

## СОПРОТИВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЮ КОЛЕСА

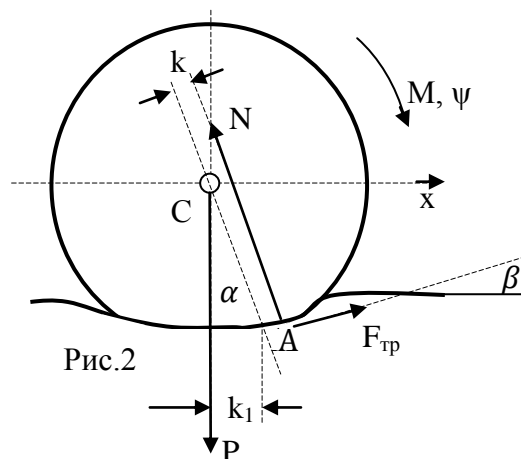
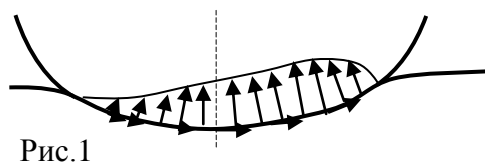
А.В.Костарев

Санкт - Петербургский государственный политехнический университет.  
Санкт – Петербург, Россия

**Аннотация** Рассмотрена общая модель сопротивления движению деформируемого колеса по деформируемой опорной поверхности. Показано, что сопротивление приводится не только к моменту, но и к силе. Установлено, что традиционная модель трения качения описывает только сопротивление качению деформируемого колеса по абсолютно твердой опорной поверхности.

**Ключевые слова:** момент трения качения, сила сопротивления дороги

На деформируемое колесо со стороны деформируемой опорной поверхности (дороги) (Рис.1) действуют нормальные и касательные распределенные реакции.



Касательные реакции являются силами трения.

Системы нормальных реакций и сил трения являются плоскими, а значит, имеют равнодействующую  $N$  и  $F_{тр}$  соответственно (Рис.3). Линия действия равнодействующей сил трения  $F_{тр}$  проходит несколько ниже линии контакта и наклонена к дороге под малым углом, который при начале движения центра колеса принимает максимальное значение  $\beta$ .

Ввиду односторонности связи, линия действия нормальной реакции  $N$  пересекает линию контакта в некоторой точке  $A$ , смещенной в сторону, обусловленную действием нагрузки. Линия действия реакции  $N$  наклонена против действия нагрузки под малым углом, который при начале движения центра колеса принимает максимальное значение  $\alpha$ . Расстояние  $k_1 = r \alpha$  назовем коэффициентом сопротивления дороги. Ввиду малости углов  $\alpha$  и  $\beta$  положим  $\beta = \alpha$ .

Линия действия реакции  $N$  в общем случае смещена относительно центра колеса так, что ее момент препятствует вращению колеса, обусловленному нагрузкой. При начале вращения колеса смещение достигает предельного значения  $k$ , которое называется коэффициентом трения качения.

В осях  $(x, y)$  уравнения движения колеса радиуса  $r$ , массы  $m$ , и момента инерции  $J$  под действием нагрузки на ось  $P$ , силы  $F$  и момента  $M$  имеют вид:

$$m\ddot{x} = F + F_{тр} \cos \alpha - N \sin \alpha \quad (1)$$

$$0 = N \cos \alpha - P + F_{mp} \sin \alpha \quad (2)$$

$$J \ddot{\psi} = M - r F_{mp} - N k \quad (3)$$

Рассмотрим чистое качение колеса:

$$\dot{x} = r \dot{\psi} \quad (4)$$

Из уравнения (2):

$$N = \frac{(P - F_{mp} \sin \alpha)}{\cos \alpha}$$

Из уравнений (1,3,4) находим силу трения  $F_{mp}$  и ускорение  $\ddot{x}$

$$F_{mp} = \frac{Mmr - FJ + P \left( J T g \alpha - \frac{mrk}{\cos \alpha} \right)}{mr(r - k T g \alpha) + J(\cos \alpha + \sin \alpha T g \alpha)} \quad m \ddot{x}$$

$$= F + F_{mp}(\cos \alpha + \sin \alpha T g \alpha) - P T g \alpha$$

Полагая что  $\alpha \ll 1$  и

$$\cos \alpha \approx 1, \sin \alpha \approx T g \alpha \approx \alpha \approx \frac{k_1}{r} \quad (5)$$

находим:

$$F_{mp} \approx \frac{Mmr - FJ + P \left( J \frac{k_1}{r} - mrk \right)}{mr \left( r - \frac{kk_1}{r} \right) + J \left[ 1 + \left( \frac{k_1}{r} \right)^2 \right]} \quad m \ddot{x} = F + F_{mp} \left[ 1 + \left( \frac{k_1}{r} \right)^2 \right] - P \frac{k_1}{r}$$

Положив, что  $k$  и  $k_1$  величины одного порядка малости,

$$k, k_1 \ll r$$

введя обозначение

$$J_A = J + mr^2$$

и отбросив малые величины, получим приближенный результат:

$$F_{mp} \approx \frac{1}{r J_A} [Mmr^2 - FrJ + P(Jk_1 - mr^2k)] \quad \ddot{x} = \frac{r}{J_A} [M + Fr - P(k + k_1)] \quad (6)$$

Составим теперь из (1-4) приближенные уравнения движения колеса, приняв в них (5).

$$m \ddot{x} = F + F_{mp} - N \frac{k_1}{r}$$

$$0 = N - P + F_{mp} \frac{k_1}{r}$$

$$J \ddot{\psi} = M - r F_{mp} - N k$$

Отсюда

$$m \ddot{x} \approx F + F_{mp} - F_c$$

$$J \ddot{\psi} \approx M - r F_{mp} - M_{\text{тк}} \quad (7)$$

Где

$$M_{\text{тк}} = N k \quad F_c \approx P \frac{k_1}{r}$$

При чистом качении  $\dot{x} = r \dot{\psi}$  получаем тот же результат (6), что и из точных уравнений после учета малых. Отсюда следует, что задачи о движении колеса по горизонтальной дороге можно решать на основе приближенных уравнений (7) и Рис.3.

Электронный справочник DPVA [11] приводит следующие коэффициенты трения качения в см:

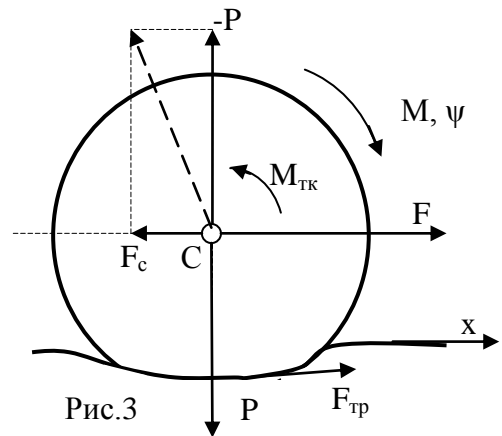


Рис.3

Деревянное колесо по дереву	0,05-0,08
Стальное колесо по дереву	0,15-0,25
Деревянное колесо по стали	0,03-0,04

Табл.1

Таблица показывает, что для пары материалов разной твердости, например дерево-сталь, коэффициент сопротивления деформируемой дороги качению твердого колеса значительно превосходит коэффициент трения качения деформируемого колеса по твердой дороге. Это подтверждает различную природу сопротивлений.

Понять какое именно сопротивление характеризуют момент трения качения  $M_{mk}$  и сила сопротивления  $F_c$  легче, если рассмотреть два предельных случая, когда одно из контактирующих тел является абсолютно твердым.

**Абсолютно твердая дорога.** В этом случае коэффициент сопротивления дороги  $k_1 = 0$ , нормальная реакция  $N=P$ , вертикальна и смещена на коэффициент трения качения  $k$ . В центре колеса  $C$  реакция  $N$  приводится к силе  $-P$  и моменту трения качения  $M_{mk}$  (Рис.4). Таким образом, коэффициент трения качения  $k$  характеризует сопротивление вращению колеса, которое не зависит от движения центра колеса.

Именно этот случай рассматривается в традиционной модели трения качения [1, с. 78-79], [2, с. 89-90], [3, с. 252-253], [4, с.238], [5, с. 201], [6, с.103], [7, с.185], [8, с.255], [9, с. 98-99], [10], [12, с.121]. К сожалению, в большинстве источников модель снабжена неверным рисунком вида Рис.5

Сочетание Рис.5 с моделью момента трения качения приводит к парадоксам при малой силе трения скольжения  $F_{mp} < 1$ . Центр *ведущего* колеса ( $F = 0$ ) вынужден двигаться под действием сколь угодно малой силы  $F_{mp}$ , преодолевая сопротивление дороги.

*Ведомое* колесо ( $M = 0$ ) вынужденно вращаться в обратную сторону под действием силы  $N$ .

Свободно пущенное вдоль абсолютно гладкой дороги колесо ( $M, F, f = 0$ ) не может остановиться, несмотря на сопротивление опорной поверхности.

**Абсолютно твердое колесо.** В этом случае коэффициент трения качения  $k = 0$ , реакция  $N$  проходит через центр колеса (Рис.2) и вызывает силу сопротивления  $F_c$  (Рис 5). Таким образом, коэффициент сопротивления дороги  $k_1$  характеризует сопротивление поступательному перемещению колеса, которое не зависит от вращения колеса.

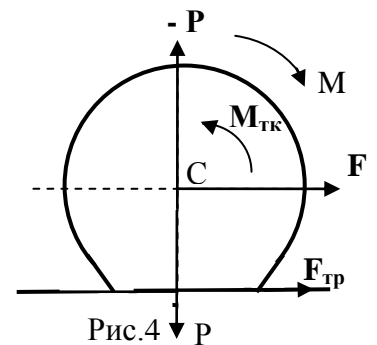


Рис.4

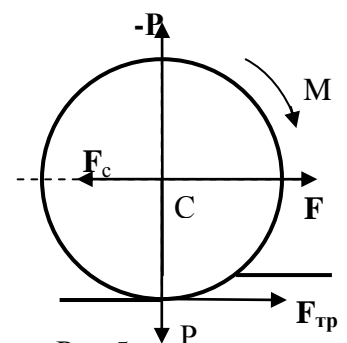


Рис.5

### Выводы.

1. Для любой пары материалов существует два коэффициента сопротивления: коэффициент трения качения  $k$ , характеризующий момент сопротивления, и коэффициент сопротивления дороги  $k_1$ , характеризующий силу сопротивления.
2. Таблицы коэффициентов трения качения следует пересмотреть, экспериментально определив коэффициенты  $k$  и  $k_1$ .

3. В курсах теоретической механики традиционную модель трения качения следует сопровождать рисунком Рис.4 б и дополнить моделью сопротивления дороги.

### Литература

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. –М.: Наука, 1982. –352с.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб: Лань, 1998. – 729с.
3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 2003, – 719с.
4. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С. – М.: МГТУ, 2000. – 735с.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.II.–М.: Высшая школа, 1971.–488 с.
6. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Наука, 1967. – 478с.
7. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа.1987. – 344 с.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т.2. – М.: Наука, 1966. – 663с.
9. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. I-3// Под ред. Колесникова К.С. 1994. – 534с.
10. Illinois Institute of Technology Coaching: Rolling Friction.  
URL: <http://www.youtube.com/watch?v=9lO-AIcq0yI> – (дата обращения: 24.12.2009).
11. Электронный справочник DPVA.  
URL: <http://www.dpva.info/Guide/GuidePhysics/Frication/FrictionOfRolling/> – (дата обращения: 14.12.2009).
12. Appel' P. Теоретическая механика. Том 2. – М.: Физматлит, 1960.– 487 с.