$

В этих равенствах, как всегда, подразумевается суммирование от 1 до 3.

**Определение:** поворотом тела 1 относительно тела 2 называется поворот, задаваемый тензором поворота

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{D}_k(t) \otimes \mathbf{D}_k^*(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_k(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{D}_k^*(t). \quad (5.28.6)$$

Первое из этих равенств можно переписать в следующей форме

$$\mathbf{Q}(t) = (\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_k) \otimes (\mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{d}_k^*) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{P}_*^T(t), \quad (5.28.7)$$

где тензор  $\mathbf{Q}_0$  есть тензор начального поворота, переводящий отсчетное положение тела 2 в отсчетное положение тела 1

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k^*. \quad (5.28.8)$$

Можно выбрать отсчетные положения тел совпадающими. Тогда тензор начального поворота будет равен единичному тензору. Можно также, если это желательно, дать какое-либо другое определение относительного поворота. Важно только, чтобы это определение имело точную математическую формулировку, а не сводилось к чисто интуитивным соображениям. После того, как дано определение относительного поворота, нетрудно вычислить относительную угловую скорость

**Определение:** относительной угловой скоростью называется угловая скорость относительного поворота (5.28.7).

Относительная угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}_Q$  вычисляется по (5.28.7) по стандартному правилу вычисления угловой скорости композиции поворотов

$$\boldsymbol{\omega}_Q(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot (-\mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_*(t)) = \boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_*(t). \quad (5.28.9)$$

Здесь мы воспользовались формулой (5.28.2) для угловой скорости обратного поворота.

## 5.29 Замена систем отсчета

*Материал этого и следующего параграфов при первых чтениях можно пропустить. Он обязателен только для тех, кто интересуется фундаментальными основами физики и, в частности, ее логическими основаниями.*

Система отсчета — это основополагающее понятие в физике. Без введения системы отсчета практически все понятия, вводимые в физике, теряют определенность и не могут использоваться в рациональной науке. Тем не менее, именно это понятие излагается в литературе либо слишком расплывчато и неопределенно, либо (чаще всего) вообще не обсуждается. Исходные представления о системе отсчета были изложены в первых параграфах третьей и пятой глав. Эти представления недостаточны для полного изложения механики, и они будут существенно дополнены в главе, посвященной формулировке фундаментальных законов механики. Собственно, именно там и будет введено полное определение инерциальных систем отсчета, относительно которых формулируются фундаментальные законы механики. Однако некоторые дополнительные представления о системах отсчета можно ввести уже сейчас. Прежде всего, это относится к замене системы отсчета. Поскольку система отсчета вводится в достаточной мере произвольно, то любая физическая теория, претендующая на описание объективных закономерностей, должна быть инвариантна относительно замены одной системы отсчета любой другой системой отсчета. При этом необходимо указать точный математический и физический смысл понятия замены системы отсчета.

По определению и по способу введения система отсчета — это рукотворная конструкция, не существующая в Природе. Она необходима для того, чтобы мы были в состоянии писать какие бы то ни было уравнения без утраты их смысла. Системы отсчета не являются моделями “физического пространства”, но без них нельзя построить то, что мы называем физическим пространством. В частности, математическое время, используемое при введении систем отсчета, не имеет никакого отношения к “реальному” времени, но может использоваться при введении понятия “реального времени”. Заметим, что математическое время нами еще не введено и пока что это понятие является сугубо интуитивным.

**Определение:** телом отсчета называется репер

$$\{0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\} \quad (5.29.1)$$

с присоединенным к нему множеством точек

$$\mathbf{r} = x^k \mathbf{d}_k = x^1 \mathbf{d}_1 + x^2 \mathbf{d}_2 + x^3 \mathbf{d}_3, \quad -\infty < x^k < \infty. \quad (5.29.2)$$

Смысл “векторов”  $\mathbf{d}_k$  разъяснен в параграфе 3.1. Там же указано, что движение тела отсчета принципиально не определено, но движения других тел относительно тела отсчета определить можно.

**Определение:** тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.

Можно ввести сколь-угодно много различных систем отсчета. Движения одного и того же тела относительно разных систем отсчета выглядят совершенно по-разному. Поэтому описания движений относительно выбранных систем отсчета не носят объективного характера. Если какая-либо наука претендует на изучение объективной реальности, а рациональная механика является именно такой наукой, то при своем развитии она должна тем или иным способом избавиться от произвола, связанного с невозможностью определить собственное движение системы отсчета. В механике для этой цели используется специальный принцип, который называется принципом материальной объективности или принципом независимости от выбора системы отсчета. О самом этом принципе речь пойдет позднее. Заметим только, что применение этого принципа требует умения пересчитывать характеристики, заданные в одной системе отсчета, в характеристики, определенные в другой системе отсчета. Иными словами, необходимо научиться производить замену системы отсчета. Прежде всего, следует отчетливо осознать, что разные системы отсчета — это разные миры, непосредственно между собой не взаимодействующие. Никакие операции между величинами, определенными в разных системах отсчета, невозможны.

Рассмотрим две системы отсчета:  $\mathbf{S}$ -систему и  $\mathbf{S}_*$ -систему. Пусть  $\mathbf{S}$ -система определена репером (5.29.1) и координатами (5.29.2). В дополнение к этим соотношениям необходимо задать положительно определенную симметричную матрицу

$$\mathbf{g}_{mn} = \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n = |\mathbf{d}_m| |\mathbf{d}_n| \cos \alpha_{mn}, \quad 0 \leq \alpha_{mn} < \pi, \quad (5.29.3)$$

где  $\alpha_{mn}$  — суть углы между векторами  $\mathbf{d}_m$  и  $\mathbf{d}_n$ . Диагональные компоненты матрицы  $\mathbf{g}_{mn}$  задают длины векторов  $\mathbf{d}_m$ . Имеем

$$|\mathbf{d}_1| = \sqrt{g_{11}}, \quad |\mathbf{d}_2| = \sqrt{g_{22}}, \quad |\mathbf{d}_3| = \sqrt{g_{33}}, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0.$$

Матрица  $\mathbf{g}_{mn}$  в значительной мере задается произвольно и определяет масштабы в  $\mathbf{S}$ -системе. В правильно построенной физической теории никакие физические законы не должны зависеть от выбора этих масштабов. Вторая система отсчета  $\mathbf{S}_*$  вводится совершенно аналогично. Величины, относящиеся

к  $\mathcal{S}_*$ -системе будем помечать звездочкой. Таким образом,  $\mathcal{S}_*$ -система определяется заданием репера

$$\{0_*, \mathbf{d}_1^*, \mathbf{d}_2^*, \mathbf{d}_3^*\} \quad (5.29.4)$$

с присоединенным к нему множеством точек

$$\mathbf{r}_* = x_*^k \mathbf{d}_k^* = x_*^1 \mathbf{d}_1^* + x_*^2 \mathbf{d}_2^* + x_*^3 \mathbf{d}_3^*, \quad -\infty < x_*^k < \infty \quad (5.29.5)$$

и фундаментальной матрицей

$$g_{mn}^* = \mathbf{d}_m^* \cdot \mathbf{d}_n^* = |\mathbf{d}_m^*| |\mathbf{d}_n^*| \cos \alpha_{mn}^*, \quad 0 \leq \alpha_{mn}^* < \pi. \quad (5.29.6)$$

Будем считать, что обе системы отсчета снабжены одинаковыми часами. Как будет показано позднее, во второй части курса, это допущение не слишком обременительно. Иными словами, преобразование времени пока рассматривать не будем. Как уже отмечалось, мы не в состоянии наблюдать “истинное” движение введенных систем отсчета. Однако движение  $\mathcal{S}_*$ -системы относительно  $\mathcal{S}$ -системы мы наблюдать можем. Возможно, конечно, и обратное: фиксация движения  $\mathcal{S}$ -системы относительно  $\mathcal{S}_*$ -системы. Рассмотрим движущуюся материальную точку  $A$ . Тогда ее движение в рассматриваемых системах отсчета определяется заданием векторов положение

$$\mathbf{R}(t) = x^k(t) \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{R}_*(t) = x_*^k(t) \mathbf{d}_k^*. \quad (5.29.7)$$

Здесь координаты  $x^k(t)$  и  $x_*^k(t)$  являются координатами точки  $A$  в соответствующих системах отсчета. Задача заключается в том, чтобы выяснить как связаны между собой движения (5.29.7) точки  $A$ . Проще всего определить движение начала  $\mathcal{S}_*$ -системы, т.е. точки  $O_*$ , относительно  $\mathcal{S}$ -системы, поскольку его мы можем наблюдать непосредственно. Пусть это движение определяется заданием вектора

$$\mathbf{R}_{O_*}(t) \equiv \mathbf{a}(t), \quad (5.29.8)$$

причем оба эти вектора определены в  $\mathcal{S}$ -системе. Примем, что в какой-то момент времени, принимаемый за начальный  $t = 0$ , векторы  $\mathbf{d}_k^*$  совпадают с векторами  $\tilde{\mathbf{d}}_k$  в  $\mathcal{S}$ -системе

$$t = 0: \quad \mathbf{d}_k^* \sim \tilde{\mathbf{d}}_k. \quad (5.29.9)$$

В актуальный момент времени  $t$  имеем аналогичное соотношение

$$t = t: \quad \mathbf{d}_k^* \sim \tilde{\mathbf{D}}_k(t), \quad (5.29.10)$$

где векторы  $\tilde{\mathbf{D}}_k(\mathbf{t})$  также определены в  $\mathcal{S}$ -системе. Поскольку тело отсчета является абсолютно твердым телом, то существует такой тензор поворота  $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ , что справедливо равенство

$$\tilde{\mathbf{D}}_k(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{d}}_k, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = 1. \quad (5.29.11)$$

Теперь движение точки  $\mathbf{A}$  относительно  $\mathcal{S}$ -системы можно записать в следующем виде

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \chi_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{D}}_k(\mathbf{t}). \quad (5.29.12)$$

С учетом (5.29.11) это равенство можно переписать в виде

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\chi_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{d}}_k), \quad (5.29.13)$$

где вектор  $\mathbf{a}(\mathbf{t})$  и тензор поворота  $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$  определяют движение  $\mathcal{S}_*$ -системы относительно  $\mathcal{S}$ -системы. Вектор  $\chi_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{d}}_k$ , входящий в (5.29.13), описывает в  $\mathcal{S}$ -системе движение материальной точки в точно таком виде, как оно происходит в  $\mathcal{S}_*$ -системе. Вводя в рассмотрение вектор

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{t}) = \chi_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{d}}_k, \quad (5.29.14)$$

равенство (5.29.13) переписываем в виде

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{t}). \quad (5.29.15)$$

Если мы рассматриваем движение двух материальных точек  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , то для каждой из них мы имеем равенства, аналогичные (5.29.15)

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A(\mathbf{t}), \quad \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_B(\mathbf{t}). \quad (5.29.16)$$

Из этих равенств следует, что

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B). \quad (5.29.17)$$

Соотношения (5.29.15) и (5.29.17), устанавливая замены системы отсчета, играют важную роль в механике. Они накладывают существенные ограничения на вид используемых в теории физических характеристик. Как это проявляется конкретно, будет показано немного ниже.

Сейчас необходимо обсудить одну особенность замены точек отсчета. В механике существенную роль играют так называемый принцип материальной объективности (или принцип независимости материальных характеристик от выбора системы отсчета) и принцип инвариантности материальных характеристик при наложении жестких движений. Кажется ясным, что замена системы отсчета и наложение жестких движений (движений системы

как абсолютно твердого тела) должны приводить к совершенно идентичным результатам. Именно это и следует из сравнения формул (5.26.10) и (5.29.15), поскольку по существу между ними нет никакого различия. Тем не менее, в литературе [76] между двумя вышеуказанными принципами имеется существенное различие. А именно, в то время как в равенстве (5.26.10) фигурирует тензор поворота, в равенстве (5.29.15) вместо тензора поворота  $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$  фигурирует просто ортогональный тензор, определитель которого может равняться как  $(+1)$ , так и  $(-1)$ . Объяснялось это тем, что рассматриваемые системы отсчета могут иметь разные ориентации. Однако выше было детально показано, что при замене системы отсчета ее ориентация вообще не участвует в рассмотрении, а в выражение (5.29.15) входит именно тензор поворота и заменить его ортогональным тензором общего вида категорически нельзя. Поэтому традиционную формулировку замены системы отсчета [76] (стр. 46) следует признать ошибочной.

Выражение (5.29.15) показывает, как преобразуются трансляционные движения при замене системы отсчета. Теперь мы должны установить, как меняются спинорные движения при замене системы отсчета. В целом, рассмотрения здесь аналогичны таковым в параграфе 3.24. Тем не менее, сейчас мы повторим эти рассуждения в несколько иной последовательности. Пусть дано движущееся абсолютно твердое тело. Будем рассматривать движение этого тела в двух системах отсчета. В обеих системах отсчета справедлива основная теорема кинематики абсолютно твердого тела. Поэтому имеем

$$\mathbf{R}_A^*(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q^*(\mathbf{t}) + \mathbf{P}_*(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_A^* - \mathbf{r}_Q^*) \quad (5.29.18)$$

в  $S_*$ -системе и

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q) \quad (5.29.19)$$

в  $S$ -системе. В этих выражениях полюс в теле обозначен буквой  $Q$ . Условимся, что отсчетные положения тела в обеих системах согласованы между собой так, что при  $\mathbf{t} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q = \tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q \sim \mathbf{r}_A^* - \mathbf{r}_Q^*. \quad (5.29.20)$$

Понятно, что в другие моменты времени отношение (5.29.20) уже не справедливо. В частности, забегая немного вперед, в момент времени  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$  имеем

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q) \sim \mathbf{r}_A^* - \mathbf{r}_Q^*, \quad (5.29.21)$$

где  $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$  — тензор поворота  $S_*$ -системы относительно  $S$ -системы. Иными словами, при  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$  вектор  $\tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q$  уже не является “отпечатком” в  $S$ -системе вектора  $\mathbf{r}_A^* - \mathbf{r}_Q^*$ , заданного в  $S_*$ -системе.



Вообразим теперь, что  $S_*$ -система неподвижна относительно  $S$ -системы. Тогда “отпечаток” выражения (5.29.18) в  $S$ -системе, очевидно, имеет вид

$$\tilde{\mathbf{R}}_A(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{R}}_Q(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q), \quad (5.29.22)$$

где все величины с тильдами определены уже в  $S$ -системе. Ясно, что, например, вектор,  $\tilde{\mathbf{R}}_A(\mathbf{t})$  показывает положение точки  $A$  не относительно начала в  $S$ -системе, а относительно положения точки  $O_*$  в  $S$ -системе. Тензор  $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t})$  показывает поворот тела точно таким, каким его видит наблюдатель, неподвижный относительно  $S_*$ -системы. Поскольку  $S_*$ -система на самом деле движется относительно  $S$ -системы, то ее движение накладывается на движение (5.29.22). Таким образом, имеем

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A(\mathbf{t}), \quad (5.29.23)$$

где  $\mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t})$  задает движение начала  $S_*$ -системы относительно  $S$ -системы, а тензор поворота  $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$  задает поворот  $S_*$ -системы относительно  $S$ -системы. Подставляя (5.29.22) в (5.29.23) и учитывая (5.29.20), получаем

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q). \quad (5.29.24)$$

Сравнивая это выражение с (5.29.19), видим, что

$$\mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_Q(\mathbf{t}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}). \quad (5.29.25)$$

Преобразованиями (5.29.24)–(5.29.25) определяется замена системы отсчета. Величины с тильдами в этих выражениях показывают в  $S$ -системе точный слепок того, что видит наблюдатель, неподвижный относительно  $S_*$ -системы.

*Важно отчетливо осознать, что замена системы отсчета принципиально не сводится к чисто математическим преобразованиям, но включает в себя неформализуемую операцию переноса объектов, выраженную, например, соответствием (5.29.20).*

Итак, выше были получены выражения (5.29.15) и (5.29.25), связывающие движения в разных системах отсчета. По ним простым дифференцированием можно установить формулы, связывающие скорости и ускорения одного и того же объекта в разных системах отсчета. Дифференцируя (5.29.15) по времени получаем

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_{O}(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_O(\mathbf{t}) \times (\mathbf{R}(\mathbf{t}) - \mathbf{a}(\mathbf{t})) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{t}), \quad (5.29.26)$$

где  $\mathbf{V}_O(\mathbf{t})$  и  $\boldsymbol{\omega}_O(\mathbf{t})$  — трансляционная и угловая скорость  $S_*$ -системы относительно  $S$ -системы,  $\mathbf{V}(\mathbf{t})$  — скорость материальной точки в  $S_*$ -системе, перенесенная в  $S$ -систему. Дифференцируя (5.29.26) по времени, находим вектор

ускорения

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_O + \boldsymbol{\omega}_O \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{a}) + 2\boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{W}}, \quad (5.29.27)$$

где

$$\mathbf{W} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_O \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_O.$$

Все эти выражения уже хорошо известны и не требуют дополнительных комментариев. Аналогичные рассуждения можно провести и для движений твердого тела (5.29.18) и (5.29.19). Для последнего необходимо иметь в виду формулы (5.29.25). Дифференцируя (5.29.18) по времени, получаем уравнение Эйлера для  $\mathbf{S}_*$ -системы. Это уравнение можно записать в двух почти эквивалентных формах. Одна из них представлена с помощью тензора спина

$$\mathbf{V}_A^*(t) = \mathbf{V}_Q^*(t) + \mathbf{S}_*(t) \cdot (\mathbf{R}_A^* - \mathbf{R}_Q^*), \quad \mathbf{S}_* = \dot{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{P}_*^T. \quad (5.29.28)$$

Другая представлена с помощью вектора угловой скорости

$$\mathbf{V}_A^*(t) = \mathbf{V}_Q^*(t) + \boldsymbol{\omega}_*(t) \times (\mathbf{R}_A^*(t) - \mathbf{R}_Q^*(t)). \quad (5.29.29)$$

Существенное различие между (5.29.28) и (5.29.29) заключается в том, что при получении (5.29.28) ориентация  $\mathbf{S}_*$ -системы не имеет значения, а при переходе от тензора спина к вектору угловой скорости, т.е. при переходе к выражению (5.29.29), ориентация  $\mathbf{S}_*$ -системы по необходимости принимается во внимание. Сначала мы воспользуемся выражением (5.29.28), не требуя понятия ориентации системы отсчета. При переносе (5.29.28) в  $\mathbf{S}$ -систему необходимо мысленно считать, что обе системы отсчета неподвижны друг относительно друга. Тогда в  $\mathbf{S}$ -системе получим

$$\tilde{\mathbf{V}}_A(t) = \tilde{\mathbf{V}}_Q(t) + \tilde{\mathbf{S}}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_A(t) - \tilde{\mathbf{R}}_Q(t)), \quad \tilde{\mathbf{S}} = \dot{\tilde{\mathbf{P}}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T. \quad (5.29.30)$$

где  $\tilde{\mathbf{P}}(t)$  имеет тот же смысл, что и в представлении (5.29.22). Выражение (5.29.30) изображает в  $\mathbf{S}$ -системе точно такую же ситуацию, какую видит наблюдатель, неподвижный в  $\mathbf{S}_*$ -системе. Обратимся к рассмотрению движения абсолютно твердого тела в  $\mathbf{S}$ -системе. Дифференцируя (5.29.19) по времени, получаем

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \mathbf{S}(t) \cdot (\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_Q(t)), \quad \mathbf{S} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T. \quad (5.29.31)$$

Учтем теперь соотношения (5.29.25). Тогда получим

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{V}_O + \mathbf{S}_O \cdot (\mathbf{R}_Q - \mathbf{R}_{O_*}) + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_Q, \quad \mathbf{S}_Q = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (5.29.32)$$

Дифференцируя второе из соотношений (5.29.25) и переходя к тензорам спина, получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{P}}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{P}}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{S}_Q \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}.$$

Умножая это уравнение скалярно на  $\mathbf{P}^T$  справа, получаем формулу для преобразования спина при замене системы отсчета

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \mathbf{S}_O(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{t}), \quad (5.29.33)$$

где  $\mathbf{S}_Q$  есть тензор спина  $\mathbf{S}_*$ -системы относительно  $\mathbf{S}$ -системы. Сравнивая (5.29.25) и (5.29.33), видим, что повороты мультипликативны, а спины — аддитивны. Теперь уже нетрудно установить закон преобразования угловой скорости при замене системы отсчета. По определению угловой скорости, как сопутствующего вектора тензора спина, имеем

$$\mathbf{S}_O = \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}. \quad (5.29.34)$$

Подставляя эти выражения в (5.29.33) и учитывая тождество

$$\mathbf{Q} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \times \mathbf{E},$$

получаем

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_O(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{t}). \quad (5.29.35)$$

При принятом способе изложения ориентация системы отсчета нам понадобилась только в  $\mathbf{S}$ -системе, причем ориентация  $\mathbf{S}_*$ -системы не имеет значения. Если бы мы переносили равенство (5.29.29) из  $\mathbf{S}_*$ -системы в  $\mathbf{S}$ -систему, то нам пришлось бы учитывать ориентацию обеих систем. В результате, конечно, вновь получили бы (5.29.35).

**Упражнение:** доказать это утверждение, т.е. проделать операцию переноса для выражения (5.29.29).

В заключение этого пункта заметим, что до сих пор мы не ограничивали класса допустимых систем отсчета. Для инерциальных систем отсчета будут справедливы ограничения

$$\mathbf{V}_O(\mathbf{t}) = \text{const}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_O = \mathbf{0}. \quad (5.29.36)$$

При этом, например, выражение (5.29.26) принимает вид

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_O + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{t}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{V}}}(\mathbf{t}). \quad (5.29.37)$$

Каким образом и для каких целей используются замены систем отсчета в механике, будет кратко обсуждено в следующем параграфе.

### 5.30 Принцип материальной объективности

В основе всей рациональной механики лежит идея об объективном, т.е. не зависящем от нашего воображения, существовании реального мира. Целью рациональной механики является изучение законов, управляющих поведением реальных объектов. В кажущемся противоречии со сказанным находится тот факт, что изложение механики мы начинаем с введения систем отсчета, являющихся плодом нашего воображения и не существующих в Природе. Использование систем отсчета аналогично применению лесов при возведении зданий. Леса используются при строительстве, но по его завершении они убираются. В рациональной механике мы вводим в рассмотрение системы отсчета, но наряду с ними вводится специальный принцип, называется принципом материальной объективности, суть которого заключается в требовании, чтобы в окончательных построениях фигурировали только объективные характеристики, не зависящие от выбора системы отсчета.

*Определение:* скаляр  $\mathbf{a}$  называется объективным, если для произвольно взятых двух систем отсчета, справедливо равенство

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}, \quad \tilde{\mathbf{a}} \sim \mathbf{a}_*, \quad (5.30.1)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}_*$  — суть значения рассматриваемого скаляра в  $S$ -системе и  $S_*$ -системе соответственно.

Хорошо знакомым примером объективного скаляра является масса тела. Менее знакомым, но не менее важным, примером объективного скаляра является внутренняя энергия тела. Сами эти понятия будут введены позднее. Сейчас мы просто собираемся показать, как работает принцип материальной объективности, и к каким следствиям это приводит. Если принять, что масса тела  $\mathbf{m}$  является объективным скаляром, то она не может зависеть от скорости тела, и это уже теорема, т.е. строго доказываемый на основе материальной объективности факт. Поэтому, часто принимаемое в физике утверждение об известной зависимости массы от скорости, находится в резком противоречии с принципом материальной объективности. Следует ли отсюда, что нужно отказаться от принципа материальной объективности? Этот вопрос сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Не вдаваясь в детали, просто отмечаем, что отказ от принципа материальной объективности равносителен отказу от признания существования объективных закономерностей природных явлений. Именно так и поступают в современной теоретической физике. В рациональной механике любое нарушение принципа материальной объективности рассматривается как грубейшая ошибка и считается совершенно недопусти-

мым. Хотя сам термин “принцип материальной объективности” возник в механике всего несколько десятилетий тому назад, но на интуитивном уровне этот принцип используется, по крайней мере, со времен Архимеда. Само собой разумеется, что строгое выполнение принципа материальной объективности является обязательным требованием во всей этой книге. Следует, однако, иметь в виду, что сказанное вовсе не означает, что в механике не используются необъективные характеристики. Например, широко используется понятие кинетической энергии, являющееся примером необъективного скаляра, т.е. кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета. Принцип материальной объективности просто утверждает, что сама по себе кинетическая энергия не имеет объективного характера, а потому в физические законы она может входить только весьма специальным образом, чтобы физический закон отражал бы объективную реальность.

**Определение:** вектор  $\mathbf{a}$  называется объективным, если при замене системы отсчета, он меняется по закону

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t}), \quad \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) \sim \mathbf{a}_*(\mathbf{t}), \quad (5.30.2)$$

где  $\mathbf{a}(\mathbf{t})$  и  $\mathbf{a}_*(\mathbf{t})$  — суть значения векторов  $\mathbf{a}$  в  $\mathcal{S}$ -системе и  $\mathcal{S}_*$ -системе соответственно.

Например, вектор положения частицы  $\mathbf{A}$  необъективен, как это видно из (5.29.16). Напротив, вектор положения частицы  $\mathbf{A}$  относительно частицы  $\mathbf{B}$ , объективен, как это видно из (5.29.17). Вектор скорости частицы  $\mathbf{A}$  необъективен. Действительно, из (5.29.16) следует, что

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_0(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{t}) \times (\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{a}(\mathbf{t})) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_A(\mathbf{t}). \quad (5.30.3)$$

Сравнивая это выражение с (5.30.2), видим, что вектор  $\mathbf{V}_A(\mathbf{t})$  — необъективен. Отсюда следует, что сам по себе вектор скорости не может входить ни в один физический закон, используемый в рациональной механике. Из (5.30.3) мы видим, что и вектор относительной скорости необъективен, поскольку

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{V}_B(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{t}) \times (\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t})) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{V}}_A(\mathbf{t}) - \tilde{\mathbf{V}}_B(\mathbf{t})). \quad (5.30.4)$$

Здесь мы должны уточнить понятие принципа материальной объективности. На самом деле этот принцип используется в механике в двух, притом не равносильных, формах. Различие заключается в допускаемых к сравнению системах отсчета. Обычно в формулировке принципа материальной объективности к сравнению допускаются все мыслимые системы отсчета. Однако при этом нельзя требовать, чтобы все физические законы удовлетворяли этому принципу. Строго говоря, принцип материальной объективности в такой

расширенной версии вообще не является обязательным в рациональной механике. Тем не менее, для некоторых величин он все же должен выполняться. Строго обязательным для механики является такая формулировка принципа материальной объективности, при которой к сравнению допускаются только инерциальные системы отсчета. В этом случае выполняются ограничения (5.29.36). Тогда вместо, например, (5.30.4) получим

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{V}_B(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \left( \tilde{\mathbf{V}}_A(\mathbf{t}) - \tilde{\mathbf{V}}_B(\mathbf{t}) \right), \quad (5.30.5)$$

т.е. в этом случае вектор относительной скорости уже объективен и потому может входить в формулировки физических законов.

*Формулировку принципа материальной объективности, при которой к сравнению допускаются любые системы отсчета, будем называть расширенным принципом материальной объективности. Если к сравнению допускаются только инерциальные системы отсчета, то будем говорить о строгом принципе материальной объективности.*

Понятно, что если какая-либо величина (или физический закон) удовлетворяет расширенному принципу объективности, то она заведомо удовлетворяет и строгому принципу объективности. Обратное, в общем случае, не имеет места.

Для иллюстрации сказанного покажем несколько примеров применения принципа материальной объективности, который будем использовать в обеих формулировках. В качестве первого примера рассмотрим понятие массы. Допустим, что масса материальной точки зависит от ее положения в системе отсчета и скорости, т.е.

$$\mathbf{m} = f(\mathbf{R}(\mathbf{t}), \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{t})), \quad \mathbf{m}_* = f_*(\mathbf{R}_*(\mathbf{t}), \dot{\mathbf{R}}_*(\mathbf{t})), \quad (5.30.6)$$

где использованы выражения для массы в двух системах отсчета. При применении принципа материальной объективности необходимо различать значения функции и символы отображения, т.е. в (5.30.6) не следует писать  $\mathbf{m}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$ , как это часто делается для упрощения записи. Начнем применять принцип объективности. Прежде всего, соотношение (5.30.6) выражает собой некое физическое утверждение или, если угодно, физический закон. В данном случае, этот закон устанавливает соответствие между числом, называемым массой материальной точки, и движениями материальной точки относительно выбранной системы отсчета. Обсуждаемое соответствие не должно зависеть от выбора системы отсчета. Необходимым, но не достаточным, условием этого является утверждение

$$\mathbf{m} = f(\mathbf{R}(\mathbf{t}), \mathbf{V}(\mathbf{t})), \quad \mathbf{m}_* = f(\mathbf{R}_*(\mathbf{t}), \mathbf{V}_*(\mathbf{t})). \quad (5.30.7)$$

Различие между (5.30.6) и (5.30.7) в том, что в последних использовано **одно и то же отображение в обеих системах отсчета**. На втором шаге мы должны перенести второе из соотношений в  $\mathcal{S}$ -систему. Тогда получим

$$\mathbf{m} = f(\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t)), \quad \tilde{\mathbf{m}} = f(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (5.30.8)$$

Смысл операции переноса указан в предыдущем параграфе. Наконец, третий и последний шаг, вытекающий из принципа объективности (5.30.1), ведет к следующему функциональному уравнению

$$f(\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t)) = f(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (5.30.9)$$

Теперь мы должны использовать замену системы отсчета. Сначала воспользуемся строгим принципом объективности, в котором к рассмотрению допускаются только инерциальные системы отсчета. Тогда из (5.29.23) и (5.29.37) следует

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(t), \quad (5.30.10)$$

где  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{V}_0$ ,  $\mathbf{Q}$  не зависят от времени, а в остальном произвольны. Теперь (5.30.9) принимает вид

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t), \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(t)) = f(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (5.30.11)$$

Отсюда видим, что отображение  $f$  ни в коем случае не может быть произвольным, а должно удовлетворять (5.30.11) для любых постоянных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{V}_0$  и любого тензора поворота  $\mathbf{Q}$ . Покажем технику, позволяющую рассматривать функциональные уравнения типа (5.30.11). Центральная идея заключается в следующем. Уравнение (5.30.11) справедливо для любой пары систем отсчета. Рассмотрим теперь непрерывное семейство систем отсчета, т.е. вместо одной  $\mathcal{S}_*$ -системы рассмотрим семейство систем отсчета такое, что все системы отсчета отличаются друг от друга только сдвигом начала отсчета, т.е. для них имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau), \quad \mathbf{V}_0 = \text{const}(\tau), \quad \mathbf{Q} = \text{const}(\tau). \quad (5.30.12)$$

Здесь вектор  $\mathbf{V}_0$  и тензор поворота  $\mathbf{Q}$  одинаковы для всего рассматриваемого семейства, характеризуемого параметром  $\tau$ . Для семейства (5.30.12) уравнение (5.30.11) принимает вид

$$f(\mathbf{a}(\tau) + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) = f(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (5.30.13)$$

Левая часть этого равенства зависит от параметра семейства  $\tau$ , а правая часть — не зависит. При этом от  $\tau$  зависит только первый векторный аргумент отображения  $f$ . Дифференцируя (5.30.3) по  $\tau$ , получаем

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}(\tau) + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t). \quad (5.30.14)$$

Здесь в правой части стоит нуль, т.к. правая часть (5.30.13) не зависит от  $\tau$ . Примем теперь для  $\mathbf{a}(\tau)$  представление

$$\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{a}_0 + \tau \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{b}, \quad (5.30.15)$$

где  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}$  — суть произвольные постоянные векторы. Полагая в (5.30.14)  $\tau = 0$ , получаем

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}. \quad (5.30.16)$$

Заметим теперь, что это равенство должно выполняться для любого вектора  $\mathbf{b}$ , причем  $\partial f / \partial \mathbf{x}_0$  от вектора  $\mathbf{b}$  не зависит. Поэтому (5.30.16) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}})}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) = \psi(\mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}).$$

Итак, масса не может зависеть от вектора положения, но зависимость от вектора скорости все еще не исключена. С учетом уже доказанного функциональное уравнение (5.30.13) принимает вид

$$\psi(\mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(t)) = \psi(\tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (5.30.17)$$

Это уравнение должно выполняться для любого постоянного вектора  $\mathbf{V}_0$  и любого постоянного тензора поворота  $\mathbf{Q}$ . Вновь вводя в рассмотрение семейство систем отсчета и проводя выкладки, аналогичные рассмотренным выше, получаем, что (5.30.17) справедливо только тогда, когда функция  $\psi$  не зависит от векторного аргумента.

Таким образом, использование строгого принципа объективности привело к заключению, что масса тела не зависит от его движения. В этом случае расширенный принцип объективности выполняется автоматически. Так бывает далеко не всегда. Рассмотрим еще один пример объективного скаляра, а именно рассмотрим внутреннюю энергию системы двух материальных точек. Поскольку это понятие нами еще не вводилось, то и этот пример имеет



своей целью показать технологию использования принципа объективности на формальном уровне. Внутренняя энергия системы двух материальных точек есть скалярная функция, значениями которой являются объективные скаляры. Внутренняя энергия может зависеть от положений материальных точек и их скоростей. Запишем внутреннюю энергию в двух системах отсчета

$$\mathcal{U} = f(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B), \quad \mathcal{U}_* = f_*(\mathbf{R}_A^*, \mathbf{R}_B^*, \mathbf{V}_A^*, \mathbf{V}_B^*). \quad (5.30.18)$$

Проводя те же рассуждения, что и при переходе от соотношений (5.30.6) к (5.30.8), получаем

$$\mathcal{U} = f(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B), \quad \tilde{\mathcal{U}} = f(\tilde{\mathbf{R}}_A, \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A, \tilde{\mathbf{V}}_B). \quad (5.30.19)$$

Требую, чтобы внутренняя энергия была объективным скаляром, приходим к функциональному уравнению

$$f(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B) = f(\tilde{\mathbf{R}}_A, \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A, \tilde{\mathbf{V}}_B). \quad (5.30.20)$$

Потребуем, чтобы внутренняя энергия удовлетворяла строгому принципу объективности. Это означает, что векторы  $\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B$  связаны с аналогичными величинами с тильдами следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A(t) &= \mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A, & \mathbf{V}_A(t) &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_A(t); \\ \mathbf{R}_B(t) &= \mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_B, & \mathbf{V}_B(t) &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_B(t). \end{aligned} \quad (5.30.21)$$

Здесь векторы  $\mathbf{a}, \mathbf{V}_0$  и тензор поворота  $\mathbf{Q}$  не зависят от времени. Подставляя (5.30.21) в (5.30.20), получаем следующее функциональное уравнение

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A, & \mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_B, & \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_A, \\ & \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_B) &= f(\tilde{\mathbf{R}}_A, \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A, \tilde{\mathbf{V}}_B). \end{aligned} \quad (5.30.22)$$

Рассмотрим семейство систем отсчета, различающихся только векторами  $\mathbf{a}$ , т.е. положениями их начал отсчета в  $\mathcal{S}$ -системе. Примем, что это семейство характеризуется параметром  $\tau$  так, что

$$\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{a}_0 + \tau \mathbf{b}, \quad (5.30.23)$$

где  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}$  произвольные векторы, не зависящие от  $\tau$ . Подставляя (5.30.23) в (5.30.22) и дифференцируя обе части получившегося равенства по  $\tau$ , получаем

$$\frac{d\mathcal{U}}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{R}_A} \cdot \frac{d\mathbf{R}_A}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{R}_B} \cdot \frac{d\mathbf{R}_B}{d\tau} = 0.$$

Учтем, что

$$\frac{d\mathbf{R}_A}{d\tau} = \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{R}_B}{d\tau} = \mathbf{b}$$

и перепишем предыдущее равенство в виде

$$\frac{df}{d\tau} = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_A} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_B} \right) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Полагая здесь  $\tau = 0$ , получаем

$$\left[ \frac{\partial f(\mathbf{R}_A^0, \mathbf{R}_B^0, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B)}{\partial \mathbf{R}_A^0} + \frac{\partial f(\mathbf{R}_A^0, \mathbf{R}_B^0, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B)}{\partial \mathbf{R}_B^0} \right] \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (5.30.24)$$

где

$$\mathbf{R}_A^0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A, \quad \mathbf{R}_B^0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_B.$$

Равенство (5.30.24) должно выполняться для любых векторов  $\mathbf{b}$ , причем выражение, стоящее в квадратных скобках от  $\mathbf{b}$  не зависит. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_A} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_B} = \mathbf{0}, \quad (5.30.25)$$

где нолики у векторных аргументов опущены. Получили, что функция  $f$  должна удовлетворять уравнению в частных производных первого порядка. Теория таких уравнений хорошо разработана [36]. Общее решение уравнения (5.30.25) имеет вид

$$f(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B) = \psi_1(\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B), \quad (5.30.26)$$

т.е. вместо функции четырех векторных аргументов получили функцию трех векторных аргументов. Подставляя (5.30.26) в (5.30.22), получаем уравнение для функции  $\psi_1$

$$\psi_1(\mathbf{Q} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B), \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_A, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_B) = \psi_1(\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A, \tilde{\mathbf{V}}_B). \quad (5.30.27)$$

Это уравнение должно выполняться для любых векторов  $\mathbf{V}_0$ . Повторяя ту же процедуру, что и выше для вектора  $\mathbf{a}$ , получаем, что (5.30.27) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\psi_1(\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B) = \psi_2(\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B). \quad (5.30.28)$$

Причем функция двух векторных аргументов  $\psi_2$  должна удовлетворять уравнению

$$\psi_2(\mathbf{Q} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B), \mathbf{Q} \cdot (\tilde{\mathbf{V}}_A - \tilde{\mathbf{V}}_B)) = \psi_2(\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A - \tilde{\mathbf{V}}_B). \quad (5.30.29)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B, \quad \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{V}}_A - \tilde{\mathbf{V}}_B, \quad \mathbf{x}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}. \quad (5.30.30)$$

В этих обозначениях функциональное уравнение (5.30.29) принимает вид

$$\psi_2(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) = \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (5.30.31)$$

Рассмотрим непрерывное семейство систем отсчета таких, что они различаются тензорами поворота  $\mathbf{Q}(\tau)$ , где  $\tau$  — параметр семейства. Тогда переменные  $\mathbf{x}_*$  и  $\mathbf{y}_*$  зависят от  $\tau$ , а переменные  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  — не зависят. Выберем упомянутое семейство систем отсчета так, чтобы выполнялись условия

$$\frac{d\mathbf{Q}(\tau)}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{Q}(\tau), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}. \quad (5.30.32)$$

Тогда при  $\tau = 0$  переменные  $\mathbf{x}_*$  и  $\mathbf{y}_*$  совпадают с переменными  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  соответственно. Дифференцируя (5.30.31) по  $\tau$  и учитывая, что правая часть (5.30.31) от  $\tau$  не зависит, получаем

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}_*} \cdot \frac{d\mathbf{x}_*}{d\tau} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}_*} \cdot \frac{d\mathbf{y}_*}{d\tau} = 0. \quad (5.30.33)$$

Исключим отсюда производные от  $\mathbf{x}_*$  и  $\mathbf{y}_*$  по  $\tau$  с помощью равенств

$$\frac{d\mathbf{x}_*}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{x}_*, \quad \frac{d\mathbf{y}_*}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{y}_*$$

и перейдем к пределу при  $\tau \rightarrow 0$ . В результате вместо (5.30.33) получим следующее уравнение

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}) + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{y}) = 0 \quad (5.30.34)$$

или в другой форме

$$\left( \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} \times \mathbf{y} \right) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = 0. \quad (5.30.35)$$

Вектор  $\boldsymbol{\omega}_0$  произволен. Поэтому выражение, стоящее в скобках в (5.30.5) должно равняться нулю

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} \times \mathbf{y} = 0. \quad (5.30.36)$$

Таким образом, функция  $\psi_2$  двух векторных аргументов или шести скалярных аргументов удовлетворяет трем скалярным уравнениям в частных производных. Это означает, что на самом деле функция  $\psi_2$  есть функция не

более чем трех скалярных аргументов. Покажем технику нахождения этих аргументов. Для этого будем рассматривать уравнение (5.30.34). Составим характеристическую систему [36], [82] для уравнения (5.30.34)

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{y}. \quad (5.30.37)$$

Функция  $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  называется интегралом системы (5.30.37), если она сохраняет постоянное значение на решениях этой системы

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{const.}$$

Дифференцируя это соотношение и учитывая, что векторы  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  удовлетворяют (5.30.37), получаем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}) + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{y}) = 0.$$

Сравнивая это уравнение с (5.30.34), видим, что функция  $\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  является интегралом системы (5.30.37). Система (5.30.37) имеет шестой порядок и допускает не более пяти функционально независимых интегралов. Любой другой интеграл системы (5.30.37) является некоторой функцией упомянутых функционально независимых интегралов. Для системы (5.30.37) нетрудно указать пять функционально независимых интегралов. Умножая первое из уравнений системы (5.30.37) скалярно на  $\mathbf{x}$ , получаем первый интеграл

$$\mathbf{x} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \text{const.}$$

Аналогично получается интеграл  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \text{const.}$  Если умножить первое уравнение системы (5.30.37) скалярно на  $\mathbf{y}$ , а второе уравнение — на  $\mathbf{x}$  и затем сложить получившиеся уравнения, то получим третий интеграл

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \text{const.}$$

Вполне очевидны и еще два интеграла

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \text{const}, \quad \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \text{const.}$$

Итак, нашли пять функционально независимых интегралов

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (5.30.38)$$

Только три первых интеграла из этого списка не зависят от вектора  $\boldsymbol{\omega}_0$ , т.е. не зависят от выбора системы отсчета. Поэтому функция  $\psi_2$  зависит только от этих трех интегралов

$$\psi_2 = \varphi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Можно убедиться в справедливости сказанного и совершенно формально. Функция  $\psi_2$ , являясь интегралом системы (5.30.37), может быть выражена через интегралы (5.30.38)

$$\psi_2 = \psi_3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0). \quad (5.30.39)$$

Вычислим производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})} 2\mathbf{x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} \mathbf{y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} \boldsymbol{\omega}_0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})} 2\mathbf{y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} \boldsymbol{\omega}_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в уравнение (5.30.36), получаем

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} \times \mathbf{y} = \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Это уравнение выполняется для любых векторов  $\boldsymbol{\omega}_0$  тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} = 0, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} = 0,$$

т.е. функция  $\psi_2$  не зависит от интегралов  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0$  и  $\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0$ . Окончательно мы получили, что внутренняя энергия системы двух материальных точек является функцией трех скалярных аргументов

$$\mathcal{U} = f(|\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B|^2, \quad (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B) \cdot (\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B), \quad |\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B|^2). \quad (5.30.40)$$

Дальнейшее упрощение на основе строгого принципа объективности добиться невозможно. Если же потребовать выполнения расширенного принципа материальной объективности, то можно доказать более сильное утверждение

$$\mathcal{U} = f(|\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_B(t)|^2). \quad (5.30.41)$$

Именно так обычно и поступают в механике. Хотя это и весьма правдоподобно, но не исключено, что в некоторых случаях (весьма нетрадиционных) все-таки необходимо использовать выражение (5.30.40).

**Упражнение:** используя расширенный принцип материальной объективности, доказать представление (5.30.41).

Принцип материальной объективности будет широко использоваться в последующем изложении. Здесь мы хотели только показать характерные особенности применения этого принципа. В заключение этого параграфа введем еще понятие объективного тензора второго ранга.

**Определение:** тензор второго ранга  $\mathbf{A}$  объективен, если при замене системы отсчета он преобразуется по закону

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \tilde{\mathbf{A}} \sim \mathbf{A}_*, \quad (5.30.42)$$

где  $\mathbf{Q}$  — тензор поворота системы  $\mathbf{S}_*$  относительно  $\mathbf{S}$  — системы.

Примером объективного тензора второго ранга является тензор инерции абсолютно твердого тела, который будет детально изучен в следующей главе.

## 5.31 Движущиеся среды. Материальная производная

Материал этого пункта важен при построении теории движущихся сплошных сред, но при первых чтениях его можно пропустить. Когда мы изучали движения материальных точек, то ситуация была весьма простой. В самом деле, положение материальной точки в системе отсчета определялось заданием вектора положения  $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ . Скорость и ускорение материальной точки вычислялись как соответствующие производные от вектора положения. Вообразим теперь другую ситуацию. Пусть мы сидим на берегу реки и наблюдаем за течением воды напротив нас. Даже без специальных ухищрений мы можем видеть, что вода как бы расслоена на отдельные струи. Движение отдельных частиц воды мы не различаем, но потоки этих частиц (струй) ведут себя более или менее закономерным образом. Допустим теперь, что мы хотим изучить поведение реки в данном месте пространства. Для этого мы должны написать соответствующие законы механики и затем извлекать из них интересующие нас следствия. Вот здесь-то и возникают проблемы. Действительно, законы механики формулируются для тел, а вовсе не для областей пространства, в которых тела находятся в рассматриваемый момент времени. Мы же наблюдаем именно за областью пространства. Тела, которые входят в эту область и выходят из нее, постоянно меняются. Разумеется, мы можем назвать телом все то множество частиц, которое в данный момент времени находится внутри рассматриваемой области. Однако это тело будет иметь переменный состав. Тела такого рода называют открытыми — они обмениваются частицами со своим окружением. О том, как следует формулировать законы механики для

открытых тел, речь пойдет во второй части курса. Сейчас мы ограничимся только кинематическими аспектами этого вопроса.

Выберем некоторую инерциальную систему отсчета, с помощью которой будут записываться все основные уравнения. Эта система отсчета движется относительно среды. Поэтому в некоторой фиксированной области системы отсчета в разные моменты времени оказываются разные части среды. Это означает, что необходимо использовать так называемое пространственное описание. Для этого нам понадобится понятие материальной производной, играющей важную роль при пространственном описании сплошных сред.

Рассмотрим сплошную среду, целиком заполняющую односвязную или многосвязную область в выбранной системе отсчета. Эта среда как-то движется относительно системы отсчета. В частности, среда может покоиться, а система отсчета двигаться относительно среды. С кинематической точки зрения это безразлично. При пространственном описании важную роль играет поле скоростей  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ , где вектор  $\mathbf{x}$  задает точку системы отсчета. Тогда вектор  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$  определяет скорость той частицы среды, которая в данный момент времени  $t$  находится в точке  $\mathbf{x}$ . Пусть нам дано некоторое поле  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$ , которое может быть скаляром, вектором или тензором любого ранга. Оно описывает некую физическую характеристику частицы, находящейся в данное время в данной точке  $\mathbf{x}$  системы отсчета. Обратим внимание на то, что мы можем использовать подвижную систему координат, например,  $\mathbf{y}_k(t)$ . Тогда данное (фиксированное) место  $\mathbf{x}$  в системе отсчета будет определяться координатами  $\mathbf{y}_k(t)$ , т.е. будем иметь

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(y_1(t), y_2(t), y_3(t), t) \equiv \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}, t).$$

*Определение:* материальной производной свойства  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$  называется предел отношения

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) - \mathbf{K}(\mathbf{x}, t)}{\Delta t}, \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \Delta t. \quad (5.31.1)$$

или

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{F}(\mathbf{y}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) - \mathbf{F}(\mathbf{y}, t)}{\Delta t}, \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \Delta t. \quad (5.31.2)$$

В этом определении  $\Delta \mathbf{s}$  (с точностью до членов второго порядка малости) есть путь, пройденный частицей, которая в момент времени  $t$  находилась в точке  $\mathbf{x}$ , за время  $\Delta t$ . Числитель в (5.31.1) можно переписать в виде следующего разложения

$$\mathbf{K}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) = \mathbf{K}(\mathbf{x}, t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t + \Delta t).$$

Аналогичное разложение можно записать для выражения (5.31.2)

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) + \Delta \mathbf{s}, \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}), \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) + \Delta \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{F}(\mathbf{y}(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}), \mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}).$$

Теперь из определения (5.31.1) следует

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \quad (5.31.3)$$

Из определения (5.31.2) следует аналогичное выражение

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) = \frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{t}) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \nabla \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{t}), \quad (5.31.4)$$

причем операторы градиента в двух последних выражениях совпадают, поскольку они не зависят от выбора системы координат в системе отсчета. В первом слагаемом правой части выражения (5.31.3) инвариантный, т.е. не зависящий от выбора системы координат, оператор полного дифференцирования по времени можно заменить на не инвариантный оператор частного дифференцирования по времени, но в (5.31.4) этого делать нельзя. В данной работе мы будем придерживаться указанного выше определения, чтобы избежать возможных недоразумений при заменах системы отсчета, когда вектор  $\mathbf{x}$  по необходимости приходится выражать в подвижной системе координат. В литературе, как правило, вместо определения (5.31.3) принимают следующее выражение для материальной производной [59, 96, 13]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}). \quad (5.31.5)$$

Хотя при решении конкретных задач выражение (5.31.5) обычно не приводит к ошибкам, тем не менее оно вводит в заблуждение. Прежде всего, вектор  $\mathbf{x}$  в (5.31.5) определяет уже не произвольную точку наблюдения в системе отсчета, а задает траекторию конкретной материальной точки. Поэтому формально правильная запись выражения (5.31.5) выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, \mathbf{t}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{t}} \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, \mathbf{t}) + \mathbf{V}(\mathbf{x}_A, \mathbf{t}) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}_A, \mathbf{t}), \quad (5.31.6)$$

где  $\mathbf{x}_A$  есть место частицы  $A$  в системе отсчета. Полная производная по времени от функции  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  в (5.31.5) полностью определяется самим отображением  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ , суженном, разумеется, на траекторию материальной точки. Применительно к материальной производной это обстоятельство совершенно не соответствует действительности. В определении материальной производной (5.31.3) содержится функция  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ , которая никак не связана с отображением  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  и не определяется им. Различия в определениях (5.31.3) и



(5.31.5) носят не формальный характер. Использование определения (5.31.5) означает, по существу, отказ от пространственного описания и переход к материальному описанию, т.е. к отказу от возможности рассматривать неупругие среды общего вида.

Обратимся к рассмотрению некоторых кинематических соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Вычислим, например, материальную производную от вектора положения  $\mathbf{x}$  частицы, находящейся в данный момент времени в точке  $\mathbf{x}$  системы отсчета

$$\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\mathbf{x} + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{x} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (5.31.7)$$

Для материальной производной справедливы все правила дифференцирования. Например,

$$\frac{\delta}{\delta t}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta t} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t}. \quad (5.31.8)$$

С другой стороны, известно, что оператор полного дифференцирования по времени и оператор-градиент перестановочны. Для материальной производной, как видно из определения, это не верно

$$\frac{d}{dt}\nabla = \nabla \frac{d}{dt}, \quad \frac{\delta}{\delta t}\nabla \neq \nabla \frac{\delta}{\delta t}. \quad (5.31.9)$$

В важном частном случае, когда скорость  $\mathbf{V} = \text{const}$ , операторы градиента и материальной производной перестановочны

$$\frac{\delta}{\delta t}\nabla = \nabla \frac{\delta}{\delta t}. \quad (5.31.10)$$

Вычисляя материальную производную от вектора скорости частицы, находим вектор ее ускорения

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta}{\delta t}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (5.31.11)$$

Рассмотрим менее привычную ситуацию. Пусть, например,  $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ , где  $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$  есть тензор поворота частицы, находящейся в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ . Как найти ее угловую скорость? Нетрудно понять, что для этого необходимо использовать следующую модификацию уравнения Пуассона [19, 20]

$$\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t). \quad (5.31.12)$$

Присутствие в этом определении скорости  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  вносит дополнительные осложнения при написании уравнения баланса энергии, как это будет видно ниже. В дальнейшем нам понадобится преобразовывать градиент угловой скорости  $\nabla \boldsymbol{\omega}$ . Будем действовать следующим образом. Введем в рассмотрение тензор второго ранга  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ , называемый второй мерой деформации, посредством уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^s} \mathbf{P} = \mathbf{F}_s \times \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \nabla \equiv \mathbf{g}^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{g}^s \otimes \mathbf{F}_s, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_\times, \quad (5.31.13)$$

где вектор  $\mathbf{f}$  называется вектором угловой деформации. Справедливы уравнения интегрируемости [21]

$$\frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial x^m} - \frac{\partial \mathbf{F}_m}{\partial x^s} = \mathbf{F}_m \times \mathbf{F}_s. \quad (5.31.14)$$

Уравнение Пуассона (5.31.12) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{P} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}. \quad (5.31.15)$$

Откуда сразу же получаем выражение для угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (5.31.16)$$

Используя свойство перестановочности операторов градиента и полной производной по времени, для вспомогательного вектора  $\boldsymbol{\Omega}$  получаем равенство [21]

$$\nabla \boldsymbol{\Omega} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\Omega}. \quad (5.31.17)$$

Исключая отсюда вспомогательный вектор  $\boldsymbol{\Omega}$  с помощью уравнения (5.31.13) и используя уравнение (5.31.14) после некоторых преобразований, получаем

$$\nabla \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}. \quad (5.31.18)$$

Откуда для ротора вектора  $\boldsymbol{\omega}$  имеем

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + (\mathbf{F}^\top - (\text{tr} \mathbf{F}) \mathbf{E}_*) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F})_\times. \quad (5.31.19)$$

Последние два равенства справедливы для любого вектора  $\mathbf{V}$  и будут использованы позднее. Пусть частица, которая в данный момент времени  $\mathbf{t}$  находится в точке  $\mathbf{x}$ , в момент времени  $\mathbf{t}_0 \leq \mathbf{t}$  находилась в точке  $\mathbf{x}_0$ . Введем

в рассмотрение вектор перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , который переводит частицу из положения  $\mathbf{x}_0$  в точку  $\mathbf{x}$ . Имеем очевидное равенство

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (5.31.20)$$

где принято обозначение

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \equiv (\mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad \det \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) > 0. \quad (5.31.21)$$

Вычисляя градиент от обеих частей второго из равенств (5.31.20) и учитывая перестановочность операторов градиента и полной производной по времени, получаем следующие равенства

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (5.31.22)$$

Эти равенства можно найти в книгах [59, 96]. Последнее равенство можно переписать в эквивалентной форме

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = - \left( \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (5.31.23)$$

Данное соотношение понадобится нам при записи приведенного диссипативного неравенства.

# Литература

- [1] Аппель П. Теоретическая механика. т.1. М.:ГИФМЛ, 1960. 515с.
- [2] Аппель П. Теоретическая механика. т.2. М.: ГИФМЛ, 1960. 487с.
- [3] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431с.
- [4] Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328с.
- [5] Бернулли И. Избранные сочинения по механике. М.–Л.: ОНТИ, 1937. 297с.
- [6] Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: ГИФМЛ, 1981. 339с.
- [7] Вакуленко А.А. Полилинейная алгебра и тензорный анализ в механике. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1972. 64с.
- [8] Вейль Г. Классические группы. М.: ИЛ, 1947. 408с.
- [9] Веблен О. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.:ИЛ, 1948. 139с.
- [10] Галилео Галилей. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки. Галилео Галилей. Избранные труды, т.2, сс.109–410. М.: Наука, 1964. 571с.
- [11] Галилео Галилей. Послание к Инголи. Галилео Галилей. Избранные труды, т.1, сс.55–96. М.: Наука, 1964. 640с.
- [12] Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Издательство АН СССР, 1959. 386с.
- [13] Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303с.

- [14] Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 415с.
- [15] Даламбер Ж. Динамика. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 343с.
- [16] Дубнов Я.С. Основы векторного исчисления, т.1. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 368с.
- [17] Дубнов Я.С. Основы векторного исчисления, т.2. М.–Л.: ГИТТЛ, 1952. 415с.
- [18] Жилин П.А. Тензор поворота в описании кинематики твердого тела.//Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ, N443, С.-Петербург, 1992. с. 100–121.
- [19] Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. С.-Петербург: изд-во СПбГТУ, 1992. 86с.
- [20] Жилин П.А. Принцип относительности Галилея и уравнения Максвелла.//Механика и процессы управления. Труды СПбГТУ, N448, С.-Петербург, 1994. с. 3–38.
- [21] Жилин П.А. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики.//Труды XXII школы–семинара "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем". С.-Петербург, 1996. сс.14-40.
- [22] Журавлев И.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320с.
- [23] Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 319с.
- [24] Зубов В.И. Колебания и волны. Л.: Изд. ЛГУ, 1989. 415с.
- [25] Зубов В.И. Теория колебаний. М.: ВШ, 1979. 399с.
- [26] Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Часть первая. М.–Л.:ОГИЗ, 1947. 512с.
- [27] Каган В.Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Часть вторая. М.–Л.:ОГИЗ, 1948. 407с.
- [28] Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. М.: изд-во МГУ, 1960. 307с.
- [29] Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. М.: изд-во МГУ, 1963. 367с.

- 
- [30] Картан Э. Теория спиноров. Волгоград: Платон, 1997. 223с.
- [31] Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд. АН СССР, 1962. 402с.
- [32] Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика//Берклевский курс физики, т.1. М.:Наука, 1983. 447с.
- [33] Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. 303с.
- [34] Кочин Н.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427с.
- [35] Крутков Ю.А. Об одной нерешенной задаче Эйлеровой *Theoriae motus*. Леонард Эйлер. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. сс. 89–102. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1935. 239с.
- [36] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830с.
- [37] Курбатова Г.И., Филиппов В.Б. Элементы тензорного исчисления. Санкт-Петербург:изд. СПбГУ, 1998. 232с. В книге содержится дополнение "Тензорные функции", написанное А.А. Вакуленко.
- [38] Лагалли М. Векторное исчисление. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 343с.
- [39] Лагранж Ж–Л. Аналитическая механика, т.1. М.-Л.: ОНТИ, 1938. 348с.
- [40] Ламб Г. Теоретическая механика, т. III — более сложные вопросы. М.–Л.: ОНТИ, 1936. 291с.
- [41] Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965. 408с.
- [42] Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. М.: Наука, 1975. 336с.
- [43] Лич Дж. У. Классическая механика. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 173с.
- [44] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. М.: Наука, 1982. 352с.
- [45] Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.2. М.: Наука, 1983. 540с.
- [46] Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824с.
- [47] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512с.

- [48] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520с.
- [49] Магнус К. Гироскоп. Теория и применение М.: Мир, 1974. 525с.
- [50] Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ. М.:ГИФМЛ, 1963. 411с.
- [51] В.Д. Мак-Миллан. Динамика твердого тела. М.: ИЛ, 1951. 467с.
- [52] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414с.
- [53] Най Дж. Физические свойства кристаллов. М.: Мир, 1967. 385с.
- [54] Норден А.П. Теория поверхностей. М.:ГИТТЛ, 1956. 259с.
- [55] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Из Собрания трудов акад. А.Н. Крылова, т. VII. М.–Л.: Изд. АН СССР, 1936.
- [56] Ньютон И. Оптика. М.–Л.: ГИТТЛ, 1954. 367с.
- [57] Рабинович Ю.Г. Теория линейных вектор-функций. Одесса, 1911.
- [58] Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. М.: Изд. МГУ, 1991. 336с.
- [59] Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 328с.
- [60] Пановко Я.Г. Механика деформируемого твердого тела М.: Наука, 1985. 287с.
- [61] Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352с.
- [62] Петкевич В.В. Теоретическая механика М.: Наука, 1981. 496с.
- [63] Полак Л.С. (ред.) Вариационные принципы механики. М.: ГИФМЛ, 1959. 932с. (Достаточно полный сборник классических работ, посвященных формулировке и развитию вариационных принципов механики. П.Ж.)
- [64] Поляхов Н.Н. Зегжда С.А. Юшков М.П. Теоретическая механика. Л.: Изд. ЛГУ, 1985. 536с.
- [65] Постников М.М. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1986. 415с.
- [66] Постников М.М. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986. 400с.

- [67] Пуанкаре А. Измерение времени. Избр. труды А. Пуанкаре, т. III, с. 419–428. М.: Наука, 1974. 771с.
- [68] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983. 559с.
- [69] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964. 664с.
- [70] Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 647с.
- [71] Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. М.: Наука, 1976. 535с.
- [72] Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.2. М.: Наука, 1976. 573с.
- [73] Сокольников И.С. Тензорный анализ. М.: Наука, 1971. 374с.
- [74] Сомов П.О. Векторіальный анализ и его приложенія. Санкт-Петербург, изд. Стасюлевичъ, 1907. 263с.
- [75] Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965.
- [76] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592с.
- [77] Трусделл К. Этапы развития понятия напряжения. Сб. Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию академика Н.И. Мусхелишвили. сс. 439–447. М.: Изд.АН СССР, 1961. 578с.
- [78] Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М.:ИЛ, 1960. 559с.
- [79] Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. М.:ГИФМЛ, 1984. 416с.
- [80] Френкель Я.И. Курс теоретической механики на основе векторного и тензорного анализа. Л.-М.: ГИТТЛ, 1940. 435с.
- [81] Широков П.А. Тензорное исчисление. Изд-во Казанского университета, 1961.
- [82] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.:ИЛ, 1947. 359с.
- [83] Эйлер Л. Основы динамики точки. М.–Л.: ОНТИ, 1938. 500с.
- [84] Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума. М.–Л.: ГТТИ, 1934. 600с.



- [85] Эйлер Л. Общие принципы движения жидкостей. Mem. Acad.roy. sci. et belles-lettres, Berlin, **11** (1755), 274–315, 1757 (Opera omnia, II–**12**). (На латинском языке)
- [86] Эйнштейн А. Автобиографические заметки. Собр. научных трудов, т.IV, с.259–293. М.:Наука, 1967. 599с.
- [87] Эйнштейн А. Неевклидова геометрия и физика. В сб. "Эйнштейн и развитие физико-математической мысли", с.5–9, М.: Изд. АН СССР, 1962. 592с.
- [88] Якоби К. Лекции по динамике. Л.-М.: ОНТИ, 1936. 271с.
- [89] Argyris J. An Excursion into Large Rotations. //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.32, N1-N3. pp,85-155
- [90] Budde E. Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum. Braunschweig, 1914.
- [91] Cosserat E. and F. Theorie des corps deformables. Paris, 1909.
- [92] Gibbs J.W. Elements of vector analysis. New Haven, 1884.
- [93] Grassmann H. Die Lineare Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig, 1844
- [94] Hamilton W.R. Lectures on quaternions. Dublin, 1853
- [95] Levi-Civita T. Der absolute Differentialkalkul. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Duschek. Berlin, 1928.
- [96] Palmov V. Vibrations of Elasto-Plastic Bodies. Berlin: Springer, 1998.
- [97] Ricci G. et Levi-Civita T. Methodes de calcul differentiel absolu et leurs applications. Math. Ann., **54**, 1901.
- [98] Ricci G. Direzioni et invarianti principali di una varieta qualunque. Atti Ist. Veneto, **6**, 1904.
- [99] Riemann B. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Gött. Abh., **13**, 1868.
- [100] Schouten J.A. Der Ricci-Kalkul. Berlin, 1928.
- [101] Silberstein L. Vectorial mechanics. London: Macmillan and Co., 1913. 197p.

- 
- [102] Truesdell C. History of Classical Mechanics. Naturwissenschaften 63, (1976), Part 1, pp.53-62, Part 2, pp.119-130. Springer-Verlag 1976.
- [103] Truesdell C. Rational Thermodynamics. Springer-Verlag, New-York, 1984. 578p.
- [104] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. Handbuch der Physik. Vol. III/1. Springer-Verlag, 1960.
- [105] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Encyclopedia of Physics. III/3, Springer-Verlag, 1965.
- [106] Wilson E.B. Vector Analysis. Founded upon the lectures of J.W. Gibbs. New Haven, 1913.  
Книга основана на обстоятельном курсе лекций, прочитанных Гиббсом в Йельском университете в 1899–1900гг.
- [107] Zarembko S. Reflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle. Enseignements Math., 1940, t.38. p.59–69.
- [108] Zhilin P.A. A New Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies. // ZAMM Z. angew. Math. Mech. **76** (1996), **4**. pp.187-204.
- [109] Zhilin P.A. Rigid body oscillator: a general model and some results. // Acta Mechanica, vol.142, pp.169-193, (2000).
- [110] Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations in Elastic Bodies. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.