УДК 531.01

ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

А.В. Костарев

Санкт - Петербургский государственный политехнический университет. Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. *Предложено вместо общепринятого множества возможных перемещений системы [1 – 7] рассматривать множество виртуальных скоростей, порожденных множеством начальных условий. Показано, что из теоремы об изменении кинетической энергии следуют как уравнения Лагранжа, так и уравнения для аналитического определения внешних и внутренних реакций идеальных нестационарных голономных связей.*

Ключевые слова: *виртуальные скорости, кинетическая энергия, уравнения Лагранжа, реакции связей.*

1. Нестационарные связи общего вида

Рассматривается система материальных точек с массами $\{m_1, m_2, \dots, m_k, \dots m_n\}$. Движение системы ограничено идеальными голономными нестационарными связями общего вида

$$f_j(\boldsymbol{r}_k; t) = 0 \quad (j = 1,2, \dots, s) \qquad (1.1) \qquad .$$

Равнодействующие активных сил $\boldsymbol{F}_k$и реакций связей $\boldsymbol{R}_k$, действующих на точку m_k системы, формально определяют ее абсолютное ускорение $\boldsymbol{w}_k$ в инерциальной системе отсчета**:**

$$m_k \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k \qquad (1.2)$$

Проблемы использования уравнений Ньютона (1.2) для вывода дифференциальных уравнений движения системы состоят в их векторном виде и в зависимости неизвестных реакций $\boldsymbol{R}_k$, а значит и ускорений $\boldsymbol{w}_k$, от скоростей точек.

Уравнениям (1.1) и (1.2) отвечает множество ***возможных*** положений, законов движения $\boldsymbol{r}_k(t)$, и скоростей $\boldsymbol{v}_k$, порожденных множеством начальных условий.

Возможные положения системы на связях можно задать независимыми обобщенными координатами $\{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots q_l\}$, где l - число степеней свободы системы. Тогда, возможный закон движения точки m_k окажется функцией обобщенных координат и времени $\boldsymbol{r}_k(q_i, t)$.

Представим движение системы из произвольного положения как сумму двух движений: переносного движения вместе со связями и относительного движения по связям. Возможная скорость точки m_k является суммой переносной и относительной скоростей:

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i = \boldsymbol{v}_{ke} + \boldsymbol{v}_{kr} \qquad (1.3)$$

$$\boldsymbol{v}_{ke} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}, \qquad (1.4)$$

$$\boldsymbol{v}_{kr} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\dot{q}_i \qquad (1.5)$$

Здесь и далее повторяющийся индекс говорит о суммирование по индексу.

В произвольном положении системы на связях переносная скорость $\boldsymbol{v}_{ke}$ имеет единственное значение, определяемое уравнениями связи (1.1).

Уравнениям (1.1), напротив, отвечает множество относительных скоростей $\boldsymbol{v}_{kr}$**,** порожденных множеством начальных условий. Все относительные скорости направлены произвольно в касательной плоскости к поверхности связей, и имеют произвольный модуль. Именно относительные скорости создают разнообразие возможных скоростей $\boldsymbol{v}_k$ системы. Относительные скорости точек принято называть ***виртуальными*** скоростями системы [1].

Из выражения (1.3) вытекает, что при стационарных связях множества возможных и виртуальных скоростей совпадают.

В данном положении системы производные $\partial \boldsymbol{r}_k/\partial q_i$ в формуле (1.5) имеют единственное значение. Произвольными же в формуле (1.5) являются обобщенные скорости $\dot{q}$, которые назовем ***виртуальными обобщенными скоростями***.

Умножив закон Ньютона для каждой точки на ее возможную скорость, после суммирования по k придем к теореме об изменении кинетической энергии системы для возможных скоростей:

$$\dot{T} = m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \boldsymbol{v}_k = (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k) \cdot \boldsymbol{v}_k\,, \qquad T = \frac{m_k {v_k}^{\mathbf{2}}}{2} \qquad (1.6)$$

Поскольку на систему наложены идеальные связи, сумма мощностей их реакций на любых виртуальных скоростях $\boldsymbol{v}_{kr}$ в произвольном положении системы равна нулю

$$\boldsymbol{R}_k \cdot \boldsymbol{v}_{kr} = 0 \qquad (1.7)$$

Подставив в (1.6) выражение возможных скоростей (1.3), придем к двум наборам соотношений

$$m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \boldsymbol{v}_{kr} = \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{v}_{kr} \qquad (1.8)$$

$$m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \boldsymbol{v}_{ke} = (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k) \cdot \boldsymbol{v}_{ke} \qquad (1.9)$$

Покажем, что из соотношений (1.8) следуют уравнения Лагранжа второго рода. Подставим в (1.8) выражение относительных скоростей $\boldsymbol{v}_{kr}$ (1.5), и просуммируем

$$\sum_i \left[\sum_k m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right]\dot{q}_i = \sum_i \left[\sum_k \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right]\dot{q}_i \qquad (1.10)$$

Скобки в соотношении (1.10) не зависят от виртуальных скоростей $\dot{q}_i$, поскольку в них нет реакций идеальных связей $\boldsymbol{R}_k$, которые связаны с виртуальными скоростями $\boldsymbol{v}_{kr}$, и касательные к поверхности связей ускорения в левой части не зависят от реакций $\boldsymbol{R}_k$**.**

Запишем (1.10) в виде

$$L_i \dot{q}_i = Q_i \dot{q}_i \qquad (1.11)$$

Ввиду независимости скоростей $\dot{q}_i$ приходим к уравнениям:

$$L_i = Q_i \qquad (1.12)$$

Покажем, что это и есть уравнения Лагранжа.

Слагаемые в (1.10) имеют размерность мощности, поэтому суммы

$$Q_i = \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \qquad (1.13)$$

естественно назвать ***обобщенными силами***.

Выразим суммы L_i через обобщенные координаты.

$$L_i = m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = m_k \dot{\boldsymbol{v}}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) - m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{m_k v_k{}^{\mathbf{2}}}{2} - \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{m_k v_k{}^{\mathbf{2}}}{2} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (1.14)$$

Здесь использованы тождества Лагранжа

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_i} \qquad (1.15)$$

вытекающие из соотношений (1.3)

Таким образом, выражения (1.12) являются уравнениями Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (1.16)$$

Из уравнений Лагранжа следуют дифференциальные уравнения движения системы по связям. После их интегрирования вопрос о реакциях идеальных связей остается открытым. Обычно для определения реакций прибегают к векторным уравнениям динамики относительного движения.

Покажем, что соотношения (1.9) позволяют найти реакции связей аналитически, по функции кинетической энергии T. Запишем (1.9) в виде:

$$m_k \boldsymbol{w}_k \cdot (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_{kr}) = (\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k) \cdot \boldsymbol{v}_{ke} \qquad (1.17)$$

С учетом уравнений Лагранжа, и того, что $m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \dot{T}$, получаем

$$m_k \boldsymbol{w}_k \cdot (\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_{kr}) = \dot{T} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i = \dot{T} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i}\dot{q}_i =$$

$$= 2\dot{T} - 2\dot{T}_2 - \dot{T}_1 - \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{T}_1 + 2\dot{T}_0 - \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (1.18)$$

Здесь учтено, что при нестационарных связях кинетическая энергия является суммой квадратичной, линейной и нулевой форм обобщенных скоростей.

$$T = \sum (T_{k2} + T_{k1} + T_{k0}) \qquad (1.19)$$

Таким образом, для каждой из точек системы

$$(\boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{R}_k) \cdot \boldsymbol{v}_{ke} = \dot{T}_{k1} + 2\dot{T}_{k0} - \frac{\partial T_k}{\partial t} \qquad (1.20)$$

Из этих соотношений можно определить реакции $\boldsymbol{R}_k$ внешних и внутренних идеальных связей.

2. Дискретные нестационарные связи

Понятие нестационарных связей применимо только в случаях, когда инертность системы пренебрежимо мала по сравнению с инертностью связей (движение спичечного коробка по волнам, поезда по Земле, человека по поезду, и т.п.). В противном случае связь должна быть включена в систему.

Детали механизмов обладают инертностью одного порядка, поэтому в механизмах чаще всего нестационарные связи отсутствуют. После решения обратной задачи любую деталь механизма можно, однако, формально считать нестационарной связью для сопряженных деталей. Это позволяет находить реакции внутренних связей предлагаемым ниже способом.

Когда нестационарные связи представляют собой механизм с конечным числом степеней свободы, их движение можно задать функциями времени $\{q_{l+1}(t), q_{l+2}(t), \ldots\ldots, q_m(\mathrm{t})\}$, которые назовем несвободными обобщенными координатами системы.

Таким образом, абсолютное движение системы относительно инерциальной системы отсчета может быть задано системой m обобщенных координат $\{q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots q_m\}$, среди которых последние *m-l* несвободных координат являются заданными функциями времени.

Будем сначала считать, что все координаты свободны, а реакции нестационарных связей являются неизвестными активными силами. Связи становятся условно стационарными. Найдем дифференциальные уравнения системы и уравнения, выражающие реакции через все обобщенные координаты. Из полученных соотношений найдем выражения реакций нестационарных связей через закон движения связей и системы по связям.

После освобождения координат связей, кинетическая энергия становится квадратичной формой виртуальных обобщенных скоростей

$$T = T(q_i, \dot{q}_i) \qquad (2.1)$$

а возможные законы движения - функциями только обобщенных координат.

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_i) \qquad (2.2)$$

Их явная зависимость от времени скрыта в координатах $\{q_{l+1}, q_{l+2}, \ldots\ldots, q_m\}$

Запишем соотношения типа (1.8)

$$m_k \boldsymbol{w}_k \cdot \boldsymbol{v}_{kr} = \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{v}_{kr} \qquad (2.3)$$

Уравнения (2.3) аналогичны уравнениям (1.8) . Разница только в том, что в число активных сил включены неизвестные реакции нестационарных связей. Как и в случае уравнений (1.8), приходим к полной системе уравнений движения системы, состоящей из дифференциальных уравнений Лагранжа числом степеней свободы l:

$$L_i(T) = Q_i{}^a \qquad (i = 1,2, \ldots l) \qquad (2.4)$$

и уравнений для определения реакций $\boldsymbol{R}_k$, входящих в обобщенные силы

$$L_i(T) = Q_i{}^R \qquad (i = l+1, \ldots, m) \qquad (2.5)$$

Уравнения (2.4) позволяют по начальным условиям найти закон движения системы по связям. После этого, из уравнений (2.5) можно найти реакции внешних и внутренних связей.

3. Примеры

3.1. Нестационарные связи общего вида.

Точка массы m движется в плоскости x,y по закону, в котором выделена обобщенная координата q вдоль движущейся плоской кривой

$$x = x(q,t), \quad y = y(q,t)$$

Например, точка движется по эллипсу, полуоси которого изменяются во времени

$$x = a(t)Sin\frac{q}{a(t)}, \qquad y = b(t)Cos\frac{q}{b(t)}$$

Кинетическая энергия точки является суммой трех форм обобщенной скорости

$$T(\dot{q},q,t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = T_2 + T_1 + T_0$$

$$T_2 = A_2(q,t)\dot{q}^2, \quad T_1 = A_1(q,t)\dot{q}, \qquad T_0 = A_0(q,t)$$

Производные форм:

$$\dot{T}_1 = A_1\ddot{q} + \frac{\partial A_1}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial A_1}{\partial t}, \qquad \dot{T}_0 = \frac{\partial A_0}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial A_0}{\partial t}, \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial A_2}{\partial t}\dot{q}^2 + \frac{\partial A_1}{\partial t}\dot{q} + \frac{\partial A_0}{\partial t}$$

Из уравнения мощностей

$$\dot{T}_1 + 2\dot{T}_0 - \frac{\partial T}{\partial t} = A_1\ddot{q} - \frac{\partial A_2}{\partial t}\dot{q}^2 + 2\frac{\partial A_0}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial(A_1 + A_0)}{\partial t} = \boldsymbol{N}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$$

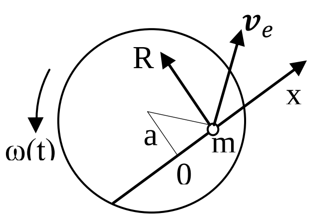
находим реакцию связи

$$N_x\frac{\partial x}{\partial t} + N_y\frac{\partial y}{\partial t} = A_1\ddot{q} - \frac{\partial A_2}{\partial t}\dot{q}^2 + 2\frac{\partial A_0}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial(A_1 + A_0)}{\partial t}$$

3.2 Точка массы m движется без трения по хорде диска, вращающегося в горизонтальной плоскости с переменной угловой скоростью ω (t). Найдем горизонтальную реакцию ***R*** направляющей.

3.2.1 Общая формула

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_e = \dot{T}_1 + 2\dot{T}_0 - \frac{\partial T}{\partial t}$$



$$v_e = \omega\sqrt{a^2 + x^2} \qquad \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_e = R\omega x \qquad (3.2.1)$$

$$T = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \omega^2(a^2 + x^2) + 2\omega\dot{x}a]$$

$$T_1 = m\omega\dot{x}a, \qquad T_0 = \frac{m}{2}\omega^2(a^2 + x^2),$$

$$\dot{T}_1 = ma(\omega\ddot{x} + \dot{\omega}\dot{x}) \qquad \dot{T}_0 = mx\dot{x}\omega^2 + m\omega\dot{\omega}(a^2 + x^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = m\omega\dot{\omega}(a^2 + x^2) + m\dot{\omega}\dot{x}a$$

Теперь

$$Rx = 2mx\dot{x}\omega \quad + m\dot{\omega}(a^2 + x^2) + ma\ddot{x}$$

С учетом дифференциального уравнения движения

$$\ddot{x} + \dot{\omega}a - \omega^2 x = 0$$

получаем

$$R = m[2\omega\dot{x} + \dot{\omega}x + a\omega^2]$$

3.2.2 . Освободим координату φ

$$T = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2(a^2 + x^2) + 2\dot{\varphi}\dot{x}a]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = m[\ddot\varphi(a^2+x^2) + 2\dot\varphi\dot x x + a\ddot x], \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

Обобщенная сила реакции (момент) по φ:

$$Q_\varphi \;=\; Rx$$

Получаем тот же результат

$$Rx = 2mx\dot x\dot\varphi \quad + \; m\ddot\varphi(a^2+x^2) + ma\ddot x$$
$$R = m[2\dot\varphi\dot x + \ddot\varphi x + a\dot\varphi^2]$$

После интегрирования уравнения относительного движения, по функциям ω (t) и x(t) найдем реакцию R.

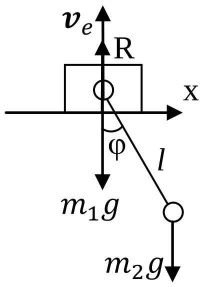
Аналогичный результат можно получить с помощью основного уравнения динамики относительного движения точки.

3.3 Внутренние реакции.

Для части системы, остальная ее часть является нестационарной связью. Поэтому реакция отброшенной части может быть найдена указанными ниже способами.

Найдем натяжение нити S, соединяющей тела в эллиптическом маятнике.

3.3.1 Общая формула.



Кинетическая энергия массы m_2

$$T' = \frac{m_2}{2}(\dot x^2 + l^2\dot\varphi^2 + 2l\dot x\dot\varphi Cos\varphi)$$

Здесь $\dot x$ рассматривается как заданная функция скорости нестационарной связи, поэтому

$$T_o' = \frac{m_2}{2}\dot x^2, \quad T_1' = m_2 l\dot\varphi\dot x\; Cos\varphi$$

$$\dot T_o' = m_2\dot x\ddot x, \quad \dot T_1' = m_2 l[(\dot\varphi\ddot x + \dot x\ddot\varphi)Cos\varphi - \dot\varphi^2\dot x Sin\varphi], \quad \frac{\partial T}{\partial t} = m_2(\dot x\ddot x + l\dot\varphi\ddot x Cos\varphi)$$

$$2\dot T_o' + \dot T_1' - \frac{\partial T}{\partial t} = -S\dot x Sin\varphi$$

$$SSin\varphi = m_2[l(\dot\varphi^2 Sin\varphi - \ddot\varphi Cos\varphi) - \ddot x]$$

3.3.2 Освободим координату x. Реакцию стержня S считаем неизвестной активной силой. Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) = m_2[\ddot x + l(\ddot\varphi Cos\varphi - \dot\varphi^2 Sin\varphi)], \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad Q_x \;= -SSin\varphi$$

приводит к тому же результату:

$$SSin\varphi = m_2[l(\dot\varphi^2 Sin\varphi - \ddot\varphi Cos\varphi) - \ddot x]$$

Очевидное слагаемое m_2g входит в правую часть решения через ускорения. Это выражение дает решение при $\varphi \neq 0$. Чтобы найти натяжение нити при $\varphi = 0$, системе следует дать постоянную вертикальную скорость, как это сделано в следующем примере.

3.4 Реакции стационарных связей.

При стационарных связях реакции идеальных связей не создают мощности. Чтобы найти реакции, можно искусственно сделать связи нестационарными, придав им постоянную скорость в направлении связи. При этом система отсчета остается инерциальной, и реакции связей не изменяются.

Найдем нормальную реакцию R , действующую на тело m_1 эллиптического маятника.

Дадим основанию вертикальную постоянную скорость $\boldsymbol{v}_e$. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}^2 + v_e{}^2) + \frac{m_2}{2}[(\dot{x} + l\dot{\varphi}Cos\varphi)^2 + (v_e + l\dot{\varphi}Sin\varphi)^2]$$

3.4.1 Общая формула

$$T_1 = m_2 v_e l\dot{\varphi}Sin\varphi, \qquad T_o = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_e{}^2 = Const$$

$$\dot{T}_1 = m_2 l v_e(\ddot{\varphi}Sin\varphi + \dot{\varphi}^2 Cos\varphi) = [R - (m_1 + m_2)g]v_e$$

$$R = (m_1 + m_2)g + m_2 l(\ddot{\varphi}Sin\varphi + \dot{\varphi}^2 Cos\varphi)$$

3.4.2 Освободим координату y ($\dot{y} = v_e,\ \ddot{y} = 0$) .

$$T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_2}{2}[(\dot{x} + l\dot{\varphi}Cos\varphi)^2 + (\dot{y} + l\dot{\varphi}Sin\varphi)^2]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l(\ddot{\varphi}Sin\varphi + \dot{\varphi}^2 Cos\varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \ddot{y} = 0$$

Обобщенная сила по y: $Q_y \ = \ R - (m_1 + m_2)g$

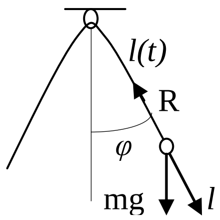
Приходим к тому же результату:

$$R = (m_1 + m_2)g + m_2 l(\ddot{\varphi}Sin\varphi + \dot{\varphi}^2 Cos\varphi)$$

Этот результат можно получить из теоремы о движении центра масс.

3.5 Найдем реакцию нити R маятника массы *m* и переменной длины *l(t)*.

3.5.1 Общая формула



$$T = \frac{m}{2}(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2)$$

$$T_1 = 0, \quad T_o = \frac{m}{2}\dot{l}^2, \quad \dot{T}_o = m\dot{l}\ddot{l}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \ m\dot{l}\ddot{l} + ml\dot{l}\dot{\varphi}^2$$

$$2\dot{T}_0 + \dot{T}_1 - \frac{\partial T}{\partial t} = (\boldsymbol{R} + m\boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{v}_e$$

$$2m\dot{l}\ddot{l} - \ m\dot{l}\ddot{l} - ml\dot{l}\dot{\varphi}^2 = R_l\dot{l} + mg\dot{l}Cos\varphi$$

$$R_l = m(\ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 - g\ Cos\varphi)$$

3.5.2 Освободим координату l

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{l}}\right) = m\ddot{l}, \qquad \frac{\partial T}{\partial l} = mx\dot{\varphi}^2 \qquad\qquad Q_l \ = R_l + mgCos\varphi$$

Приходим к тому же результату

$$R_l = m(\ddot{l} - l\dot{\varphi}^2 - g\ Cos\varphi)$$

Этот результат можно получить и с помощью основного уравнения динамики относительного движения точки.

Заметим, что освобождение координат приводит к результату быстрее, чем общая формула. Но этот способ применим только к связям с конечным числом степеней свободы.

Автор выражает искреннюю благодарность Федору Федоровичу Прохоренко за поднятую им тему получения уравнений Лагранжа из теоремы об изменении кинетической энергии.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике.−М.: Наука, 1966.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. −М.: Наука, 1982.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. − СПб: Лань, 1998.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. − М.: Высшая школа, 2003.
5. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С. − М.: МГТУ, 2000.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.II.−М.: Высшая школа, 1971.
7. Гернет М.М. Курс теоретической механики. − М.: Высшая школа.1987. − 344 с.